1.8 计数有理数

工作纸

题目

STEP III 2020，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2020 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　在证明任何东西之前，先计算最初十五项左右。你留意到比值 u_n / u_{n+1} 有甚么特别之处？

阶段 1 奇数位胜过偶数位

涵盖：第 (i) 部分

想一想 若 $(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$，试以 a 和 b 表示 (u_{2k}, u_{2k+1}) 和 (u_{2k+1}, u_{2k+2})。

想一想 当 $n \geq 2$ 时，数对 (u_n, u_{n+1}) 是由位置 $k = \lfloor n/2 \rfloor$ 的数对得出的。把 $n = 2k$ 和 $n = 2k + 1$ 两种情况分开处理。

停一停，试一试 在每种情况中，数对的其中一项都是 $u_k + u_{k+1}$。为甚么它比另一项大？利用每一项都是正数这个事实。

阶段 2　相邻两项互质

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　若 d 整除 u_{2k} 和 u_{2k+1}，它还必定整除甚么？对 u_{2k+1} 和 u_{2k+2} 作同样的考虑。

停一停，试一试　因此，一个数对的公因数（common factor）也是较早出现的某个数对的公因数。取第一个具有大于 1 的公因数的数对，从而找出矛盾（contradiction）。

阶段 3 没有数对出现两次

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 取最早重复出现的数对 (a,b)。它可以是 $(1,1)$ 吗?

停一停，试一试 根据第 (i) 部分，比较 a 与 b 的大小，便知道该位置是奇数还是偶数。利用这一点，把两个相同的数对同时往回推一步，得到一个更早重复出现的数对。

阶段 4　每个互质数对都会出现

涵盖：第 (iv) 部分

想一想　为甚么 $a - b$ 和 b 互质（co-prime）？它们的任何公因数还会整除甚么？

停一停，试一试　假如在数列（sequence）中某处 $a - b$ 之后紧接着 b，那么其后会出现哪个数对？至于 $a < b$ 的情况，把两者的角色对调即可。

阶段 5 列出所有分数

涵盖：第 (v) 部分

想一想 每个正有理数（positive rational）都可以写成 p/q，其中 p 和 q 互质。你需要证明 (p, q) 会以相邻数对的形式出现。

停一停，试一试 假设某个互质数对从不出现，并从中选取两数之和最小的一个。第 (iv) 部分会给出矛盾。然后由第 (ii) 和第 (iii) 部分可知，f 不会两次取同一个值。

背后的数学

Calkin–Wilf 树

把正分数排成一棵树：把 $\frac{1}{1}$ 放在顶端，并给每个分数 $\frac{a}{b}$ 两个子节点，左边是 $\frac{a}{a+b}$，右边是 $\frac{a+b}{b}$。逐行由左至右读这棵树，得到的正是本题的列表 $f(1), f(2), f(3), \ldots$（图 1.8.1）。阶段 3 说明每个分数都有唯一的父节点，阶段 4 说明每个分数都在树中。2003 年，Moshe

Newman 发现连这棵树也不需要：列表中每个分数都可以由前一个分数算出，公式是

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor x_n \rfloor - x_n + 1}.$$

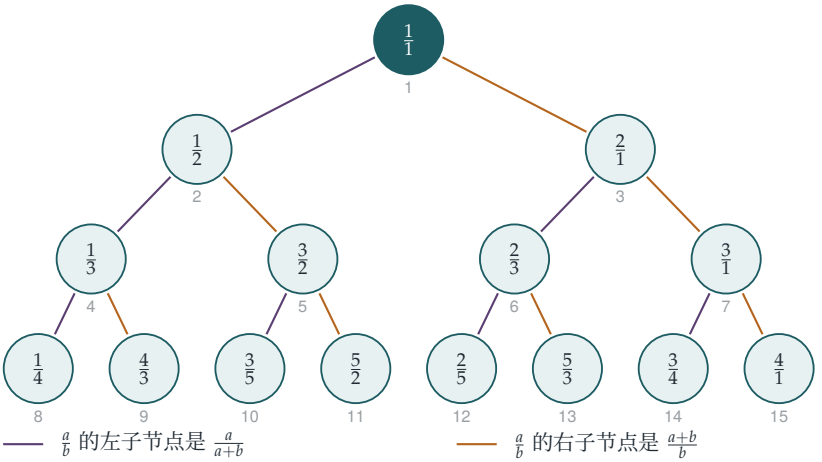

图 1.8.1　Calkin–Wilf 树的首四行。逐行由左至右读，便得到 $f(1), f(2), f(3), \ldots$；灰色小数字是位置 n。每个正分数都以最简分数的形式恰好出现一次。

不同大小的无穷

可以这样逐一列出的集合称为*可数*（countable）集合。分数是可数的，这令人意外，因为分数看来比整数多得多。在大学的第一个学期，你还会遇到康托尔的*对角论证法*（diagonal argument），它证明*实数*（real numbers）是不可数的：任何实数列表都必定有所遗漏。所以无穷确实有不同的大小，而实数所构成的无穷严格地大于有理数所构成的无穷。这是你在大学一年级课程中会遇到的最令人震惊的结果之一。

Stern 数列

数列 u_n 称为 *Stern 双原子数列*（Stern's diatomic sequence），它还有许多其他面貌。例如，u_{n+1} 等于把 n 写成 2 的幂之和、而每个幂最多用两次的方法数目。它与 *Stern–Brocot 树*以及连分数（continued fractions）关系密切，而连分数能给出无理数的最佳有理逼近。

延伸练习

1 **找出分数。**对哪一个 n 有 $f(n) = \frac{3}{5}$？又 $f(n) = \frac{5}{3}$ 呢？利用父节点的规则倒推回 $\frac{1}{1}$。

2 **Newman 公式。**验证由 $x_1 = 1$ 开始，Newman 公式能给出列表中的首十个分数。

3 **康托尔的对角论证法。**假设你有一个列表，以小数形式列出了 0 与 1 之间的所有实数。构造一个小数，使它与列表中第 n 个数在第 n 位数字上不同。为甚么这就说明列表并不完整？（对于像 $0.0999\ldots = 0.1$ 这样的小数，需要留意甚么？）

4 **可数并集。** 较难 给出一个与正整数之间的明确双射，从而证明由全体正整数数对 (m, n) 组成的集合是可数的。（试试 $2^{m-1}(2n-1)$。）

延伸阅读

- **Neil Calkin & Herbert Wilf, "Recounting the rationals"**（*American Mathematical Monthly*, 2000 年；〈重新数算有理数〉）。全文四页，完全读得懂。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***（《数学天书中的证明》），第 17 章 "Sets, functions, and the continuum hypothesis"（集合、函数与连续统假设），当中包括 Calkin–Wilf 树。
- **Ian Stewart & David Tall, *The Foundations of Mathematics***（《数学基础》，Oxford University Press）。可数性、康托尔与实数，内容与大学一年级课程相若。

完整的引导式解答见第 1.8 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/counting-rationals.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com