# 11.11 外野手如何接球

**工作纸**

**题目**

**STEP II 1998，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q11

## 提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　设击球手位于原点，外野手在距离 $D$ 处。若球位于 $(x, y)$，$\tan\theta$ 是甚么？

### 阶段 1 位置恰到好处的外野手

涵盖：静止不动的外野手

**想一想** 把击球员（batsman）放在原点（origin），外野手（fielder）则在距离 $D$ 处。当球位于 $(x, y)$ 时，$\tan\theta$ 是甚么？

**停一停，试一试** 设球在时间 $T$ 落到与眼睛同高的位置，而该处正是外野手所在之处。试以 $t$ 和 $T$ 表示 $y$ 和 $D - x$。你能否把 $y$ 因式分解（factorise），使某些项可以约去？

### 阶段 2　奔跑中的外野手

涵盖：奔跑中的外野手

**想一想**　现在外野手从距离 $D$ 处出发，以速率 $v$ 跑向击球员。若她在时间 $T$ 接到球，$D$ 是多少？把刚才的计算再做一遍。

**停一停，试一试**　至于逆命题（converse），假设 $\tan\theta$ 以恒定的速率 $c$ 上升，即 $\tan\theta = ct$。先消去分母，再比较 $t$ 的系数（coefficient）和常数项（constant term）。由此你能看出 $D$ 是甚么吗？

## 背后的数学

### 光学加速度抵消

Chapman 的法则现称为*光学加速度抵消*（optical acceleration cancellation）：外野手移动自己的位置，使“光学加速度” $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan\theta$ 保持为零。假如球的影像加速上升，球就会越过她的头顶，所以她要后退；假如影像减速，球就会落在她身前，所以她要向前跑（图 11.11.1（见网上该节的完整版））。这个策略没有告诉她球会落在哪里，却能把她带到那里。这是一条反馈控制律（feedback control law），与导引导弹所用的同出一辙：导弹采用*比例导引*（proportional navigation），使指向目标的视线角保持不变，那正是同一个想法的横

向版本。

### 外野手实际怎样做

真实的外野手是否采用 Chapman 的法则？1990 年代有人把摄影机装在棒球外野手的头上做实验，结果并不一致。Michael McBeath 及其同事于 1995 年在 *Science* 上提出，对于打向一侧的球，外野手会沿弯曲的路线奔跑，使球的影像在视野中沿直线移动（即“线性光学轨迹”，linear optical trajectory），这同样能把他们带到接球的位置。其后的研究显示，这两种策略以及两者的混合都有人使用，而且外野手往往并非以恒定速率奔跑。2004 年的一项研究发现，接飞碟的狗所走的路线，与同样的光学法则吻合。无论细节如何，这个令人惊叹的结论依然成立：接球并不需要预测，只需要正确的反馈。

#### Chapman 的论文

Seville Chapman 的“Catching a baseball”于 1968 年刊登在 *American Journal of Physics*，全文只有三页，内容基本上就是本题的计算。他指出这个策略只在没有空气阻力时才成立，而真实棒球的轨迹会因阻力和旋转而变形，令情况变得复杂。尽管如此，大脑利用视野中简单的不变量来解决复杂的控制问题，这个想法在心理学和机械人学中已变得十分重要。

## 延伸练习

1. **向后跑。**假如球会落在外野手起步位置的后方，证明她应该背离击球手奔跑，而同一条法则依然适用。
2. **不是 $\theta$ 本身。**证明对于位置恰到好处的外野手，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 并非常数。为甚么 $\tan\theta$ 才是应该留意的量？
3. **眼睛的高度。**假如球是从外野手眼睛高度以下 $h$ 的位置击出，对于位置恰当的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 $t$ 的线性函数？（假设她在眼睛的高度接球。）
4. **空气阻力。**在线性空气阻力之下，水平速度会按指数衰减。对于位置恰当的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 $t$ 的线性函数？

## 延伸阅读


- **Seville Chapman，“Catching a baseball”**，*American Journal of Physics* 36 (1968)。
- **Michael McBeath、Dennis Shaffer 及 Mary Kaiser，“How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls”**，*Science* 268 (1995)。

► **Dennis Shaffer 等，“How dogs navigate to catch Frisbees”**，*Psychological Science* 15 (2004)。

完整的引导式解答见第 11.11 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/fielders.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com