10.7 球壳内的引力

工作纸

题目

STEP III 1999，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q9

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> ? **想一想**　考虑圆环上两小段位于同一直径两端的部分。画出它们对质点（particle）所施的力。哪些分量（component）互相抵销，哪些相加？

阶段 1　圆环

涵盖：圆环

> ? **想一想**　圆环上每一小段与质点（particle）的距离都相同，而它与质点的连线跟轴（axis）所成的角亦相同。一小段圆环的引力沿轴方向的分量（component）是多少？把它们全部加起来。

阶段 2 把球壳切成圆环

涵盖：球壳

想一想 把质点放在轴上，与球心相距 b。按球心处的角 ϕ 把球壳（shell）切成一个个薄圆环。圆环的半径、它沿轴与质点的距离，以及它的质量分别是多少？

阶段 3 合适的变量

涵盖：球壳

停一停，试一试 分母含有 $a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$。把它记作 s^2：s 是甚么？把积分变量（variable of integration）由 ϕ 换成 s。积分的上下限（limits）是甚么？

阶段 4　结果为零

涵盖：球壳

? **想一想**　计算对 s 的积分，然后化简。

背后的数学

牛顿的圆锥论证

牛顿本人的证明（《自然哲学的数学原理》（*Principia*）第一卷命题 70）完全没有用到积分。以质点为顶点，画一个狭窄的对顶圆锥，它在球壳上截出两小块曲面（图 10.7.1）。这两小块的面积与它们到质点的距离的平方 r_1^2 和 r_2^2 成正比（两小块与圆锥所成的角相等，因为一条弦在两端与圆所成的角相等）。所以它们的质量与 r_1^2 和 r_2^2 成正比，而它们的引力与质量除以距离平方成正比，因此大小相等、方向相反。每一个通过质点的对顶圆锥都互相抵销，所以合力为零。这种抵销之所以成立，正是因为平方反比定律（inverse-square law）：若换成距离的任何其他次方，球壳便会对质点产生推力或拉力。

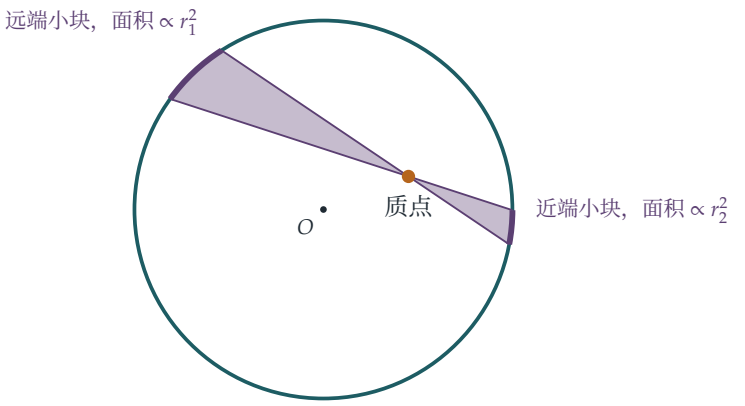

图 10.7.1 牛顿的论证。由质点出发的一个细窄对顶圆锥在球壳上截出两小块。远端的一块较大，面积之比等于距离平方之比，但它的引力也恰好按同一比例减弱。两个引力互相抵销，其余每一对亦然：在球壳之内，引力消失。

塌缩的云团

STEP III 1987 Q14 把这个定理反过来用。在均匀球体之外，位于球面的质点所受的引力为 GMm/r^2，就如全部质量都集中在球心一样。现在取一团静止的均匀球状尘埃云，半径为 R，质量为 M，让它在自身引力下塌缩。球面上的质点只感受到它以内的质量，而在所有物质向内坠落的过程中，这质量一直是 M，所以它向内的速率 $v = -\dot{r}$ 满足

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = 2GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\Big).$$

代入 $r = R\cos^2\alpha$（其中一道练习），可得到达半径 r 所需的时间为 $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\big(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\big)$。当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，整团云塌缩成一点，所需时间就是*自由落体时间*（*free-fall time*）

