10.8 排成三角形的三颗恒星

工作纸

题目

STEP I 1999，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q11

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　一颗星要以角速度（angular velocity）ω 沿半径为 R 的圆运动，它所受的总力必须是甚么？

阶段 1　几何关系

涵盖：三颗星

> **想一想**　边长为 a 的等边三角形（equilateral triangle），每个顶点与中心相距多远？可利用以下事实：中心位于每条中线（median）上，与顶点的距离为中线长度的三分之二。

阶段 2 一颗星所受的力

涵盖：三颗星

停一停，试一试 另外两颗星各以大小为 $\frac{\gamma m^2}{a^2}$ 的力沿三角形的边拉它。这两个拉力之间的夹角是多少？求它们的合力（resultant），并说明合力指向何处。

阶段 3 角速度（angular velocity）

涵盖：三颗星

想一想 令合力等于 $m\omega^2 R$，其中 R 是该星与中心的距离，然后解出 ω。

阶段 4　位于中心的第四颗星

涵盖：在中心加入第四颗星

> **想一想**　位于中心的星所受的净力是否为零？它对每颗位于顶点的星额外施加了多大的拉力？把这个力加到合力上，再次解出 ω。

背后的数学

乔装的开普勒定律

把答案写成 $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$。对于相距 a、沿圆形轨道运行的两个天体，开普勒（Kepler）第三定律（Section 10.6 的一道练习）指出 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$，右边出现的是总质量。三颗星遵从同一条定律，总质量为 $3m$。事实上，拉格朗日证明了等边三角形解对任意三个质量都存在，而不限于相等的质量：三角形绕质心旋转，并且 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$。欧拉（Euler）在几年前已找到第二族解，其中三个天体位于一条旋转的直线上。这五种位形（三种共线、两种三角形，不计标号的差别）是三个天体能保持形状不变的仅有情况。

拉格朗日点

取 m_1 为太阳，m_2 为一颗行星，m_3 为一颗微小的小行星。等边三角形解告诉我们，小行星可以停留在与太阳和行星构成等边三角形的第三个顶点上，在行星轨道上位于行星的前方或后方。这就是拉格朗日点（Lagrange points）L_4 和 L_5；欧拉的共线解则给出 L_1、L_2 和 L_3。木星有超过一万颗已知的“特洛伊”小行星，聚集在它的 L_4 和 L_5 点附近。詹姆斯·韦伯太空望远镜（James Webb Space Telescope）在日地系统的 L_2 点附近运行，位于地球以外 1.5 百万公里处，在那里它可以把太阳、地球和月球全部挡在遮阳罩之后。

稳定性

造星者的三角形能维持下去吗？对于相等的质量，答案是不能：最轻微的扰动也会不断增长，几颗星最终不是四散飞离，就是互相碰撞。Edward Routh 在 1875 年证明，拉格朗日的三角形只有在其中一个质量占绝对优势时才是稳定（stable）的，确切的条件是

$$27(m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

对于太阳和木星，这个条件绰绰有余地成立，这就是特洛伊小行星得以长存的原因。对于三个相等的质量，$27 \times 3m^2 > 9m^2$，所以这个位形并不稳定。

庞加莱的错误与 8 字形轨道

1887 年，瑞典国王奥斯卡二世（Oscar II）悬赏征求多体问题的解。庞加莱在 1889 年凭一篇关于三体问题的长篇论文获奖，但论文付印期间，一位编辑发现了其中一处漏洞。在修正的过程中，庞加莱发现有些解的表现“复杂得惊人，我甚至无法尝试把它画出来”：这是人类对混沌的第一瞥。已印好的论文全数收回销毁，费用由庞加莱承担。新的特殊解至今仍不断被发现：1993 年 Cristopher Moore 以数值方法发现，而 2000 年 Alain Chenciner 与 Richard Montgomery 证明，三个相等的质量可以沿一条 8 字形曲线互相追逐。此后，人们借助电脑又找到了数以千计的周期轨道。

延伸练习

1. **正方形上的四颗星。**四颗质量为 m 的星位于边长为 a 的正方形的四个顶点。证明它们可以绕中心作刚性旋转，其中 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$。

2. **两颗相同的星和一颗行星。**两颗质量为 M 的星相距 a，绕它们的质心运行。一颗质量可忽略的行星位于中心。它是否处于平衡？对于沿两星连线方向的微小位移，它是否稳定？垂直于连线的方向又如何？

3. **不相等的质量。**质量分别为 m_1、m_2、m_3 的三颗星位于边长为 a 的等边三角形的三个顶点，并绕它们的质心 G 旋转。证明 m_1 所受的引力为 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$，其中 P_1 是它的位置。（提示：把各力写成向量，并利用质心的定义。）由此推导出拉格朗日的结果。

4. n **颗星。**n 颗相同的星位于一个正 n 边形的各个顶点，该正多边形内接于半径为 R 的圆。求刚性旋转的 ω^2，并把它表示成 $\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ 对 k 求和的形式。

延伸阅读

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem***（American Mathematical Society）。讲述那次悬赏以及庞加莱发现混沌的故事。
- **Richard Montgomery, "A new solution to the three-body problem"**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001)。由 8 字形轨道的其中一位发现者亲自讲解；可于网上免费阅读。
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters***（Princeton University Press）。一部关于三体问题与混沌的通俗历史。

完整的引导式解答见第 10.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/three-stars.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com