1.2 质数分布得有多稀疏?

工作纸

题目

STEP III 2016，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/16-s3-q5

提示

请先自行尝试解题。如果遇到困难，请逐一阅读提示，每读完一个便回到题目再试。标有“停一停”或“试一试”的提示是关键步骤。每个提示之后均留有空位供你演算。

> **想一想**　第 (iv) 部分要求你对所有 $n \geq 2$ 证明一个命题。第 (iii) 部分则假设该命题对不超过 $2m$ 的每一个 k 都成立。这是哪一种归纳法（induction）？

阶段 1 二项式系数不会太大

涵盖：第 (i) 部分

想一想 2^{2m+1} 从何而来？在 $(1+x)^{2m+1}$ 的二项展开式（binomial expansion）中代入 $x=1$。

想一想 该和式的每一项都是正数。其中哪两项等于 $\binom{2m+1}{m}$?

停一停，试一试 $\binom{2m+1}{m}$ 的两倍不超过整个和，而你需要的是严格不等式（strict inequality）。还有没有尚未用到的项?

阶段 2　哪些质数整除这个二项式系数？

涵盖：第 (ii) 部分

想一想　用阶乘（factorial）写出 $\binom{2m+1}{m}$，然后乘开，消去所有分数。

想一想　取一个满足 $m+1 < p \le 2m+1$ 的质数（prime）p。p 能整除 $(2m+1)!$ 吗？它能整除 $m!\,(m+1)!$ 吗？后者的因子全都不超过 $m+1$。

停一停，试一试　因此每个这样的质数都整除 $\binom{2m+1}{m}$。为甚么它们的乘积也整除它？第 (i) 部分又如何完成这一部分的证明？

阶段 3 拆开乘积

涵盖：第 (iii) 部分

想一想 把不超过 $2m+1$ 的质数分成两组：不超过 $m+1$ 的，以及大于 $m+1$ 的。这样做对 $P_{1,2m+1}$ 有甚么影响?

停一停，试一试 对其中一个因子使用这一部分的假设（hypothesis），对另一个因子使用第 (ii) 部分的结果。把两个上界都写成 4 的幂。

阶段 4　所有 n

涵盖：第 (iv) 部分

想一想　对 n 使用强归纳法（strong induction）。第 (iii) 部分处理了哪些 n 的值？

停一停，试一试　至于其余的 n 值：大于 2 的偶数可以是质数吗？由此可知 $P_{1,n}$ 与 $P_{1,n-1}$ 相比有甚么关系？

背后的数学

从 4^n 到质数定理

对结果取对数：$\ln P_{1,n} < n \ln 4$，即

$$\sum_{p \le n} \ln p < (\ln 4)\, n \approx 1.39\, n.$$

在 1850 年代，切比雪夫（Pafnuty Chebyshev）证明了正是这一类的界（bound），而且上界和下界俱备，从而说明 $\sum_{p \le n} \ln p$ 的增长与 n 成正比。高斯（Gauss）在大约 15 岁时，已从数表中猜到不超过 n 的质数个数大约是 $n / \ln n$。这后来成为质数定理（Prime

Number Theorem），最终在 1896 年由阿达马（Jacques Hadamard）和德拉瓦莱普桑（Charles de la Vallée Poussin）运用复分析（complex analysis）证明。它的对数形式是

