11.1 共振

工作纸

题目

STEP II 1991，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q12

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　质点悬挂在平衡位置，绳的伸长量（extension）为 c。若绳的弹性模量（modulus）为 λ，则 λ、a、c、m 与 g 之间有甚么关系？当顶端向下移动了 $b\sin pt$，而质点向下移动了 x 时，伸长量是多少？

阶段 1　运动方程（equation of motion）

涵盖：运动方程

> **想一想**　取向下为正方向。当顶端向下移动了 $b\sin pt$，而质点（particle）向下移动了 x 时，伸长量（extension）是多少？写出牛顿第二定律（Newton's second law），并利用平衡（equilibrium）条件消去 mg。

阶段 2 求解

涵盖：求解 $x(t)$

想一想 把方程写成 $\ddot{x}+n^2x=n^2b\sin pt$。试用特别积分（particular integral）$x=C\sin pt$，然后加上余函数（complementary function）。

停一停，试一试 质点起初在平衡位置静止，所以 $x(0)=0$ 及 $\dot{x}(0)=0$。利用这两个条件求出两个常数。

阶段 3　保持绷紧

涵盖：绳子何时保持绷紧（taut）

> **想一想**　当伸长量 $c + x - b\sin pt$ 为正数时，绳子便是绷紧的。把它以 t 表示并化简。

> **停一停，试一试**　$p\sin pt - n\sin nt$ 最小可以负到甚么程度？由此找出一个能使伸长量保持为正数的条件。

背后的数学

共振极限

在解中令 $p \to n$。分子和分母都趋于零，计算极限（或使用洛必达法则（l'Hôpital's rule），对 p 求导）可得

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt).$$

$nt\cos nt$ 这一项会无止境地增大：恰好以固有频率驱动时，振幅随时间线性增长，每一下推动都与运动同步，为它再添一分。在略低于共振的频率下，两个频率时而同步、时而错开，产生拍（beats）：振幅以缓慢的频率 $n - p$ 时涨时落（图 11.1.1）。两条结他弦的音高几乎调准时，听到的也是同样的拍。

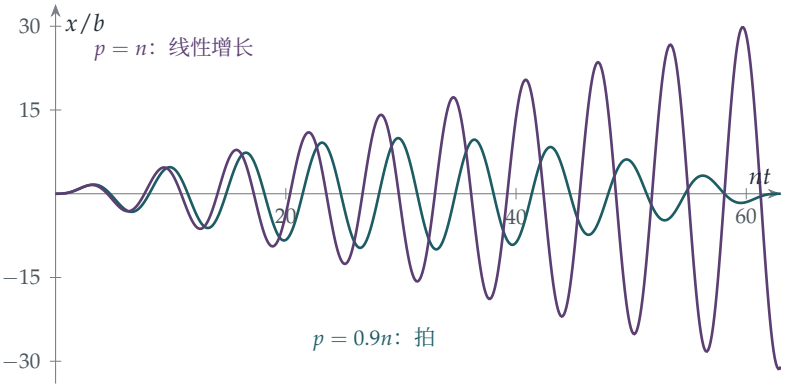

图 11.1.1 质点的响应（不考虑绳子松弛），以摇动振幅 b 为单位。当 $p = 0.9n$（蓝绿色）时，响应增大至约为 b 的十倍，然后再度消退，拍的周期为 $\frac{2\pi}{n-p}$。在恰好共振，即 $p = n$（紫红色）时，振幅无止境地增长。

阻尼与共振曲线

现实中的系统会因摩擦或空气阻力而损失能量，这就限制了振幅的增长。有阻尼（damping）时，系统对频率为 p 的驱动力的稳态响应，其振幅在固有频率附近达到峰值；峰愈尖锐，阻尼就愈小。工程师用*品质因数*（quality factor）Q 来描述这一点：粗略地说，它是系统在失去大部分能量之前所完成的振动次数。酒杯的 Q 数以千计，所以一个恰好等于其固有频率的持续音可以把它震碎。汽车的悬挂系统则刻意设计成 Q 值很低，以免路面颠簸令车身弹跳不止。

会动的桥

1831 年，一队士兵以整齐步伐操过曼彻斯特附近的布劳顿吊桥（Broughton Suspension Bridge），令桥身振动，最终倒塌；自此以后，军队过桥时都奉命打乱步伐。伦敦千禧桥（London Millennium Bridge）于 2000 年 6 月启用，人群一踏上桥，桥身便开始左右摇摆：行人不自觉地调整步伐去配合摇摆，同步地为它注入能量，结果该桥关闭了两年，以便加装阻尼器。1940 年塔科马海峡吊桥（Tacoma Narrows Bridge）那次著名的倒塌，常被说成是共振，但其实是另一种现象，即*气动弹性颤振*（aeroelastic flutter），当中风所施的力取决于桥本身的运动。要分析它，需要用到自激振动（self-excited oscillation）和极限环（limit cycle）的概念（Section 8.4）。

延伸练习

1 **下坠的升降机。**试做 STEP II 1996，第 11 题（step.maths.org/questions/96-s2-q11）：升降机内有一个质量系于弹性绳上，升降机先开始加速，其后停止加速。留意最终的振

幅如何取决于加速持续的时间。

2 **共振之时。**试用特解 $x = Ct\cos nt$，直接解 $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin nt$，其中 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$。验证所得结果与上文的极限一致。

3 **拍。**证明 $n\sin pt - p\sin nt$ 可写成两项之和，而当 p 接近 n 时，其中一项近似于 $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$。由此解释拍的周期为何是 $\frac{2\pi}{n-p}$。

4 **有阻尼的共振。**对于 $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = F\cos pt$，其中 $k > 0$ 且很小，求稳态振幅，并证明当 $p^2 = n^2 - 2k^2$ 时振幅最大。

延伸阅读

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）。第 4 章讲述受迫振动与共振，是这个课题的经典论述。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Penguin）。讲述事物如何趋于同步，从萤火虫谈到千禧桥。
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human***（Vintage）。讲述工程上的失败个案，包括历史专栏中提到的几座桥。

完整的引导式解答见第 11.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/resonance.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com