11.13 铲雪车问题

工作纸

题目

STEP III Specimen paper，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/spec-s3-q11

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　第一辆铲雪车在时间 t 遇到的积雪深度为 $h + kt$。它的速率是多少？求 x 作为 t 的函数较容易，还是求 t 作为 x 的函数较容易？

阶段 1　第一辆铲雪车

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　在时间 t，第一辆铲雪车遇到的积雪深度为 $h + kt$。写出它的速率。把 t 看成 x 的函数会较易求解：把方程上下倒转，然后求解。

阶段 2 第二辆铲雪车的方程

涵盖：第 (ii) 部分：建立方程

停一停，试一试 在时间 t，第二辆铲雪车位于 y。第一辆铲雪车在时间 $t_1(y)$ 清理过该处。现在那里的积雪有多深？写出第二辆铲雪车的速率，然后把它上下倒转。

阶段 3 求解

涵盖：第 (ii) 部分：解方程

想一想 把 t 看成 y 的函数时，这个方程是线性（linear）的。使用积分因子（integrating factor）$e^{-\alpha y}$，并利用第二辆铲雪车在时间 T 从 $y = 0$ 出发这个条件。

阶段 4 相撞

涵盖：第 (ii) 部分：两车相遇之处

? **想一想** 两辆铲雪车在同一时间到达同一点时便会相遇。求 $t_2(y) - t_1(y)$。它何时等于零？

背后的数学

Agnew 的铲雪车

Ralph Palmer Agnew 的版本出自他 1942 年的教科书 *Differential Equations*：某天早上开始下起大雪，雪势均匀不变；一辆铲雪车在正午出发，第一个小时走了 2 英里，第二个小时走了 1 英里；雪是甚么时候开始下的？铲雪车的速率与积雪深度成反比，而深度则与开始下雪以来所经过的时间成正比。答案（见下面的一道练习）涉及黄金比（golden ratio）：雪大约在正午前 37 分钟开始下。其后才陆续出现像本题这样有两辆铲雪车的版本。

会传递的信息

第二辆车的运动取决于路面上记录下来的历史：每一点最后一次被清理的时间。这是具有记忆（memory）的系统的一个简单例子，在这类系统中，某处的状态取决于该处先前发生过的事。交通流、冰川的运动和山火的蔓延都有这种特性，而它们背后的数学，即一阶偏微分方程（first-order partial differential equations）及其特征线（characteristics）的理论，是大学二年级的标准课题。把时间写成位置的函数（“前沿何时到达这里？”），正是处理这类问题时所用的到达时间（arrival times）方法。

延伸练习

1 **Agnew 的问题。**雪在正午前某个未知的时间开始以稳定的速率落下。一辆铲雪车的速率与积雪深度成反比，它在正午出发，第一个小时走了 2 英里，第二个小时走了 1 英里。证明若雪在正午前 t_0 小时开始下，则 $(1+\frac{2}{t_0})^2 = (1+\frac{1}{t_0})^3$，由此推出 $\frac{1}{t_0}$ 是黄金比，并求雪何时开始下。

2 **验证。**用求导验证 $t_2(y)$ 满足第 (ii) 部分的微分方程。

3 **时间差距。**证明若 $kT > h$，时间差距 $t_2(y) - t_1(y)$ 先增加，然后减少至零，并求它在何处最大。若 $kT \leq h$，又会怎样？试解释其意义。

4 **三辆铲雪车。**第三辆铲雪车在时间 $2T$ 出发。写出它的运动方程。它追上第二辆车，是在第二辆车追上第一辆车之前还是之后？

延伸阅读

- **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations***（McGraw-Hill, 1942）。铲雪车问题的原始出处。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press），书中讨论了铲雪车问题和许多其他问题。
- **Richard Haberman, *Mathematical Models***（SIAM）。交通流与特征线，程度浅易。

完整的引导式解答见第 11.13 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/snowplough.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com