$$\sum_{p \le n} \ln p \sim n,$$

所以不超过 n 的质数之积大约是 e^n。我们的界 4^n 其实相差不远：图 1.2.1 把三者一并画出。

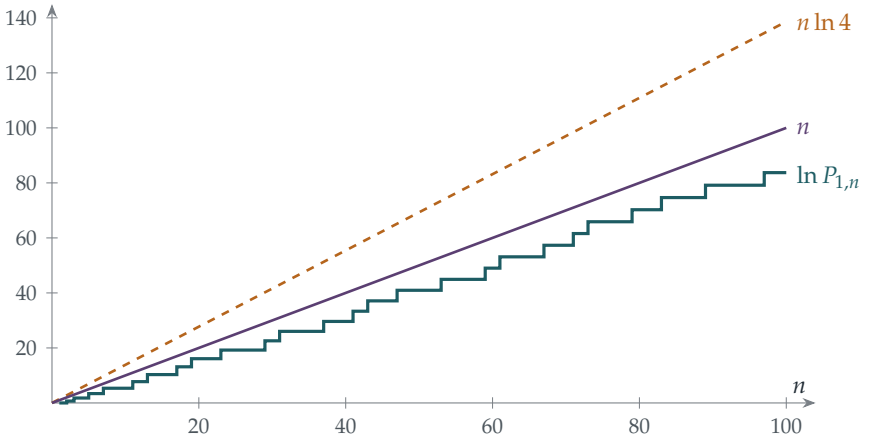

图 1.2.1 不超过 n 的所有质数之积的对数（蓝绿色），在每个质数 p 处跳升 $\ln p$。本节证明它始终低于 $n \ln 4$（琥珀色虚线）；质数定理则指出它的增长与 n 相若（紫红色）。

伯特兰公设

1845 年，伯特兰（Joseph Bertrand）猜想：对每一个 $n \ge 1$，在 n 与 $2n$ 之间总有一个质数。这就是伯特兰公设（Bertrand's postulate）。切比雪夫在 1852 年证明了它。八十年后，年仅 19 岁的艾狄胥找到了一个优美的初等证明。它的关键材料，就是本题的引理，再加上仔细考察哪些质数整除中间的二项式系数 $\binom{2n}{n}$。Martin Aigner 和 Günter Ziegler 把它选为 *Proofs from THE BOOK* 的第 2 章，该书汇集了数学中最优雅的证明。

接下来的方向

质数的精确分布，由黎曼 ζ 函数（Riemann zeta function）

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$

的零点（zero）所支配。你会在 Section 2.4 中遇见这个函数朴素得多的一面，那里有 $\zeta(2) = \pi^2/6$。黎曼猜想（Riemann Hypothesis）预测了这些零点的确切位置；它若成立，

便能把质数定理中的误差限定得紧无可紧。它也许是数学中最著名的未解难题，也是千禧年大奖难题（Millennium Prize Problems）之一。

延伸练习

1 **感受一下数字。**对 $n = 10, 20, 30$ 计算 $P_{1,n}$，并把它与 4^n 及 e^n 比较。（这里可以使用计算机。）

2 **中间的二项式系数。**证明 $\binom{2m}{m}$ 是 $(1+1)^{2m}$ 展开式的 $2m+1$ 项中最大的一项，并由此推出 $\binom{2m}{m} \geq \dfrac{4^m}{2m+1}$。

3 **质数不会太多。**设 $\pi(n)$ 为不超过 n 的质数个数。介乎 $\sqrt{n}$ 与 n 之间的每个质数都大于 $\sqrt{n}$，而它们的积至多为 $P_{1,n} < 4^n$。由此推出

$$\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) < \frac{2\ln 4}{\ln n}\, n,$$

从而得出 $\pi(n) < 2.8\, n/\ln n + \sqrt{n}$。把这个结果与质数定理的 $\pi(n) \approx n/\ln n$ 比较。

4 **验证伯特兰公设。**对 $n = 1, 2, \ldots, 50$ 验证伯特兰公设，即在每个情况下找出一个介乎 n 与 $2n$ 之间的质数。你能否利用一张简短的质数表有效率地完成，使表中每个质数都小于前一个的两倍？

延伸阅读

- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 2 章“Bertrand's postulate”（伯特兰公设）。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。一部讲述质数定理与黎曼猜想历史的普及读物。
- **G. J. O. Jameson, *The Prime Number Theorem***（Cambridge University Press）。严谨而平易近人，为大学本科生而写；开首几章只需要高级程度（A-level）的微积分。

完整的引导式解答见第 1.2 节：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/prime-distribution.html

每星期一道 STEP 题目，完整讲解：The STEP Up，以电子邮件免费发送，订阅网址：keithmcnulty.substack.com