10.6 二体化为一体

工作纸

题目

STEP III 2004，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/04-s3-q11

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　写出每个质点的牛顿第二定律（Newton's second law）。每个力朝哪个方向作用？

阶段 1　两质点的间距

涵盖：关于 z 的方程

> **想一想**　分别对 P 和 Q 写出牛顿第二定律（Newton's second law），并留意每个力的方向。然后把两式相减，得出一条只含 z 的方程。

阶段 2 间距的能量方程

涵盖：求解 z

想一想 写成 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$，分离变量（separate variables）后积分。在 $t = 0$ 时，z 和 $\dot{z}$ 分别是多少?

阶段 3 出奇地简单的解

涵盖：求解 z

停一停，试一试 答案与 z^2 有关，所以设 $w = z^2$。先以 w 表示 $\dot{w}^2$，然后求导。$\ddot{w}$ 是甚么？利用 w 和 $\dot{w}$ 的初始值（initial values）。

阶段 4　质心

涵盖：求 x_1 和 x_2

> **想一想**　把两条运动方程（equations of motion）相加，使各力互相抵消。由此可知 $2x_1 + x_2$ 有甚么性质？再结合 $x_2 - x_1 = z$。

背后的数学

为甚么 z^2 是二次式

对任何形如 $\ddot{z} = k/z^3$ 的力律，同样的计算都给出 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 常数，因为 $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$ 正是守恒的能量。所以 z^2 必定是 t 的二次式。为甚么？

隐藏的原因是这样的。设想一个质点在平面上自由运动，即沿直线以恒定速率前进。它与原点的距离 r 满足 $r^2 =$（一个二次式，变量为t），因为 $r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$。而在极坐标（polar coordinates）中，它的径向运动方程是 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$；由于角动量（angular momentum）$h = r^2\dot{\theta}$ 是常数，方程变成

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

立方反比的排斥力，正正就是隐藏的角向运动所产生的离心（centrifugal）效应。在我们的问题中，$z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ 是某一点与原点距离的平方，该点以速率 2 沿一条直线运动，而这条直线与原点的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。一维上互相排斥的两个质点，就是二维自由运动的影子。

二体问题

只要两个物体之间的力仅取决于它们的间距，并沿两者的连线作用，本题的方法便适用，一维如是，三维亦如是。质心作匀速运动，而间距向量 $\mathbf{r}$ 服从 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$，其中 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$。对引力而言，这就是开普勒问题（Kepler problem），由牛顿在《自然哲学的数学原理》（*Principia*）中解决：间距描出的轨迹是椭圆、抛物线或双曲线。地球和太阳都绕着它们的共同质心运

行，而这个质心位于太阳内部；地球和月球则绕着距离地心约 4700 km 的一点运行，这一点在地球内部，但离地心颇远，所以地球每月都会摆动一次。天文学家正是靠侦测恒星的这种摆动，来寻找环绕其他恒星的行星。

可积系统

1969 年，Francesco Calogero 研究直线上多个质点以平方反比势（即立方反比力）互相排斥的情况，发现无论质点数目多少，这个系统竟然都可以精确求解。Jürgen Moser 在 1975 年解释了个中原因，他用上一个矩阵，其特征值（eigenvalues）在矩阵随时间演化时保持不变：这就是 Section 7.7 的 *Lax 对*（Lax pairs）。*Calogero–Moser 系统*如今是*可积系统*（integrable system）的核心例子，所谓可积系统，就是守恒量多得足以完全求解的系统；它把力学与随机矩阵、量子场论及孤立子理论联系起来。

延伸练习

1 **绳上的两个质量。**试做 STEP III 2023，第 9 题（载于 OCR 提供下载的 2023 年试卷，www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip）。题目考察以绳相连的两个质点，并利用质心把运动分离。留意其中一个质点何时向后移动。

2 **吸引力。**把力改为吸引力 $\frac{2}{z^3}$，重做本题。证明 z^2 仍然是 t 的二次式，并求两个质点何时相撞。

3 **隐藏的平面。**就题目中的运动，求出平面上与原点距离为 $z(t)$ 的那条直线运动轨迹，以及扫过的角 $\theta(t)$。验证 $z^2\dot{\theta}$ 是常数，且 $(z^2\dot{\theta})^2 = 3$。

4 **开普勒第三定律。**两颗质量分别为 m_1 和 m_2 的恒星相距 a，在引力作用下绕它们的质心作圆周运动。证明周期 T 满足 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$。

延伸阅读

- **John Taylor, *Classical Mechanics***（University Science Books），第 8 章。二体问题、约化质量与轨道。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 10 章，论有心力。
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments***（Springer）。给有志挑战的读者：精确可解系统的世界。

完整的引导式解答见第 10.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/two-body.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com