1.4 e 是无理数，e^2 也是

工作纸

本节会用到两道题目。第一道出自 1997 年，证明 e 是无理数（irrational number）。第二道出自 2024 年，把同一个想法用得更巧妙，证明 e^2 是无理数，而这原来确实困难得多。

热身题

STEP III 1997，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q7

主题目

STEP III 2024，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　假设 $e = p/q$。把 e 乘以 q 会得到整数。那么乘以 $q!$ 又会对 e 的级数的每一项有甚么影响？

阶段 1 热身：e 是无理数（irrational）

涵盖：热身题，STEP III 1997

想一想 b_n 是一个等比级数（geometric series）。它的首项（first term）和公比（common ratio）是甚么？由此可知它的和是多少？

停一停，试一试 把 a_n 和 b_n 逐项比较：a_n 中每个分母都是若干个因子的乘积，而这些因子全都不小于 $n+1$。哪一个级数较大？

想一想 把 e 的级数乘以 $n!$。直至 $1/n!$ 为止的各项合起来是一个整数；余下的各项组成哪一个级数？若 $e = p/q$，取哪一个 n 值便会得出矛盾（contradiction）？

阶段 2　为何 e^2 较难

涵盖：由热身题过渡到主题，STEP III 2024

想一想　试把热身题的方法用于 $e^2 = \sum \frac{2^r}{r!}$。为甚么尾项（tail）不再变小？若 $e^2 = \frac{p}{q}$，关于 qe 和 $\frac{p}{e}$ 你能说些甚么？

阶段 3 两条尾项

涵盖：主题，第 (i) 及 (ii) 部分

想一想 第 (i) 部分是把热身题的比较再做一次，只是以 $f(n)$ 代替 a_n。

想一想 $g(n)$ 各项的正负号交替出现。它们是否愈来愈小?

停一停，试一试 把各项两两分组，分法有两种：由第一项开始，以及由第二项开始。每种分组各给出其中一个不等式（inequality）。

阶段 4　再遇整数

涵盖：主题，第 (iii) 部分

想一想　写出 $e = \sum_{r \geq 0} \frac{1}{r!}$，然后乘以 $m!$，其中 $m = 2n$。哪些项会变成整数？

想一想　余下的各项，即 $r > m$ 的那些项，加起来是甚么？把它们与 $f(m)$ 的定义比较。

停一停，试一试　对 $\frac{1}{e} = \sum_{r \geq 0} \frac{(-1)^r}{r!}$ 作同样的处理。把尾项与 $g(m)$ 对应起来时，为甚么 $m = 2n$ 是偶数这一点至关重要？

阶段 5 矛盾

涵盖：主题，第 (iv) 及 (v) 部分

想一想 利用第 (iii) 部分，把 $f(2n)$ 和 $g(2n)$ 写成整数加上或减去 e 或 $\frac{1}{e}$ 的某个倍数。

停一停，试一试 把这些式子代入 $q\,f(2n) + p\,g(2n)$。$qe = \frac{p}{e}$ 在哪里派上用场?

想一想 假设 $e^2 = \frac{p}{q}$。那么第 (iv) 部分对每一个 n 都适用。

> **停一停，试一试** 第 (i) 及 (ii) 部分把 $q\,f(2n)+p\,g(2n)$ 夹在 0 与一个很小的数之间。n 要有多大，这个整数才会严格介乎 0 与 1 之间?

背后的数学

e 有多“无理”?

刘维尔（Joseph Liouville）在 1840 年证明了 e^2 是无理数，而且事实上它不满足任何整数系数的二次方程。1873 年，埃尔米特（Charles Hermite）走得远得多：他证明了 e 是*超越数*（transcendental number），意思是它不是任何整数系数多项式的根。他的证明正是上述论证的精密版本：构造一个整数，再证明它严格介乎 0 与 1 之间。九年后，林德曼（Ferdinand von Lindemann）改造了埃尔米特的方法，证明 π 是超越数，终于证实以尺规“化圆为方”这个古老问题是不可能做到的。

我们仍未知道的事

尽管这些方法威力强大，一些简单得令人尴尬的问题却仍未解决。$e+\pi$ 是无理数吗? $e\pi$ 呢?没有人知道,虽然两者之中至少有一个必定是超越数(练习 4)。$\zeta(3)=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$ 是无理数吗？是的：阿培里（Roger Apéry）在 1978 年证明了这一点，震惊了整个数学界。$\zeta(5)$ 呢？没有人知道。

逼近

这些证明背后有一个更深刻的想法：如果一个数能被分数逼近得太好，它就是无理数。e 的级数的部分和（partial sum）都是分数，而且很快就非常接近 e；一个分数不可能被其他分数逼近得那么好。这就是*丢番图逼近*（Diophantine approximation）的起点。它是数论的一个分支，你可以在 Section 2.9 进一步探索，那里会用另一族积分得出更好的分数，步步逼近 e。

延伸练习

1 **只用 $1/e$。**假设 $1/e = p/q$，并只利用 $1/e$ 的交错级数，证明 e 是无理数。

2 $\sin 1$ **是无理数。**利用 $\sin 1 = 1 - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{5!} - \cdots$ 证明 $\sin 1$ 是无理数。（乘以一个合适的奇数的阶乘。）

3 **为何 π 不行？**解释为何这个方法不能直接用于 π。然后查阅 Ivan Niven 在 1947 年发表、只有一页的 π 是无理数的证明，当中用的是积分而不是级数。能力强的高级程度（A-level）学生应可读懂。

4 **其中一个是超越数。**较难 证明 e 和 π 是 $x^2 - (e+\pi)x + e\pi = 0$ 的根。你可以假设：若一个多项式的系数都是代数数（algebraic number），则它的根本身也是代数数；以及 π 不是代数数（林德曼）。由此推出 $e+\pi$ 和 $e\pi$ 之中至少有一个是超越数。

延伸阅读

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 8 章“Some irrational numbers”（一些无理数）。正是用这些想法，证明 e、e^2、e^4 和 π^2 都是无理数。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。一本篇幅不长的经典，内容由 $\sqrt{2}$ 一直谈到超越性。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。一本浅白易读的无理数历史。

完整的引导式解答见第 1.4 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/e-irrational.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com