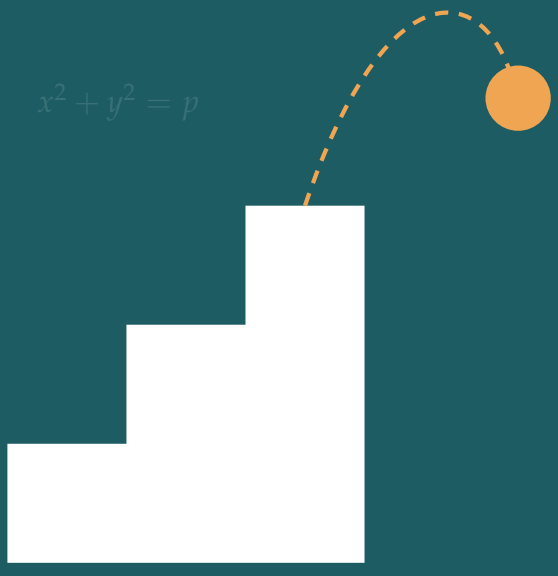
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

STEP II 及 III

2025 年详细解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

STEP II 及 III

2025 年详细解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

2025 年详细解答

2025 年 STEP 试卷（STEP II 及 III）全部 24 题的详细解答。自样本试卷以来每一道 STEP 题目的详细解答、*Beyond STEP* 全书以及各章的单行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

阅读解答之前，请先认真尝试解题。每个答案均已用数值方法核对，但解答数量如此之多，难免会有疏漏：如果发现有可疑之处，请相信自己的演算，并仔细检查。

由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目录

STEP II

第 1 题 分段函数 纯数学 . . . 3

第 2 题 含模的复数方程 纯数学 . . . 8

第 3 题 幂的比较 纯数学 . . . 13

第 4 题 不取整函数恒等式 纯数学 . . . 17

第 5 题 代换积分法 纯数学 . . . 21

第 6 题 与抛物线相切的圆 纯数学 . . . 25

第 7 题 非线性微分方程 纯数学 . . . 30

第 8 题 整数的平衡分拆 纯数学 . . . 34

第 9 题 碰撞与抛体 力学 . . . 38

第 10 题 细杆的静力学 力学 . . . 43

第 11 题 期望值与二项式求和 概率与统计 . . . 47

第 12 题 泊松分布 概率与统计 . . . 51

STEP III

第 1 题 Beta 函数积分 纯数学 . . . 56

第 2 题 迭代函数与周期性 纯数学 . . . 60

第 3 题 平均值不等式 纯数学 . . . 65

第 4 题 曲线的变换 纯数学 . . . 69

第 5 题 三维向量 纯数学 . . . 75

第 6 题 根的对称函数 纯数学 . . . 79

第 7 题 反正切函数 纯数学 . . . 83

第 8 题 以复数求三角函数之和 纯数学 . . . 88

第 9 题 质心 力学 . . . 92

第 10 题 移动木板上的摩擦力 力学 . . . 97

第 11 章 最大值的分布 概率与统计 101
第 12 章 回归随机变量 概率与统计 105

详细解答

STEP II 2025，第 1 题

纯数学 · 分段函数

STEP II 2025，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

由 Min 构成的函数，其实只是一个在不同区间上由不同公式给出的普通函数。因此每次的第一步，都是找出两个自变量在哪里相交，把函数写成分段函数（piecewise function），然后逐个区间处理，只保留落在其所属区间内的答案。在接驳处，函数保持连续（continuous），但通常会出现一个角点（corner）；正是这个角点，令 (iv) 中的那一点成为极大点，而导数（derivative）却不等于零。

