10.3 火箭与枪炮

工作纸

题目

STEP III 2017，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/17-s3-q11

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有*停一停，试一试*的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　某一门炮发射之前，货车以 V 行驶。发射之后，抛射体的速度是 $V - v$（即以速率 $v - V$ 向后运动）。抛射体*相对于发射前的货车*的速度是多少？

阶段 1　一次过发射

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　一切由静止开始，所以总动量（momentum）为 0。由于 $V = 0$，每个抛射体（projectile）离开时的速度都是 $-v$。写出动量的式子以求 u，然后把各个动能（kinetic energy）加起来。

阶段 2 逐个发射

涵盖：第 (ii) 部分

停一停，试一试 在第 r 次发射之前的一刻，货车上载有多少个抛射体？那么正在运动的质量是多少，其速率又是多少？发射之后，刚射出的抛射体的速率是多少？写出动量守恒（conservation of momentum）的式子，再整理而得 $(*)$。

想一想 把由 $(*)$ 得出的增量 $u_r - u_{r-1}$ 加起来。将每一项与 $\frac{mv}{M}$ 比较。

阶段 3　能量的帐单

涵盖：第 (iii) 部分

想一想　写出 $K_r - K_{r-1}$：只有货车连同车上的负载，以及刚射出的那个抛射体，速率才有改变。

停一停，试一试　把含 $u_r^2 - u_{r-1}^2$ 的一项按平方差（difference of two squares）分解因式，并利用 $(*)$ 代换 $(M + (n-r)m)(u_r - u_{r-1})$。然后对 r 求和：各增量会裂项相消（telescope）。

背后的数学

应该让甚么保持不变？

真正的炮或火箭引擎，是以相对于*自身*的固定速率抛出抛射体的，而这个速率是在抛射体刚离开之后量度的。本题的参照对象却是货车在发射*之前*的速率。对一枚细小的抛射体来说，两者相差极微；但当 n 枚抛射体同时发射时，差别就很大：在第 (i) 部分，一大批沉重的抛射体以速率 v 被向后抛出，仿佛货车完全没有后座（recoil）一样，这需要大量能量。

假如改为每枚抛射体都以相对于发射*之后*的货车的速率 v 离开，结论就会逆转。同时发

射得 $u = \frac{nmv}{M+nm}$；逐一发射得 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$，后者较大，因为每一项都至少是 $\frac{mv}{M+nm}$。这时逐一发射胜出：每枚抛射体都是从一辆已在运动的货车上蹬出去的，而且越后发射的炮，要加速的质量越少。（请在练习中验证这一点。）

火箭方程

现在让抛射体变得极小而数目极多，并保持总质量 $\mu = nm$ 不变：这就是一枚连续燃烧燃料的火箭。u_n 的和变成一个积分（两种约定给出相同的极限）：

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M+km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,\mathrm{d}s}{M+s} = v \ln \frac{M+\mu}{M}.$$

这就是*齐奥尔科夫斯基火箭方程*：若火箭喷出的废气以相对于火箭的速率 v 离开，火箭所增加的速率为

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{初}}{m_{末}}.$$

图 10.3.1 比较了这三个答案。麻烦就出在对数（logarithm）上：若排气速率约为 4.5 km/s（优良的化学燃料），要达到约 7.8 km/s 的轨道速率，质量比必须是 $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$；一旦把空气阻力和重力计算在内，这个比值更接近 10 或以上。火箭几乎全是燃料。

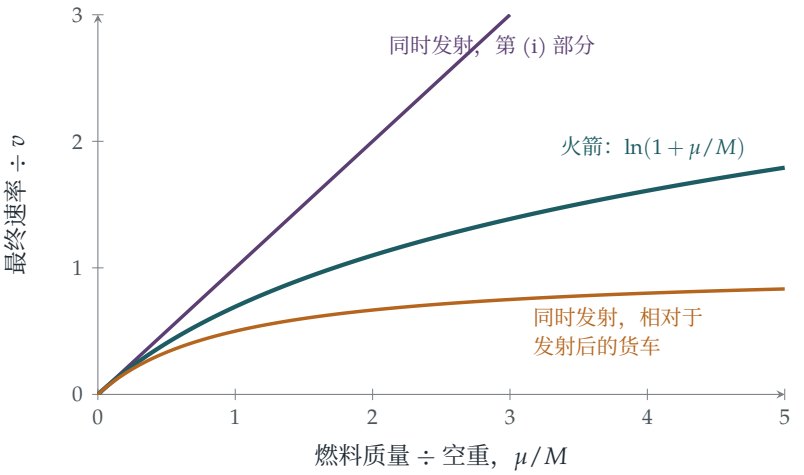

图 10.3.1 最终速率与燃料质量对空重之比的关系。按题目的约定，全部同时发射得 μ/M（紫红色）；但若排气速率是相对于后座中的货车量度，则只得 $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$（琥珀色）。连续发射的火箭介乎两者之间，为 $\ln(1+\mu/M)$（蓝绿色）。这幅图所表达的就是不等式 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$。

为甚么火箭要分级

对数也解释了分级（staging）的道理。火箭若在升空途中抛掉用完的燃料箱，就不必再加速这些无用的质量。各级所得的速率增量是*相加*的（就像那些炮一样），而每一级的增

量则取决于该级质量的比，所以把火箭分成多级，就能达到总质量相同的单级火箭无法达到的速率。把太空人送上月球的土星五号（Saturn V）有三级；它的第一级在不足三分钟内烧掉约 2000 公吨燃料。

齐奥尔科夫斯基

康斯坦丁.齐奥尔科夫斯基（Konstantin Tsiolkovsky）是俄罗斯外省小城卡卢加（Kaluga）一位失聪的教师，他在 1903 年一篇题为“利用反作用装置探索外太空”的论文中发表了火箭方程。多级火箭、液态氢和液态氧燃料，以及太空站，他都一一推算过，比这些东西真正造得出来早了数十年。这条方程其实更早就在一些较不起眼的地方出现过（William Moore 在 1810 年已推导出其中一个版本），但齐奥尔科夫斯基是第一个看出它对太空飞行意味着甚么的人。他写道：“地球是人类的摇篮，但人不能永远活在摇篮里。”

延伸练习

1 **另一种约定。**假设每枚抛射体都以相对于发射之后的货车的速率 v 离开，重做第 (i) 和第 (ii) 部分。证明这时逐一发射所得的最终速率较大。

2 **尘埃云中的彗星。**试做 STEP III 2009，第 11 题（step.maths.org/questions/09-s3-q11）。它和火箭一样是变质量（variable mass）问题，但彗星的质量是增加而不是减少。留意它的速率趋向甚么值。

3 **两级火箭。**一枚火箭的排气速率为 v，空重为 M，燃料质量为 $9M$。求它的最终速率。现在把它分成两级，每级的空重为 $\frac{1}{2}M$，燃料为 $4.5M$，第一级在燃料用尽后抛掉。比较两个最终速率。

4 **不等式。**在 $[0, x]$ 上把 $\frac{1}{1+s}$ 分别与 1 和 $\frac{1}{1+x}$ 比较，从而证明当 $x \geq 0$ 时，$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$。

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 4 章。动量、变质量和火箭方程。
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements***（Wiley）。工程学上的标准教科书；读完本节后，开首几章已可读懂。
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight***（NASA 译本，可在网上免费阅读）。一位先驱的亲身记述。

完整的引导式解答见第 10.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/rockets.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com