1.5 无穷递降法

工作纸

题目

STEP III 2022，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

想一想　在第 (i) 部分，看看 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$。三项之中有两项明显是偶数。这告诉你第三项有甚么性质？

阶段 1 第一次递降

涵盖：第 (i) 部分

想一想 设 $a = 2p$ 并化简。新方程的形式与原来相同，只是各系数换了位置。对 b 重复这个步骤，然后再对 c 做一次。

停一停，试一试 你现在得到一组解 (p, q, r)，满足 $|p| < |a|$。为甚么这就表示方程根本没有解？试考虑 $|a|$ 尽可能小的一组解。

阶段 2　换一个质数

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　这里除以 2 是行不通的。哪一个质数（prime）能整除三个系数中的两个？

停一停，试一试　证明 3 整除 b，然后整除 c，再整除 a，并逐步代入。你得回的方程是否与原来的完全相同？

阶段 3 模 3 的平方数

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 第一个结果：把一个不是 3 的倍数的数写成 $3n \pm 1$，然后取平方。平方数除以 3 时，余数（remainder）可以是甚么？

想一想 然后列出 $a^2 + b^2$ 所有可能的余数。它在甚么情况下是 3 的倍数？

停一停，试一试 利用这一点证明 3 整除 a 和 b，继而整除 c。然后仿照第 (i) 部分的方法论证。

阶段 4　变化：方程变了

涵盖：第 (iv) 部分

想一想　考虑除以 4 的余数。偶数的平方和奇数的平方，余数分别可以是甚么？

想一想　如果 a、b 和 c 全是偶数，把它们各自减半。新方程与旧方程相同吗？

停一停，试一试　系数改变了，所以要证明一个更强的结论：对任何 $k \geq 2$，$a^2 + b^2 + c^2 = 2^k abc$ 都没有解。减半之后，方程是否仍在这个方程族之内？

背后的数学

费马、递降法与他的最后定理

费马用无穷递降法证明了 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有正整数解。在他著名的“最后定理”之中，这是他唯一留下证明的情况，它解决了 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n = 4$ 时的情形。欧拉（Euler）其后用递降法处理 $n = 3$ 的情形，当中有一个漏洞，后来才被补上。递降法至今仍是现代理论的起点：关于 Section 1.9 中那类曲线的莫德尔–韦伊定理（Mordell–Weil theorem），其证明就是一个精密的递降。

局部障碍

本节的每一个证明，都是靠考察模某个数的余数来完成的。如果一条方程对某个 n 而言模 n 无解，或者没有实数解，它当然没有整数解。这类理由称为*局部障碍*（local obstructions）；到了大学，你会遇到*p 进数*（p-adic numbers），那是一种同时研究模 $p, p^2, p^3, \ldots$ 所有余数的方法。

哈塞（Hasse）与闵可夫斯基（Minkowski）有一个精彩的定理：对于像 $a^2 + b^2 = 3c^2$ 这样的二次方程，局部障碍就是仅有的障碍——如果没有任何“局部”的理由令它无解，它就确实有有理数解。对三次方程而言，这个结论却彻底失效。Ernst Selmer 在 1951 年证明了

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$$

模任何整数都有解，在实数中也有解，但没有非零整数解。解释“局部到整体”原理何时失效、为何失效，是现代数论的一大主题。

一条确实有解的方程

第 (iv) 部分有一个著名的近亲：$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$，即*马尔可夫方程*（Markov equation）。它有无穷多个正整数解，由 $(1,1,1)$、$(1,1,2)$、$(1,2,5)$、$(1,5,13)$ 和 $(2,5,29)$ 开始，而这些解与无理数能被分数逼近到甚么程度有关。见练习 4。

延伸练习

1 **STEP I 热身题。**（*STEP I 2010 第 8 题*。）证明 $a^3 + 3b^3 = 9c^3$ 的唯一整数解是 $a = b = c = 0$。然后，藉考虑末位数字，证明 $p^4 + 2q^4 = 5r^4$ 也有同样的结论。

2 **只用模运算，毋须递降。**只用模 4 运算，证明 $x^2 + y^2 = 4z + 3$ 完全没有整数解。

3 **有理点。**利用第 (iii) 部分，证明圆 $x^2 + y^2 = 3$ 上没有坐标为有理数的点。（试与 $x^2 + y^2 = 2$ 对比，后者包含 $(1,1)$。）

4 **马尔可夫三元组。**证明若 (x,y,z) 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$，则 $(x,y,3xy-z)$ 亦满足。由 $(1,1,1)$ 出发，生成上文列出的三元组。（这个“跳跃”技巧正好与递降相反。）

延伸阅读

- **Harold Davenport, *The Higher Arithmetic***，第 2 及第 5 章。
- **Joseph Silverman, *A Friendly Introduction to Number Theory***（Pearson）。非常易读；包括费马对 $x^4 + y^4 = z^2$ 的递降证明。
- **Simon Singh, *Fermat's Last Theorem***（Fourth Estate）。为一般读者而写的故事，由费马的页边笔记讲到怀尔斯（Wiles）的证明。

完整的引导式解答见第 1.5 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/infinite-descent.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com