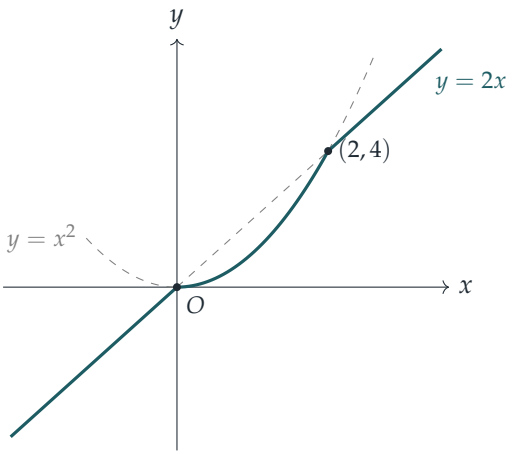
解答

第 (i) 部分

我们有 $x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$。因此

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ 或 } x > 2. \end{cases}$$

图像沿直线 $y = 2x$ 走，只是在 $x = 0$ 与 $x = 2$ 之间会下沉到抛物线（parabola）上，因为抛物线在该处位于其弦（chord）之下。两段直线部分都在同一条直线上。图像在 $(0,0)$ 有一个角点，那里抛物线的斜率（gradient）为 0，而直线的斜率为 2；在 $(2,4)$ 亦有一个角点，那里两者的斜率分别为 4 和 2。



第 (ii) 部分

利用 (i) 中的两段。

- 当 $0 \le x \le 2$：$2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$，所以 $x = 1$ 或 $x = \frac{3}{2}$。两者都在 $[0,2]$ 内，所以两个都成立。
- 当 $x < 0$ 或 $x > 2$：$4x = 5x - 3 \iff x = 3$，它满足 $x > 2$，所以成立。

解为 $x = 1$、$x = \frac{3}{2}$ 和 $x = 3$。

第 (iii) 部分

我们还需要第二个函数：$x^3 \le 4x \iff x(x-2)(x+2) \le 0 \iff x \le -2$ 或 $0 \le x \le 2$。把两者合起来，

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \le -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 2x$ 给出 $x = 0$，不在该区间内。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 2x$ 给出 $x = 0$，两个区间都不包含它。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$ 给出 $x = 0$ 或 $x = 1$（舍去 $x = -2$）。

所以当 $m = 2$ 时，解为 $x = 0$ 和 $x = 1$。

? 想一想 方程 $6x = 6x$ 会怎样?

它对每一个 x 都成立，所以当 $m = 6$ 时，整个区间都是解，而不只是孤立的点。

$m = 6$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$，只有 $x = -2$ 在该区间内。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 6x$ 恒成立，所以这些区间内的每一个 x 都是解。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$ 给出 $x = 0$ 或 $x = 2$（舍去 $x = -3$）。

综合起来，当 $m = 6$ 时，解集为

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{或} \quad x \ge 2.$$

第 (iv) 部分

这里 $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$（因子 x^2 永不为负，而 $x = 0$ 时取等号）。因此

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

两条公式在 $x = 1$ 时都给出 $y = -3$，所以曲线在该处连续，并通过 $(1, -3)$。

点 $(1, -3)$。 它不是驻点（stationary point）：在 $x = 1$ 处，左方的斜率是 $6x^2 - 5 = 1$，右方的斜率是 $4x - 5 = -1$。更准确地说，

- 当 $\sqrt{5/6} < x < 1$ 时，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$，所以 y 递增至 -3；
- 当 $1 < x < \frac{5}{4}$ 时，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$，所以 y 由 -3 递减。

所以在 $x = 1$ 两侧附近的所有点都有 $y < -3$, 故 $(1, -3)$ 是局部极大点 (local maximum)，也是曲线的一个角点。

其他转向点。 在 $x < 1$ 上，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 = 0$ 给出 $x = \pm\sqrt{5/6} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$，两者都小于 1。利用 $2x^2 = \frac{5}{3}$,

$$y = x(2x^2 - 5) = -\tfrac{10}{3}x = \mp\tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{30}}{6} = \mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

由于 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x$，$x < 0$ 的那一点是极大点，$x > 0$ 的那一点是极小点。在 $x > 1$ 上，$4x - 5 = 0$ 给出 $x = \frac{5}{4}$，此时 $y = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} = -\frac{25}{8}$；由于抛物线开口向上，这是极小点。

