10.5 有限时间内的无限次反弹

工作纸

题目

STEP III 2002，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s3-q11

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　当一个质点（particle）以恢复系数 e 撞向一面光滑的墙时，速度沿墙方向的分量会怎样？垂直于墙的分量又会怎样？

阶段 1　离开时的角度

涵盖：求 e 及 v_1/u_1

想一想　设质点（particle）离开 M_1 时与墙 OA 所成的角为 φ。把三角形 OM_1N_1 的内角加起来，以 θ 表示 φ。

停一停，试一试　在光滑（smooth）的墙上，速度沿墙方向的分量（component）保持不变，而垂直于墙的分量则乘以 e。利用这两点，配合角 θ 和 φ，求出 e 及 v_1/u_1。

阶段 2　规律重复出现

涵盖：在有限时间内到达 O

想一想　在 N_1 处，质点以甚么角度撞上墙 OB？与在 M_1 发生的情况比较一下。其后每一次反弹又会怎样？

阶段 3　两个比

涵盖：在有限时间内到达 O

停一停，试一试　在三角形 OM_1N_1 中运用正弦定理（sine rule），求出路径每一段比前一段缩短的倍数。每次反弹后，速率（speed）都按 v_1/u_1 的比例下降。那么每一段所需的时间按甚么倍数改变？

阶段 4 **等比级数**

涵盖：在有限时间内到达 O

想一想 总时间是一个等比级数（geometric series）。它的公比（ratio）在甚么情况下介乎 0 与 1 之间？利用 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$。

背后的数学

当 $\theta \geq 60^\circ$ 时

当 $\theta = 60^\circ$ 时，这个比恰好等于 1：每一段所需的时间都相同，质点虽然愈来愈接近 O，却永远到不了。（速率和每段的长度都按同一个因子缩小。）当 $\theta > 60^\circ$ 时，每一段所需的时间愈来愈长。在所有情况下，质点都会趋近 O，并反弹无穷多次；只有当 $\theta < 60^\circ$ 时，它才会在有限时间内到达。$e = \tan 30^\circ / \tan 60^\circ = \frac{1}{3}$ 这个值就是分界线。

弹跳的球与非弹性坍缩

同一现象最简单的例子：一个球掉落到地板上，反弹至高度 e^2H，然后是 e^4H，如此类推。两次弹跳之间的时间与每次弹跳时的速率成正比，而速率按因子 e 缩小，所以总时间是一个等比级数：设 $T_0 = \sqrt{2H/g}$ 为第一次下落的时间，则球在

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

之后停止弹跳。无穷多次弹跳，然后静止。1992 年，Sean McNamara 和 William Young 证明了，在模拟排成一直线的多个非弹性质点时，同样的事情也会发生：其中一组质点可以在有限时间内发生无穷多次碰撞，这就是“非弹性坍缩”。沙和颗粒流的模拟必须加入特别的规则来避免这种情况，而这个现象也有助解释为何颗粒气体会自发地聚集成团。

芝诺与收敛

芝诺的悖论约于公元前 450 年提出，困扰了哲学家两千年。数学上的解答，即无穷和可以有有限的值，要到十九世纪才变得严谨，当时柯西（Cauchy）、魏尔斯特拉斯（Weierstrass）等人以极限（limit）来定义收敛（这是第 2 章的主题）。这道题目令人惊讶之处，在于这个过程在物理上是无穷的：确确实实有无穷多次碰撞，发生在有限时间之内。研究多边形内的桌球运动和碰撞质点运动的数学家，把这种行为称为*芝诺现象*（Zeno phenomenon）；要证明由互相碰撞的硬球组成的系统在所有时刻都有明确定义的运动，这正是其中一个微妙之处。

延伸练习

1 **总距离。**证明对于 30° 与 90° 之间的每一个 θ，由 M_1 到 O 所走的总距离都是有限的，并以 OM_1 和 θ 表示这个总距离。

2 **其他楔形。**把 30° 换成角 α 的楔形，重做这道题目。证明 $\varphi = \theta - \alpha$，并求出质点在有限时间内到达 O 时 θ 须满足的条件。

3 **弹性墙。**若 $e = 1$，质点有可能到达 O 吗？（提示：把楔形沿它的墙反复反射，使路径变成一条直线。围绕 O 可以放下多少个 30° 的楔形？）

4 **弹跳的球。**一个球从 1 m 的高度掉下，$e = 0.8$。它会弹跳多久？它总共走了多远？（取 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$。）

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。书中有多道关于弹跳的球和无穷多次连续碰撞的题目。
- **Sean McNamara & William Young, "Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium"**（一维颗粒介质中的非弹性坍缩与聚团），*Physics of Fluids A* 4 (1992)。
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards***（American Mathematical Society；可在网上免费阅读）。讲述桌球的数学，包括练习中用到的展开技巧。

完整的引导式解答见第 10.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/zeno-wedge.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com