10.1 牛顿摆

工作纸

题目

STEP II 1990，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/90-s2-q14

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　一粒质量为 m 的弹珠以速率 u 运动，撞上一粒质量为 M 的静止弹珠，而动能（kinetic energy）守恒。碰撞后两者的速度是多少？若 $M = m$ 又如何？

阶段 1 只有最后两颗移动

涵盖：第 (i) 部分

想一想 假设碰撞之后只有 A_n 和 A_{n+1} 移动。写出动量守恒（conservation of momentum）和动能（kinetic energy）守恒的方程。它们正是质量为 m 和 λm 的两个物体发生一次碰撞（collision）时的方程。

停一停，试一试 解出 A_n 的速度。若 $\lambda > 1$，A_n 会向哪个方向移动？紧贴在它后面的是甚么？

阶段 2　三颗弹珠

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　现在只有 A_{n-1}、A_n、A_{n+1} 移动，速度分别为 a、b、c。在 A_{n-1} 后面静止不动的是哪一颗弹珠？既然没有弹珠可以越过它前面的那一颗，0、a、b、c 之间有甚么不等式（inequality）关系？

停一停，试一试　把动量方程两边平方，再减去能量方程。当 $\lambda > 1$ 时，每一项的正负号是甚么？由此必然得出甚么结论？

阶段 3 两颗可以移动的弹珠

涵盖：第 (iii) 部分

> **想一想** 第 (ii) 部分的论证排除了所有移动的弹珠都向前走的结果。因此必定有某颗弹珠向后移动。哪一颗弹珠后面甚么也没有？试试只让那颗弹珠和 A_{n+1} 移动。

背后的数学

为甚么只有一个球飞出

在由相等的球组成的牛顿摆中，假设有 k 个球以速率 w 一起离开。由动量得 $kw = u$，由能量得 $kw^2 = u^2$。两式相除，得 $w = u$ 及 $k = 1$。所以在离开的球一起运动的各种结果之中，只有“一个球以原来的速率离开”同时符合两条定律。两个球以一半速率离开，动量正确，但能量只有一半；一个球以两倍速率离开，则只有当它是半个球时动量才正确。

但问题并未就此解决。若有 n 个球，就有 n 个未知的速度，而守恒定律只有两条，所以同时符合两者的结果有无穷多个（试找出一个三个球以不同速率运动的结果）。实际出现哪一个，取决于各球在接触期间如何变形。1980 年代初，Frank Herrmann 和他的同事证明，我们熟悉的现象有赖于冲击沿着队列传递时*不会扩散开去*，而坚硬的钢球之间留有极小空隙时正是如此。若用软球，或者把球紧紧压在一起，牛顿摆的表现就没有那么干净利落；仔细的量度更显示，其他的球总会稍为移动。

守恒定律与对称

守恒定律从何而来？1918 年，诺特（Emmy Noether）证明了一条定理，它是现代物理学的基石之一：物理系统的每一种连续对称（continuous symmetry），都对应一个守恒量（conserved quantity）。如果物理定律在这里与在左边一米处相同（空间平移对称），动量就守恒。如果物理定律今天与明天相同（时间平移对称），能量就守恒。如果物理定律在每个方向都相同（旋转对称），角动量（angular momentum）就守恒。你会在大学二年级

的拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）课程中学到诺特定理（Noether's theorem）；本章自始至终都在运用它的推论。

惠更斯、雷恩与沃利斯

1668 年，英国皇家学会（Royal Society）征求物体碰撞问题的解答。沃利斯（John Wallis）处理了非弹性碰撞（inelastic collisions），而雷恩（Christopher Wren）和惠更斯（Christiaan Huygens）则各自独立地解决了弹性（elastic）的情况。惠更斯的关键洞见是转换参考系（frame）：在一艘随质心（centre of mass）运动的船上观察碰撞，这时两个相等的球只是以相反方向、原来的速率弹回，然后再变换回岸上的观点。他还注意到某一个量，即各质量乘以速率平方之和，在碰撞前后相同；不过要再过一个世纪，动能本身才被确认为一个守恒量。

延伸练习

1 **同一个问题再现。**试做 STEP I 2006，第 11 题（step.maths.org/questions/06-s1-q11）：槽中有一列粒子，末端是较重的一粒。哪些最终状态是可能的？

2 **追踪各次碰撞。**把第 (iii) 部分的撞击看成一连串独立的两粒弹珠碰撞，由 A_0 撞上 A_1 开始。逐步追踪这一连串碰撞，并证明最后得到的正是第 (iii) 部分所求得的运动。

3 **两个球撞入。**在一个由五个相等的球组成的牛顿摆中，两个球同时释放，以速率 u 撞上其余三个。证明“两个球以速率 u 离开”与两条守恒定律并无矛盾，并找出另一个同样符合的结果。

4 **末端较轻。**若 $\lambda < 1$，追踪一连串的两粒弹珠碰撞。除了 A_n 和 A_{n+1} 之外，最后还有其他弹珠在运动吗？

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。动量守恒与能量守恒，附有大量关于碰撞的习题。
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle, "Simple explanation of a well-known collision experiment"**，*American Journal of Physics* 49 (1981)。解释牛顿摆为何行得通。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。深入浅出地讲述对称与守恒之间的联系。

完整的引导式解答见第 10.1 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/newtons-cradle.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com