所以其余三个转向点（turning point）为

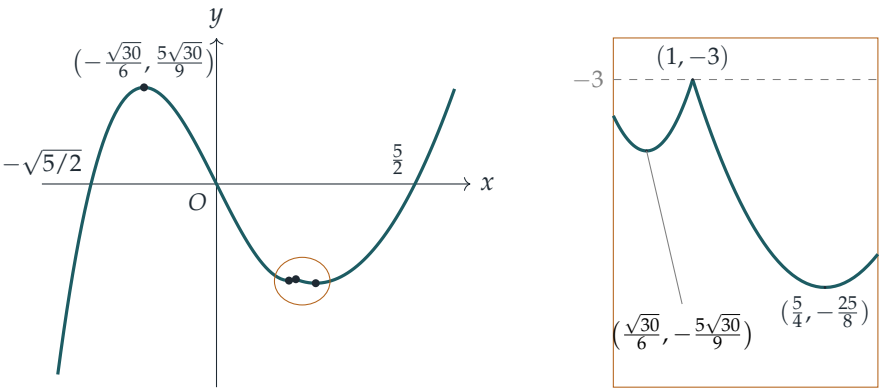
$$\text{极大点}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right),\qquad \text{极小点}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{ 和 }\left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

草图。 三次函数 $2x^3-5x$ 是奇函数（odd function），所以曲线在 $-1\le x\le 1$ 的部分关于原点旋转对称。曲线与坐标轴相交于：$x(2x^2-5)=0$ 且 $x\le 1$ 之处，即 $x=0$ 和 $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$；以及 $x(2x-5)=0$ 且 $x>1$ 之处，即 $x=\frac{5}{2}$。当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$；当 $x\to\infty$ 时，$y\to\infty$。

$x=1$ 附近的三个点非常接近，所以值得确定它们的上下次序。把正数 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$ 和 $\frac{25}{8}$ 平方，得 $\frac{750}{81}\approx 9.26$ 和 $\frac{625}{64}\approx 9.77$，所以

$$-\tfrac{25}{8}<-\tfrac{5\sqrt{30}}{9}<-3:$$

$x=\frac{5}{4}$ 处的极小点较低，而两个极小点都在角点之下。在合理的比例下，这个细节是看不见的，所以插图把它放大了。



验算

- (ii)：在 $x=\frac{3}{2}$，$\mathrm{Min}(\frac{9}{4},3)=\frac{9}{4}$，而 $2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}=5\cdot\frac{3}{2}-3$；在 $x=3$，$\mathrm{Min}(9,6)=6$，而 $12=15-3$。
- (iii)，$m=6$：试 $x=-1$，此时 $\mathrm{Min}(1,-2)+\mathrm{Min}(-1,-4)=-2-4=-6=6x$；而不在解集内的 $x=1$ 给出 $1+1=2\neq 6$。
- (iv)：用电脑在 $[-3,3]$ 上以 10^{-5} 的步长扫描 y，恰好找到四个转向点，分别在 $x\approx -0.9129$（$y\approx 3.0429$）、0.9129（-3.0429）、1（-3）和 1.25（-3.125），与上面的数值吻合。

常见错误

- 保留了落在其公式适用区间以外的根，例如 (iii) 中 $m = 2$ 时的 $x = -2$。
- 把 $6x = 6x$ 当作只会给出单一数值来解，而没有意识到它在整个区间上都成立。
- 在 (iv) 中把曲线在 $(1, -3)$ 处画得圆滑：曲线在该处确实有一个角点，左方斜率为 1，右方斜率为 -1。

STEP 之外

像 $\text{Min}(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big)$ 这样的函数，只要 f 和 g 连续，它就必定连续，但不一定可微（differentiable）；而 (iv) 说明局部极大点不一定是驻点。在数学分析（analysis）课程中，这引出了一个需要小心陈述的结果：可微函数的极值出现在导数为零之处；同时也引出了单侧导数（one-sided derivatives）的概念。这类分段定义的函数在最优化（optimisation）中亦十分重要：若干个线性函数的最小值会产生角点，而这些角点正是线性规划（linear programming）所研究的对象。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）在讲解连续性和可微性时，正是以这类例子为出发点。

详细解答

STEP II 2025，第 2 题

纯数学 · 含模的复数方程

> **STEP II 2025，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

设 $z = x + \mathrm{i}y$，然后把方程拆成实部（real part）和虚部（imaginary part）。模（modulus）必定是实数，所以它对虚部毫无贡献；而 z^2（或 z^3）的虚部随即可以因式分解。这个因式分解告诉我们，根必定落在阿根图（Argand diagram）中的哪几条直线上；在每条直线上，问题就化为一个单变量的实方程。