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

其中 ρ 是密度。值得注意的是，云团的每一层球壳都在同一刻到达中心，因为这个时间只取决于密度（图 10.7.2）。对于一团典型的星际云，每立方米约有 10^{-17} kg，t_{ff} 约为 700 000 年：这决定了恒星形成的时间尺度。

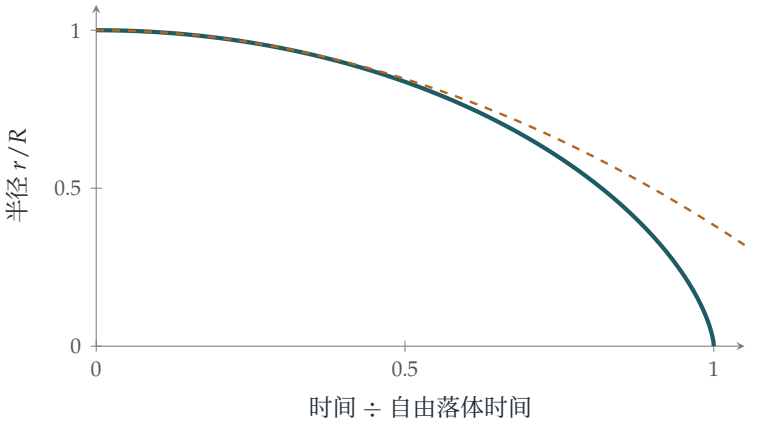

图 10.7.2　塌缩中的均匀尘埃云的半径随时间的变化（青绿色曲线）。它起初很慢，就像一块刚放手的石头（琥珀色虚线抛物线是恒定加速度的近似 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$），其后急剧加速，并在 $t = t_{\text{ff}}$ 时降至零。这条曲线是半条摆线（cycloid）。

牛顿的延迟与高斯定律

牛顿早在 1660 年代已掌握平方反比定律，但到 1687 年才发表他的引力理论。据一些历史学家所说，其中一个原因是他在证明球壳定理之前，无法说明为何可以把地球当作点质量（point mass）；一旦证明了，《自然哲学的数学原理》的其余部分便水到渠成。今天，这个定理只是*高斯定律*（*Gauss's law*）的一个简短推论。高斯定律指出，穿过任何闭合曲面向外流出的引力场总量，与曲面内的质量成正比。在球壳内取一个同心的球面。它没有包围任何质量，所以穿过它的总流量为零。单凭这一点并不足以令场为零（均匀场穿过任何闭合曲面的总流量都是零，从一边流入，从另一边流出），但这里对称性帮了忙：场必定笔直指向球心或背离球心，而且在球面上各处强度相同，所以总流量为零就意味着场为零。同一条定律也支配电场，这就是为甚么带电金属壳内没有电场，也是为甚么汽车能保护你免受雷击。

延伸练习

1 **球壳之外。**完成“暂停思考”方框中的问题：证明在球壳之外，所受的力为 $\frac{GM}{b^2}$。由此推断，质量为 M 的均匀实心球对球外质点的引力，就如其质量集中在球心一样。

2 **塌缩时间。**试做 STEP III 1987, 第 14 题（step.maths.org/questions/87-s3-q14）。这道题求一团尘埃云在自身引力下塌缩需要多少时间；用三角代换（trigonometric substitution）便可算出积分。

3 **穿越地球的隧道。**证明在均匀实心球之内，与球心相距 b 处所受的力为 $\frac{GMb}{a^3}$，与 b 成正比。由此推断，把一个球投进一条穿过地球中心的隧道，它会来回振荡，周期（period）为 $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$，约 84 分钟，与一颗贴着地面飞行的卫星的周期相同。

4 **另一种力的定律。**假如引力遵从立方反比定律，球壳内所受的力是否仍然为零？（重做第 3 阶段，以 $\frac{1}{s^3}$ 取代 $\frac{1}{s^2}$。）

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），关于万有引力的章节，当中包括球壳定理。
- **Subrahmanyan Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader***（Oxford University Press）。由一位诺贝尔奖得主讲解牛顿的证明，包括命题 70 和 71。
- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box***（Riverhead）。讲述引力、塌缩和模拟如何解释宇宙的结构。

完整的引导式解答见第 10.7 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/shell-theorem.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com