1.6 两个平方数之和

工作纸

题目

STEP II 2023，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停，试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　若 $z = a + \mathrm{i}b$，其中 a 和 b 为整数，那么 $|z|^2$ 是甚么？

阶段 1　模相乘

涵盖：第 (i) 部分

停一停，试一试　把 zw 乘开，写出 $|zw|^2$，然后展开。所得的式子能否因式分解（factorise）？

阶段 2 加以运用

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 把 5 和 221 各自写成两个平方数之和。哪些复数（complex number）满足 $|z|^2 = 5$ 和 $|w|^2 = 221$?

停一停，试一试 由第 (i) 部分，$|zw|^2 = 5 \times 221$。把 zw 乘开：它的实部（real part）和虚部（imaginary part）就是 h 和 k。要找第二个答案，可试试把其中一个因子换成它的共轭（conjugate）。

阶段 3　先作因式分解

涵盖：第 (iii) 及 (iv) 部分

想一想　8045 的末位数字是 5。把它因式分解。

停一停，试一试　另一个因子刚好比某个完全平方数（perfect square）大一点。大多少？这个差是否平方数？然后像第 (ii) 部分那样相乘。

停一停，试一试　第 (iv) 部分：36 本身已是平方数。哪个复数的模（modulus）的平方是 36？乘以这个复数会有甚么效果？

阶段 4 三种写法

涵盖：第 (v) 部分

想一想 与第 (iii) 部分一样，那个大数很接近某个完全平方数。先把它写成两个平方数之和。

停一停，试一试 25 可以用多于一种方式写成 $|\alpha|^2$：5 是其中一个。有多少个高斯整数（Gaussian integer）满足 $|\alpha|^2 = 25$？当中哪些会给出真正不同的数对？

阶段 5　相除

涵盖：第 (vi) 部分

想一想　把 1002037 和 109 各自写成两个平方数之和；同样地，先找一个邻近的完全平方数。

停一停，试一试　第 (ii) 至 (v) 部分做的都是乘法。这一部分则把想法倒过来用：把一个高斯整数除以另一个。如果除不尽，试试改用共轭。

背后的数学

费马二平方和定理

哪些质数是两个平方数之和？$2 = 1^2 + 1^2$、5、13、17、29、37、41 是；3、7、11、19、23、31 则不是。规律是：除 2 以外，一个质数是两个平方数之和，当且仅当它除以 4 的余数为 1。费马（Fermat）于 1640 年提出这个结果；欧拉（Euler）于 1749 年给出证明。用高斯整数的语言来说：质数 $p \equiv 1 \pmod 4$ 会分裂（split）成 $p = (a + bi)(a - bi)$，而质数 $p \equiv 3 \pmod 4$ 则仍然是质数。例如 $5 = (2 + i)(2 - i)$，但 3 完全无法分解。

1990 年，Don Zagier 发表了二平方和定理的一个证明，它以全长只有一句而闻名。这

个证明连同解说收录于 *Proofs from THE BOOK*。

一个拥有自己质数的新数系

高斯（Gauss）发现，高斯整数的表现与普通整数极为相似。它们有除法算法（division algorithm）和欧几里得算法（Euclidean algorithm），而且每个高斯整数都可以唯一地分解成高斯质数（Gaussian prime）的乘积（不计乘以 ± 1 或 $\pm i$ 的差别）。结合 $(\star)$，你只需知道一个数的质因数分解，就能准确数出它有多少种方法写成两个平方数之和。

在大学里，这是通往*代数数论*（algebraic number theory）的大门：研究 $\mathbb{Z}[i]$ 或 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 这类数系，借此了解普通的整数。Section 1.7 说明了为甚么需要创立这门学科：并非每个这样的数系都像高斯整数那样规矩。

四个平方数及其他

每个正整数都是*四*个平方数之和（拉格朗日（Lagrange），1770 年）。证明依赖 $(\star)$ 的四平方版本，它源自哈密顿（Hamilton）的*四元数*（quaternion），情形就如 $(\star)$ 源自复数一样。你会在 Section 7.8 见到它。

延伸练习

1 **一个障碍。**证明没有任何形如 $4k+3$ 的数是两个平方数之和。（平方数模 4 是甚么?）

2 **两种写法。**把 65 和 85 各自用两种不同的方法写成两个平方数之和，并用高斯整数解释你的答案。

3 **四种写法。**$1105 = 5 \times 13 \times 17$。找出四种不同的方法，把 1105 写成两个正平方数之和。为甚么是四种?

4 **高斯质数。**较难 证明若 $3 = (a+bi)(c+di)$，其中 a, b, c, d 为整数，则其中一个因数的模为 1。（取模的平方。）这说明 3 是高斯质数。

延伸阅读

- **John Stillwell, *Elements of Number Theory***（Springer）。循序渐进讲到高斯整数及更深入的内容，并附历史背景。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 4 章，“Representing numbers as sums of two squares”（把数表示为两个平方数之和）。

- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***，有关平方和与高斯整数的各章。

完整的引导式解答见第 1.6 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/two-squares.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com