11.12 橡皮绳上的蚂蚁

工作纸

题目

STEP II 2018，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/18-s2-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　绳子是均匀拉伸的：每一小段都按相同的倍数伸长。在时间 t，绳长为 $a+ut$。若距离钉子 x 的一点位于全长的 $\frac{x}{a+ut}$ 处，这一点移动得有多快？

阶段 1 蚂蚁的方程

涵盖：蚂蚁的方程

想一想 蚂蚁相对于绳子以速率 v 前进，另外还要加上牠脚下那段绳子本身的速率。写出 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$。

停一停，试一试 用商法则（quotient rule）对 $\frac{x}{a+ut}$ 求导，再代入你所得的 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 方程。最后剩下甚么？

阶段 2　到达终点

涵盖：到达终点所需的时间

? **想一想**　由 0 积分至 t。当分数 $\frac{x}{a+ut}$ 等于 1 时，蚂蚁便到达终点。

阶段 3 回程

涵盖：回程

> **想一想** 往回走时，蚂蚁沿绳子的速度是 $-v$。这时该分数的变化率是多少？它在时间 T 时由 1 开始，何时会降至 0？

背后的数学

调和级数的版本

这个谜题通常是以离散的拉伸来叙述的。一条绳长 1 公里；蚂蚁在第一秒走 1 厘米；然后绳子拉长 1 公里；然后蚂蚁再走一厘米，如此类推。在第 n 秒，蚂蚁在长 n 公里的绳上走了 1 厘米：所占比例为 $\frac{1}{100\,000\,n}$。拉伸不会改变牠所占的比例，所以 N 秒之后，牠已走过绳子的

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

。当 $H_N\approx 100\,000$ 时牠便到达，那大约是 $e^{100\,000}$ 秒之后，这个数有超过 43 000 位数字。（作为比较，宇宙的年龄约为 4×10^{17} 秒。）我们的连续版答案与此吻合：$k=\frac{u}{v}=100\,000$，而 $T\approx\frac{a}{u}e^{k}$。

膨胀宇宙中的光

绳上的蚂蚁，正是光穿越膨胀宇宙的一个模型。遥远的星系被空间本身的膨胀带着远离我们，而它们发出的光则以速率 c 在膨胀的空间之中向我们传播，就像蚂蚁沿着拉伸中的绳子行走一样。遥远星系的光最终能否到达我们这里，取决于膨胀率如何随时间变化。在一个以稳定速率膨胀的宇宙中，就像那条绳子一样，光最终总会到达。而在一个加速膨胀的宇宙中（我们的宇宙看来正是如此），有些星系的光永远不会到达我们这里：这就是宇宙事件视界（cosmic event horizon）。对蚂蚁来说，相应的情况是一条按指数拉伸的绳子，绳端的速率与绳长成正比地增长（可在练习中试试）。

加德纳的蚂蚁

这个谜题似乎是法国数学家 Denys Wilquin 在 1972 年发明的，当时说的是橡皮筋上的一条虫；其后马丁·加德纳（Martin Gardner）在他的 *Scientific American* 专栏和著作 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* 中介绍，令它广为人知。它是最著名的例子之一：结果违反直觉，却又容易证明；它也是人们说明调和级数发散时最爱用的例子。

延伸练习

1 **中途。**蚂蚁何时走到绳子的一半？那是在时间 $\frac{T}{2}$ 之前还是之后？

2 **指数拉伸。**假设绳长改为 $ae^{\lambda t}$。证明蚂蚁仅当 $v > \lambda a$ 时才能到达尽头。（这就是宇宙事件视界。）

3 **加速的绳子。**若绳长为 $a + \frac{1}{2}bt^2$，蚂蚁是否总能到达？

4 **离散的谜题。**在离散版本中，蚂蚁需要多少秒才能走过绳子的 1%？请使用 $H_N \approx \ln N + 0.577$。

延伸阅读

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。书中收录了橡皮绳上的蚂蚁。
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。调和级数，以及这只蚂蚁。
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology***（Cambridge University Press）。膨胀的空间、视界与共动坐标，属大学本科程度。

完整的引导式解答见第 11.12 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/rubber-rope.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com