11.14 是抛物线，不是悬链线

工作纸

题目

STEP I 1991，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s1-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　在每个节点 A_i 上有三个力作用：相邻两段链的张力，以及吊杆上所挂的重量 w。重量无法影响张力的哪一个分量？

阶段 1 各接点（joint）的方程

涵盖：平衡方程（equilibrium equations）

想一想 在每个接点，重量都是垂直向下的。那么，相邻两段的张力（tension）的水平分量（horizontal component）有甚么关系？沿水平方向和垂直方向分解（resolve）各力。

停一停，试一试 在中间的接点，利用桥的对称性（symmetry）。该处的两段各自承托其支柱（strut）重量的多少？

阶段 2　由重量求斜率（slope）

涵盖：各个比

想一想　由中间向外逐段计算。每一段的张力的垂直分量是多少？把它除以共同的水平分量便得到斜率，然后以高度 y_i 和 h 表示每个斜率。

阶段 3 **抛物线（parabola）**

涵盖：抛物线

想一想 由中间向外数接点。把由中间接点起每段的下降量加起来：$1+3+5+\cdots+(2j-1)$ 等于甚么?

背后的数学

抛物线还是悬链线?

把上述论证改为连续的版本，便能同时解释这两条曲线。对于一条水平张力恒为 H 的链 $y(x)$，张力的铅垂分量为 Hy'，而在一小段上，它的变化等于该段所承受的负载：$H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$。

- 若负载沿水平方向均匀分布（沉重的路面，每单位路面长度的重量为 ρ），则 $Hy'' = \rho$，所以 y 是二次函数：一条抛物线。
- 若负载是链本身的重量，沿链身均匀分布（每单位链长的重量为 ρ），则 $Hy'' = \rho\sqrt{1+y'^2}$，其解为悬链线 $y = c\cosh\frac{x}{c}$，其中 $c = H/\rho$。

在底部附近，链几乎是水平的，两者差不多一样；它们在支承点附近才有分别，因为那里的链较陡，同一段水平距离内包含较多的链。真实的悬索桥，桥面远比缆索重，所以形状十分接近抛物线。

倒转的链与拱

链处于纯张力状态；把它的形状上下倒转，便得到一个处于纯压力（compression）状态的拱，完全没有弯曲的倾向。胡克（Robert Hooke）在 1675 年以一个字谜（anagram）的形式发表了这个发现，解开后的意思是：“柔软的绳怎样悬垂，倒转过来，坚硬的拱便怎样屹立。”雷恩（Christopher Wren）与胡克把这个想法用于圣保罗大教堂（St Paul's Cathedral）的圆顶，而高迪（Antoni Gaudí）设计巴塞隆拿的圣家堂（Sagrada Família）

时，则从天花板垂下挂着重物的绳子，再把照片倒转来看。圣路易斯的拱门（Gateway Arch）就是一条（加权的）倒置悬链线。

悬链线的挑战

1690 年，雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）向数学家提出挑战：求出悬垂的链的形状。不出一年，他的弟弟约翰（Johann）、莱布尼兹（Leibniz）和惠更斯都发表了解答。约翰·伯努利后来得意地忆述，出题的哥哥自己反而解不出来。悬链线是新兴的微积分（calculus）最早的胜利之一，并引出了双曲函数（hyperbolic functions）cosh 和 sinh；到了十八世纪，Vincenzo Riccati 和兰伯特（Johann Heinrich Lambert）对这些函数作了有系统的研究。

延伸练习

1 **偶数条吊杆。**把题目改为 $2n$ 条吊杆再做一次，此时链的最低处是中间的一段水平线段。各节点是否仍然位于一条抛物线上？

2 **张力。**以 H、w 和 n 表示链中的最大张力。它出现在哪里？

3 **悬链线。**验证 $y = c\cosh\frac{x}{c}$ 满足 $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$。证明悬链线由 $x = 0$ 到 $x = X$ 的长度为 $c\sinh\frac{X}{c}$。

4 **伽利略的错误。**一条长度为 $2L$ 的链悬挂在相距 $2d$ 的两个支承点之间。当 L 只比 d 稍大时，证明悬链线的垂度（sag）与抛物线的垂度近似相同。为甚么伽利略的实验没有显示出两者的分别？

延伸阅读

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。悬链线、抛物线及其相关曲线。
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton***（Cambridge University Press）。由胡克的链说起，讲述砖石拱和圆顶如何屹立不倒。
- **David Billington, *The Tower and the Bridge***（Princeton University Press）。桥梁的艺术与工程。

完整的引导式解答见第 11.14 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/bridge-parabola.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com