1.3 最小反例

工作纸

题目

STEP III 2015，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s3-q5

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　第 4 步说“定义 k 为 S 中最小的正整数”。我们凭甚么可以这样做？假如 S 是一个由正实数组成的集合，这样做还可以吗？

阶段 1　第 3 步：S 非空

涵盖：第 (i) 部分

> **想一想**　若 $\sqrt{2} = p/q$，哪一个正整数（positive integer）乘以 $\sqrt{2}$ 之后会得到整数？

阶段 2 第 5 步：更小的元素

涵盖：第 (i) 部分

想一想 关于 $n = (\sqrt{2}-1)k$，你需要两个事实：它是正整数，而且 $n\sqrt{2}$ 是整数。设 $k\sqrt{2} = m$，这是一个整数，然后把 n 和 $n\sqrt{2}$ 都用 k 和 m 表示出来。

阶段 3 第 6 步：矛盾

涵盖：第 (i) 部分

停一停，试一试 $\sqrt{2}-1$ 有多大？比较 $(\sqrt{2}-1)k$ 与 k，并回想 k 在第 4 步是怎样选取的。

阶段 4　立方根：把两个数联系起来

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　设 $a = 2^{1/3}$。若 a 是有理数（rational），a^2 是否也是有理数？若 a^2 是有理数，你能否把 a 用 a^2 和 $a^3 = 2$ 表示出来？

阶段 5 **改写论证**

涵盖：第 (ii) 部分

想一想 试照搬第 (i) 部分的做法，把 $\sqrt{2}-1$ 换成 $a-1$。照搬到哪一步就行不通？

停一停，试一试 改用一个记录更多资料的集合（set）：所有使 na 和 na^2 同时为整数的正整数 n。验证这个集合非空（non-empty），并验证只要 k 属于这个集合，$(a-1)k$ 也属于它。

背后的数学

一个画得出来的证明

第 (i) 部分背后有一幅优美的图，出自 Stanley Tennenbaum。若 $\sqrt{2}=a/b$，则 $a^2=2b^2$：一个边长为 a 的正方形，面积等于两个边长为 b 的正方形面积之和。如图 1.3.1 所示，把两个边长为 b 的正方形放在边长为 a 的正方形的两个对角。它们重叠之处是一个小正方形，另外还有两个小正方形没有被盖住。由于面积相等，重叠部分必定等于两个未被盖住的正方形之和，于是得到一对更小而具有同样性质的整数。整数对不可能无止境地愈

变愈小，所以这样的正方形并不存在。这对较小的整数正是 $(2b - a,\ a - b)$，也就是我们那一步 $(\sqrt{2} - 1)k$ 的化身。

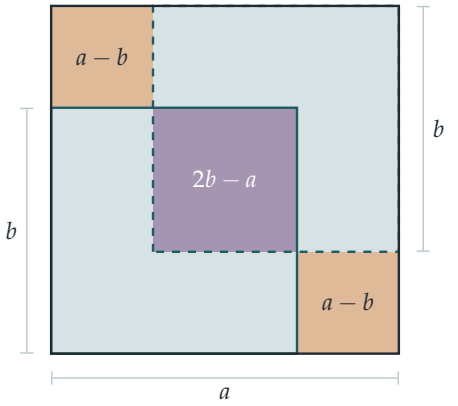

图 1.3.1　Tennenbaum 的证明。两个边长为 b 的正方形（蓝绿色）放在边长为 a 的正方形的两个对角。若 $a^2 = 2b^2$，则被计算了两次的面积（紫红色的重叠部分）必定等于没有计算到的面积（两个琥珀色的角落），所以 $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$：一个更小的解。

良序、归纳与递降

良序原理与归纳法原理在逻辑上等价：两者可以互相推导。到了大学，你会看到两者都被用作自然数的基础。在 Section 1.5 中，我们会以另一种形式运用同一个原理，那就是费马（Fermat）的*无穷递降法*（method of infinite descent）：不存在由正整数组成的无穷严格递减数列。

它能走多远?

这个论证可以证明，只要 N 不是完全平方数（perfect square），$\sqrt{N}$ 就是无理数（见练习）；更一般地，一个整数的 n 次方根要么是整数，要么是无理数。到了大学，这会变成一个关于*代数整数*（algebraic integers）的命题：若一个有理数满足某个整数系数的首一多项式（monic polynomial）方程，例如 $x^3 - 2 = 0$，它就必定是整数。你会在 Section 6.3 再次遇到这个想法。

相传毕达哥拉斯学派（Pythagoreans）因为希帕索斯（Hippasus）泄露了 $\sqrt{2}$ 是无理数而把他淹死，这个传说多半并不属实。属实的是，这个发现迫使希腊数学家把对数的研究与对长度的研究分开；这道裂痕要等到十九世纪，待戴德金（Dedekind）构造出实数，才得以弥合。

延伸练习

1 **其他平方根。**改造这个论证，证明 $\sqrt{3}$ 是无理数。哪一个数担当了 $\sqrt{2}-1$ 的角色?

2 **所有非平方数。**设 N 为一个不是完全平方数的正整数，并设 m 为满足 $m<\sqrt{N}<m+1$ 的整数。考虑 $(\sqrt{N}-m)k$，从而证明 $\sqrt{N}$ 是无理数。

3 **找出漏洞。**试把这个论证套用于 $\sqrt{4}$。究竟是哪一步行不通?

4 **Tennenbaum 的图。**利用图 1.3.1 证明：若 $a^2=2b^2$，则 $(2b-a)^2=2(a-b)^2$。再用代数方法验证这个恒等式。

延伸阅读

- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（Cambridge University Press）。一本全面的证明入门书，内容包括归纳法和良序原理。
- **R. P. Burn, *A Pathway into Number Theory***（Cambridge University Press）。全书由精心编排次序的问题组成，是修读大学一年级课程前的理想准备。
- **John Conway & Joseph Shipman, "Extreme proofs I: the irrationality of $\sqrt{2}$"**(*Mathematical Intelligencer*，2013)。同一个事实的多个证明，比较得妙趣横生。

完整的引导式解答见第 1.3 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/well-ordering.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com