解答

第 (i) 部分

(a) 设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 为实数。于是 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$，而 $|z + b|$ 是实数，a 亦然。比较 $z^2 + |z + b| = a$ 两边的虚部，得

$$2xy = 0,$$

所以 $x = 0$（此时 z 为纯虚数（purely imaginary））或 $y = 0$（此时 z 为纯实数）。这正是所要证明的。

(b) 假设 $z = \mathrm{i}y$，其中 y 为实数。那么 $z^2 = -y^2$，且 $|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$，因此需要

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

两边皆为正数，所以这等价于平方后的方程

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

对任何实数 y，左边至少为 6，所以无解：方程没有纯虚根。

(c) 假设 $z = x$ 为实数，则需要 $x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$。我们按 $x + \frac{7}{2}$ 的正负号分情况讨论。

- 若 $x \geq -\frac{7}{2}$：$x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 + x + 1 = 0$，其判别式（discriminant）为 $1 - 4 = -3 < 0$。没有实数解。
- 若 $x < -\frac{7}{2}$：$x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$。根 3 和 -2 都不满足条件 $x < -\frac{7}{2}$，所以两者都不是解。

因此方程没有纯实根。

> **想一想** 为甚么解出 $x^2 - x - 6 = 0$ 就停下来是不够的?

每种情况只在其各自的 x 范围内描述原方程。若情况方程的某个根落在该范围之外，它解的其实是另一条方程（模内符号错了的那条），所以必须舍去。

(d) 现在 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$；特别地，$b > 0$。

*虚根。*设 $z = \mathrm{i}y$，并记 $Y = y^2 \geq 0$。方程变为 $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$，即

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

当 $Y \geq 0$ 时右边为正，所以平方后得到等价的方程：

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

由于 $b > \frac{1}{2}$，有 $b^2 - \frac{1}{4} > 0$，所以 $Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$ 确实是一个正值，于是

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

是纯虚根。

*实根。*设 $z = x$，并寻找满足 $x \geq -b$ 的根，此时 $|x + b| = x + b$。方程变为

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

其判别式为 $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$，由于 $b < \frac{3}{4}$，它是正数。取较大的根

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

我们必须验证它落在范围 $x \geq -b$ 之内。$x_+ \geq -b$ 等价于 $\sqrt{3 - 4b} \geq 1 - 2b$，而这必然成立，因为 $b > \frac{1}{2}$ 使右边为负，而左边为正。所以 x_+ 是一个纯实根。

因此当 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ 时，方程至少有一个纯虚根和至少一个纯实根，得证。（关于 b 的每个条件都恰好派上用场：$b > \frac{1}{2}$ 用于虚根及 $x_+ \geq -b$，$b < \frac{3}{4}$ 用于实根的判别式。）

第 (ii) 部分

设 $z = x + \mathrm{i}y$。那么

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

后者是实数，所以方程的虚部为

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

得 $y = 0$ 或 $y^2 = 3x^2$。（从几何角度看，z 位于实轴或直线 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ 之一上：这些正是辐角为 $\frac{\pi}{3}$ 的倍数的方向，亦即使 z^3 为实数的方向。）

情况 $y = 0$。由实部得 $x^3 + (x+2)^2 = 4$，即

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

该二次式的判别式为 $1 - 16 < 0$，所以唯一的解是 $x = 0$，即 $z = 0$。

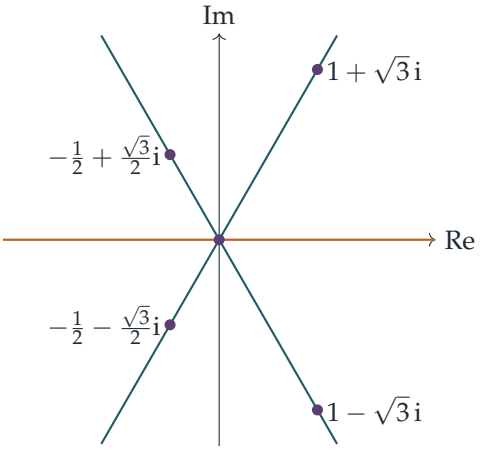
情况 $y^2 = 3x^2$。把 $y^2 = 3x^2$ 代入实部 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$：

