11.10 会朝你飞回来的球

工作纸

题目

STEP II 2019，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　为甚么处理 OP^2 比处理 OP 容易？“OP 递增”与“OP^2 递增”是同一回事吗？

阶段 1 距离的平方

涵盖：第 (i) 部分，OP 递增

想一想 与其直接处理 OP，不如考虑 $OP^2 = x^2 + y^2$。把它写成 t 的表达式，并利用 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ 化简。

停一停，试一试 对 t 求导（differentiate），然后抽出因子 t，余下的是一个 t 的二次式（quadratic）。它在甚么情况下对所有 t 皆为正？

阶段 2　更陡的抛射

涵盖：第 (i) 部分，更陡的抛射

想一想　若 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$，该二次式有两个实根（real roots）。利用两根之和与两根之积，证明两根皆为正。较小的那个根是否出现在质点（particle）着地之前？

阶段 3 移动的观察者

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 Q 位于 $(-vt, 0)$，所以水平距离为 $x + vt$。写出 QP^2。它与 OP^2 有何不同？重复一次判别式（discriminant）的论证。

背后的数学

几何观点

OP 递减的时候，正正就是 P 的速度指向“内侧”的时候，即速度与向量 $\overrightarrow{OP}$ 成钝角（obtuse angle），也就是 $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} < 0$ 的时候。对于陡峭的抛掷，质点在接近飞行最高点时，位于抛球者的高处而略为偏前，几乎是水平地向外移动，但已开始下坠；相对于 $\overrightarrow{OP}$ 的方向而言，一旦速度中向下的部分盖过向外的部分，质点便会靠近。对于较平的抛掷，质点总是在前方足够远的位置，以致它的速度从不指回 O。临界情况就是速度恰好只在一个瞬间与 $\overrightarrow{OP}$ 垂直，亦即图 11.10.1（见网上该节的完整版）中距离停顿的那一刻。

单调性并非必然

许多“显然”会增加的量，其实并不如此。月球与地球的距离会来回振荡；在弯曲的路上，即使其中一辆车一直领先，两车之间的距离仍可以减少；猎物大量繁殖的时候，捕食者的数量却可以下降。要证明一个量是单调的，通常就是要证明某个导数的正负号固定不变，而这里所用的技巧（化为多项式，再检查它的根或判别式）正是标准的做法。在分析学（analysis）中，单调性往往是证明收敛（convergence）的关键：有界的单调数列必定收敛，正如你在第 2 章所见。

延伸练习

1 **有多近？**对于 $\alpha = 80°$，求 OP 取得局部极大值（local maximum）和局部极小值（local minimum）的时间，以及该两刻的距离，以 u^2/g 为单位。

2 **在斜面上。**把球沿一个与水平成 β 角的斜面向上抛出，并落在斜面上，就这个情况重做第 (i) 部分。临界角（从斜面量起）会改变吗？

3 **考虑空气阻力。**假设球还受到一个与其速度成正比的阻力（resistance）。不作计算，你预期临界角会大于还是小于 70.5°？为甚么？

4 **从高处抛出。**若球从悬崖顶抛出，并落在远低于崖顶的地方，证明无论以甚么角度抛出，OP 最终都会递增，并判断是否存在某些角度，令它在某个阶段递减。

延伸阅读

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics***（Wiley）。数以百计出人意表的日常物理谜题。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，讲述抛体运动，并附有数道有违直觉的题目。
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。证明一样东西恒大于另一样东西的艺术。

完整的引导式解答见第 11.10 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/coming-back.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com