10.2 叠球效应

工作纸

题目

STEP II 2010，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/10-s2-q10

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　根据 Section 10.1：若质量为 M、以速率 u 运动的物体与质量为 m 的静止物体发生弹性碰撞（elastic collision），碰撞后 m 的速率是多少？

阶段 1 速率上限

涵盖：第 (i) 部分

想一想 运用动量守恒（conservation of momentum）和弹性碰撞（elastic collision）（或运动中的物体撞向静止物体的结果），求出 A 的速率，并以 b 和 u 表示。

停一停，试一试 把 $\frac{2b}{b+1}$ 写成 2 减去某个正数。当 $b \to \infty$ 时会怎样?

阶段 2　沿着一串粒子传下去

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　每个粒子的质量都是下一个粒子的 λ 倍。因此每次碰撞都相当于第 (i) 部分取 $b = \lambda$ 的情况。每碰撞一次，速率会乘以甚么倍数？

停一停，试一试　经过 n 次碰撞后，速率是 u 乘以该倍数的 n 次方。这个倍数与 1 相比，在 $\lambda > 1$ 时是较大还是较小？

阶段 3 **快二十倍**

涵盖：$\lambda = 4$ 的情况

> **想一想** 取 $\lambda = 4$ 时，你需要 $1.6^n > 20$。取以 10 为底的对数（logarithm），并写成 $1.6 = 16/10$ 及 $20 = 2 \times 10$。

背后的数学

篮球与网球

设两个球从高度 H 一起落下，到达地面时的速率为 $U = \sqrt{2gH}$。假设一切碰撞都是完全弹性的，而且篮球比网球重得多。篮球从地面反弹，以速率 U 向上运动，随即遇上仍以速率 U 向下运动的网球。在篮球的参考系（frame）中，网球以 $2U$ 的速率迎面而来，撞上一个非常重的物体后反弹，再以 $2U$ 的速率离开。回到地面参考系，那就是以 $2U + U = 3U$ 的速率向上运动（图 10.2.1）。由于上升高度与抛射速率的平方成正比，网球会升到 $9H$ 的高度。

现实中的球并不是完全弹性的。若恢复系数（coefficient of restitution）为 e，质量比为 M/m，网球离开时的速率就是 $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$。练习中的 STEP I 2014 Q10，就是由量度所得的高度反推质量比。

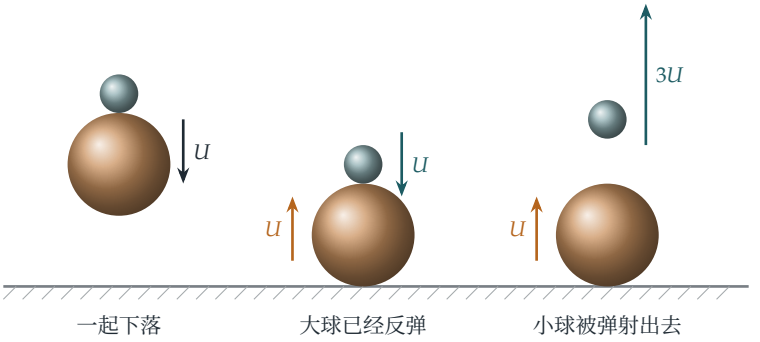

图 10.2.1　叠球效应：两个球都是完全弹性的，而且下面的球重得多。大球以速率 U 向上反弹，遇上以速率 U 落下的小球。相对于大球，小球以 $2U$ 的速率到达，又以 $2U$ 的速率离开，所以在地面参考系中它以 $3U$ 的速率离开，升到原来高度的九倍。

引力弹弓

太空探测器飞掠行星时并没有碰到行星，但引力的作用就像与一个非常重的物体发生一次非常柔和的弹性碰撞。在行星的参考系中，探测器绕过行星，离开时的速率与到达时相同。如果行星正以速率 V 朝探测器运动，那么在太阳的参考系中，探测器的速率最多可以增加 $2V$，与网球的情况完全一样。1977 年发射的两艘航行者号（*Voyager*）探测器，利用了外行星一次罕见的排列，从木星飞往土星（航行者 2 号（*Voyager* 2）更继续飞往天王星和海王星），每次与行星相遇都获得加速。假如没有这些引力助推（gravity assist），前往海王星的旅程就要花上大约三十年，而不是十二年。能量来自行星，而行星因此减慢的幅度小得无法量度。

弹力球与超新星

1968 年，W. R. Mellen 在 *American Journal of Physics* 上描述了一种“弹力球反弹抛射体”（superball rebound projectile）：把几个由大至小的球叠起来，最顶的球可以用撞击速率的许多倍弹射出去。天体物理学家指出，这与核心塌缩超新星（core-collapse supernova）有一点粗略的相似之处：恒星向内坠落的外层物质撞上坚硬而致密的核心后反弹，冲击波（shock wave）把动量（momentum）向外带进密度愈来愈低的物质，把这些物质加速到极高的速率。叠球效应的示范常用来向学生解释这个想法，不过真实的超新星所涉及的物理比弹跳的球多得多，中微子（neutrino）就是其中之一。

延伸练习

1 **真实的情况。**试做 STEP I 2014，第 10 题（step.maths.org/questions/14-s1-q10）：这是带有真实数据、反弹并不完美的叠球问题。

2 **非弹性的链。**试做 STEP I 2017，第 10 题（step.maths.org/questions/17-s1-q10）。这一题让碰撞沿着一串质量按几何级数增长的粒子传递下去。在甚么情况下，每个粒子都恰好参与两次碰撞?

3 **三个球。**把三个完全弹性的球叠起来，每个球都比它下面的球轻得多。证明最顶的球以 $7U$ 的速率离开，并升到 $49H$ 的高度。若有 k 个球，证明最顶的球以 $(2^k - 1)U$ 的速率离开。

4 **能量从何而来?** 在第 (ii) 部分，证明即使 A 的速率无界，总动能（kinetic energy）仍然守恒。那些重的粒子会怎样?

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章，当中包括叠球问题。
- **W. R. Mellen，“Superball rebound projectiles”**, *American Journal of Physics* 36 (1968)。篇幅短小，读来有趣。
- **Gary Flandro，“Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter”**, *Astronautica Acta* 12 (1966)。这篇论文提出了航行者号的“行星大巡游”（grand tour）。

完整的引导式解答见第 10.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/stacked-balls.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com