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$ 迫使 $y = 0$：这又是 $z = 0$。
- $x = 1$ 给出 $y^2 = 3$，所以 $z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$。
- $x = -\frac{1}{2}$ 给出 $y^2 = \frac{3}{4}$，所以 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$。

每一步都是等价变换（我们只是代入和因式分解），所以以上全部确实都是解。因此方程恰好有五个根：

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



这些根都落在虚部所容许的三条直线 $y=0$ 和 $y=\pm\sqrt{3}\,x$ 上。

验算

- 以极式（polar form）表示，$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，所以 $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$，而 $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$；果然 $-8+12=4$。
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 是单位立方根（cube root of unity），所以 $z^3=1$，而 $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$；果然 $1+3=4$。
- 在 (d) 中试取 $b=\frac{5}{8}$：则 $Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$，且 $-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$。实根为 $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$，正如所需，它大于 $-\frac{5}{8}$。
- 以电脑在整个区域 $|x|,|y|\le 3$ 内搜索第 (ii) 部分方程的根，找到的恰好是上述五个根。

常见错误

- 把 $|z+b|$ 当作有虚部，或把 $|z+2|^2$ 展开成 $(z+2)^2$。模的平方是 $(x+2)^2+y^2$，是一个实数。
- 忘记检查情况方程的根是否落在该情况适用的范围内，如 (c) 和 (d)。
- 在 (ii) 中把虚部除以 y，因而漏掉实根 $z=0$。

STEP 之外

混合了 z 与 $|z|$（或与 $\bar{z}$）的方程并不是 z 的多项式方程，所以代数基本定理（fundamental theorem of algebra）对它们有多少个根毫无说明：这里一条“三次”方程竟有五个根。正确的看法是把它们视为两个实未知数的一对实方程。你会在大学一年级的复分析（complex analysis）中再次遇到这个观点：一个函数只有在仅依赖 z 而不依赖 $\bar{z}$ 时，才是复意义下可微的（这就是柯西－黎曼方程（Cauchy–Riemann equations），柯西（Cauchy）、黎曼（Riemann））。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）把这幅几何图像描绘得栩栩如生。

详细解答

STEP II 2025，第 3 题

纯数学 • 幂的比较

STEP II 2025，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

每个形如 a^b 与 b^a 的比较（其中 $a, b > 0$），在取对数（logarithm）并除以 ab 之后，都会变成 $\frac{\ln a}{a}$ 与 $\frac{\ln b}{b}$ 的比较。因此一切都归结到 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像：它上升至 $x = \mathrm{e}$ 处的唯一峰值，然后下降。位于 e 同一侧的两个数很容易比较；位于两侧的两个数则需要一块“踏脚石”，例如 $f(2) = f(4)$ 这个巧妙的巧合。

解答

全文中，对 $x > 0$ 记 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$。由于 ln 是递增的，对正数 a, b 有

$$a^b > b^a \iff b\ln a > a\ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

其中我们除以了 $ab > 0$。每一部分都会用到这个转换。

第 (i) 部分

由商法则（quotient rule），

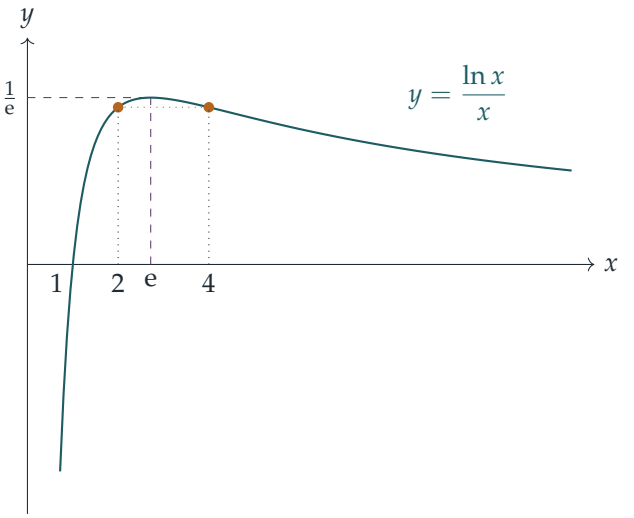
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

它在 $0 < x < \mathrm{e}$ 时为正，在 $x > \mathrm{e}$ 时为负。因此 f 在 $(0, \mathrm{e}]$ 上严格递增（strictly increasing），在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上严格递减，最大值为 $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$。

