10.4 一个分子与一个活塞

工作纸

题目

STEP I 2002，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/02-s1-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　一个以速率 w 运动的球，撞上一堵以速率 u 迎面移来的墙，并作弹性（elastic）反弹。反弹后球的速率是多少？（试在墙的参考系中思考。）

阶段 1　n 次反弹后的速率

涵盖：速率

> **想一想**　试在活塞（piston）的参考系（frame）中考虑一次碰撞（collision）。碰撞前后，粒子相对于活塞的速率（speed）是多少？回到地面参考系后又是多少？粒子从固定端反弹时，速率会改变吗？

阶段 2 长度的递归关系

涵盖：距离

停一停，试一试 第 n 次与第 $(n+1)$ 次碰撞之间相隔时间 t_n，其间活塞移动了多远？粒子又走了多远？把两者都用 d_n 和 d_{n+1} 表示，再将两式相除以消去 t_n。

阶段 3 裂项相消

涵盖：d_n 的公式

想一想 反复运用递归关系（recurrence），把 d_n 写成 d_1 乘以一连串分数的积。哪些项会互相抵消（telescoping）？

阶段 4　$v = u$ 的情况

涵盖：$v = u$ 的情况

> **想一想**　把 $v = u$ 代入你求得的 d_n 公式，然后利用 $ut_n = d_n - d_{n+1}$，并分解成部分分式（partial fractions）。

背后的数学

一个绝热不变量

把速率乘以长度：

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v + u}{v + (2n-1)u}\, d_1 \approx (v + u) d_1$$

这在 n 很大时成立，在 u 远小于 v 时亦然。所以

$$\text{速率} \times \text{长度} \approx \text{常数}.$$

如果活塞相对于分子移动得很慢，那么无论活塞移动多远，乘积 vd 都几乎不变。像这样在系统缓慢改变时几乎保持不变的量，称为*绝热不变量*。一般而言，往复运动的绝热不变量是 $\oint p\,\mathrm{d}q$，即动量（momentum）沿一个周期的积分；在这里它就是 $mv \times 2d$。

从一个分子到一团气体

由于 $v \propto 1/d$，动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 与 $1/d^2$ 成正比。对于由许多沿同一方向运动的分子组成的气体，温度与平均动能成正比，所以 $T \propto 1/d^2$：长度减半，温度便变成四倍。在三维空间中，能量由三个运动方向分担，而同样的论证（费曼（Feynman）在他的 *Lectures* 中给出了这个论证）可推出单原子气体（monatomic gas）的绝热压缩定律，

$$TV^{2/3} = \text{常数}, \qquad \text{或等价地} \qquad pV^{5/3} = \text{常数}.$$

指数 $\frac{5}{3}$ 就是单原子气体著名的比热比（ratio of specific heats）γ。把单车气泵内的空气压缩至原来体积的五分之一，如果做得够快而且没有热量散失，其绝对温度会升高至原

来的 $5^{0.4} \approx 1.9$ 倍（空气分子有两个原子，因而 $\gamma = 1.4$）：由 20°C 升至约 280°C。气泵之所以没有那么热，只是因为压缩得慢，热量又会散走。

费米的宇宙射线

1949 年，恩里科·费米（Enrico Fermi）提出，宇宙射线（cosmic rays）这些从太空而来、能量极高的粒子，其加速方式与本题的分子如出一辙：它们在星际气体云中运动的磁场上反复反弹，每次获得一点能量。现时认为，“费米加速”（Fermi acceleration）在超新星残骸的激波处发生，粒子在那里来回穿越激波，就像分子在活塞与墙壁之间往返一样。绝热不变量在量子力学的诞生中也扮演过一个角色：保罗·埃伦费斯特（Paul Ehrenfest）在 1916 年指出，被量子化的量必定是绝热不变量，因为缓慢的改变不可能令系统在量子态之间跃迁。

延伸练习

1 **不变量的精确形式。**证明 $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，并由此推出当 $n \to \infty$ 时 $v_n d_n \to (v+u)d_1$。

2 **把活塞拉出。**设活塞改为以速率 $u < v$ 向外抽出，把题目重做一次。证明质点会减速，并求 $v_n d_n$。（气体膨胀时会冷却。）

3 **能量。**在 $v = u$ 的情况下，随着活塞逼近末端，分子的速率会无止境地增长。求第 n 个周期内活塞所受的平均力（动量的改变除以 t_n），并证明它按 n^3 的速度增长。这说明了把活塞一直推到尽头所需的功有甚么特点？

4 **弹跳的球。**一个球在重力作用下于地板上作弹性弹跳，而地板被缓慢地升高。试猜出这个运动的一个绝热不变量。（提示：与 vd 相对应的量是平均速率乘以弹跳的高度，或等价地，能量乘以两次弹跳之间的时间。）

延伸阅读

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I**（《费曼物理学讲义》第一卷，可在网上免费阅读），第 39 章“The kinetic theory of gases”（气体动力论）。同一个活塞论证，并推广至三维。
- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics***（Oxford University Press）。大学一年级程度的绝热过程与气体动力论。
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics***（Butterworth-Heinemann），§49。对绝热不变量的精简论述，留待日后阅读。

完整的引导式解答见第 10.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/piston.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com