其他特征：

- $f(1) = 0$；在 $(0,1)$ 上 $f < 0$，在 $(1, \infty)$ 上 $f > 0$。

- 当 $x \to 0^+$ 时，$\ln x \to -\infty$ 而 $1/x \to +\infty$，故 $f(x) \to -\infty$：y 轴是一条渐近线（asymptote）。
- 当 $x \to \infty$ 时，由于 $\ln x$ 的增长比 x 慢，$f(x) \to 0^+$：x 轴是一条渐近线。
- 再求导一次得 $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$，因此在 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ 处有一个拐点（point of inflection）。



琥珀色的点标示 $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$，我们将在第 (iii) 部分用到。

第 (ii) 部分

(a) 由上述转换，$3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$。3 与 π 都大于 e，而 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上严格递减；由于 $3 < \pi$，得 $f(3) > f(\pi)$，故 $3^\pi > \pi^3$。

(b) 这里的不等式是 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{9/4}$，它等价于 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$。现在两个数都小于 e：事实上 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$，其中 $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ 是因为 $5 < \frac{81}{16}$。在 $(0, \mathrm{e}]$ 上函数 f 严格递增，所以较大的输入给出较大的值：$f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$，得证。

第 (iii) 部分

取 $a = x$ 及 $b = x + 2$，转换给出

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

对于 $1 < x < 2$，有 $x \in (1,2)$ 及 $x + 2 \in (3,4)$，两者分处 e 的两侧，因此我们需要一块踏脚石。

想一想 怎样比较 f 在 e 左边某点的值与 f 在其右边某点的值?

利用穿过两个琥珀色点的水平线。由于 $1 < x < 2 < \mathrm{e}$ 且 f 在该处递增，$f(x) < f(2)$。由于 $\mathrm{e} < x+2 < 4$ 且 f 在该处递减，$f(x+2) > f(4)$。又 $f(2) = f(4)$，因此

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

故 $f(x) < f(x+2)$，所以 $(x+2)^x$ 较大：对 $(1,2)$ 中的每个 x，都有 $(x+2)^x > x^{x+2}$。

第 (iv) 部分

把第一个不等式的两边分别改写为 3 的幂和 $2\sqrt{2}$ 的幂：

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{9} = \left(\sqrt{2}^{3}\right)^{3} = \left(2\sqrt{2}\right)^{3}.$$

因此两个不等式的左边完全相同，右边也完全相同；它们是同一个命题，因此等价。

由转换，$3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$。由 $\mathrm{e}^2 < 8$ 得 $\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$（取正平方根），又由于 $8 < 9$，有 $2\sqrt{2} < 3$。因此

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

而由于 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上严格递减，$f(2\sqrt{2}) > f(3)$。所以 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$，即

$$\sqrt{2}^{9} > 9^{\sqrt{2}}: \quad \text{较大的是} \sqrt{2}^{9}.$$

第 (v) 部分

设 $a = \sqrt[3]{3}$。我们要比较 8^a 与 a^8，即比较 $f(8)$ 与 $f(a)$。由于 $a < 2 < \mathrm{e} < 8$，两个输入再次位于峰值的两侧，而且它们的值原来很接近（$f(a) \approx 0.254$，$f(8) \approx 0.260$），因此我们需要比第 (iii) 部分的技巧更精细的方法。

想一想 能否用 f 在较简单的点上的值来表示 $f(a)$ 及 $f(8)$?

有用的恒等式是 $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$。它给出

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4}f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}f(2).$$

由第 (iv) 部分，$f(3) < f(2\sqrt{2})$。两边除以 $a > 0$，

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

最后，$a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$，因为把两边同时取六次方得 $9 > 8$。因此 $2\sqrt{2}a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$，又由于 $f(2) > 0$，

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

所以 $f(8) > f(a)$，由转换即 $8^a > a^8$：较大的是 $8^{\sqrt[3]{3}}$。

验算

数值上，$3^\pi \approx 31.54$ 对 $\pi^3 \approx 31.01$；$\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ 对 $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$；在 $x = 1.5$ 时，$1.5^{3.5} \approx 4.13$ 对 $3.5^{1.5} \approx 6.55$；$9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ 对 $\sqrt{2}^9 \approx 22.63$；以及 $8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ 对 $\sqrt[3]{3}^8 \approx 18.72$。全部与上述结论一致。在 (ii) 和 (iv) 中差距很小，这正是需要用图像论证而非粗略估算的原因。用电脑在 $(1,2)$ 中 10^5 个随机点检验第 (iii) 部分，没有发现任何例外。

常见错误

- 比较 f 在 e 两侧的两点时，当作 f 是单调（monotonic）的那样处理。在 (iii) 和 (v) 中，踏脚石是必不可少的。
- 忘记把 $b\ln a > a\ln b$ 除以 ab 时不等号方向不变，只是因为 $ab > 0$。
- 在 (ii)(b) 中，没有说明 $\frac{9}{4}$ 与 $\sqrt{5}$ 哪个较大，或没有说明两者都小于 e。

STEP 之外

方程 $a^b = b^a$ 在 $a \neq b$ 时正正就是 $f(a) = f(b)$，而每条水平线 $y = c$（其中 $0 < c < 1/\mathrm{e}$）都与图像相交两次。其中 $a < b$ 的解可参数化为 $a = (1+\frac{1}{t})^t$、$b = (1+\frac{1}{t})^{t+1}$，其中 $t > 0$；取 $t = 1$ 得 $(2,4)$，这是唯一一对这样的正整数。当 $t \to \infty$ 时两者都趋向 e，这是大学一年级分析（analysis）中的标准极限之一。关于这类论证背后的单调性与均值定理（mean value theorem）的严谨处理，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

详细解答

STEP II 2025，第 4 题

纯数学 · 下取整函数恒等式

STEP II 2025，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

一切都建基于一个事实：$\lfloor x \rfloor = m$ 的意思恰恰是 m 为整数，且 $m \leq x < m+1$。第 (i) 部分说明，整数平移可以直接穿过下取整函数（floor function）。有了这一点，便会发现 f_n 是以 $\frac{1}{n}$ 为周期的周期函数（periodic function），因此我们只需在一个短区间上研究它，而在该区间上每一项都很容易计算。第 (iii) 部分其实是 $n = 2$ 的情况换了个样子出现，它使无穷级数可以伸缩相消（telescope）。

解答

第 (i) 部分

设 $m = \lfloor x \rfloor$，则 m 为整数，且 $m \leq x < m+1$。各边加上整数 n，得

$$m + n \leq x + n < (m + n) + 1.$$

由于 $m+n$ 是整数，它就是不超过 $x+n$ 的最大整数。所以 $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$，得证。

第 (ii)(a) 部分

记 $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$。把 x 换成 $x + \frac{1}{n}$，和式中每一项都会向后移一位：

$$f_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

和式的最后一项是 $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$，而 $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$，两者都由第 (i) 部分取 $n=1$ 得出。所以

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

第 (ii)(b) 部分

设 $0 \le t < \frac{1}{n}$。对于 $0 \le k \le n-1$，

$$0 \le t + \tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

因此 $\left\lfloor t+\frac{k}{n}\right\rfloor = 0$。此外 $0 \le nt < 1$，所以 $\lfloor nt\rfloor = 0$。每一项都是零，因此 $\mathrm{f}_n(t) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

> ? **想一想** (a) 部分只让我们每次向上移 $\frac{1}{n}$。那么，位于 $[0, \frac{1}{n})$ 下方的 x 要怎样才能到达?

在点 $x-\frac{1}{n}$ 应用 (a)，得 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(x-\frac{1}{n}\right)$，所以我们既可以向上移，也可以向下移。由归纳法（induction），对每个整数 m（无论正负），都有 $\mathrm{f}_n\left(x+\frac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(x)$。

现在任取实数 x，并设 $m = \lfloor nx\rfloor$，则 $m \le nx < m+1$。令 $t = x - \frac{m}{n}$。各边除以 $n > 0$，得 $0 \le t < \frac{1}{n}$。因此由 (b)，

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

成立。所以对所有 x 都有 $\mathrm{f}_n(x) = 0$，这就是恒等式

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

第 (iii)(a) 部分

在 (ii)(c) 中取 $n=2$，并在 $\frac{x}{2}$ 处求值：

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

移项整理即得 $\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$。

第 (iii)(b) 部分

想一想 (iii)(a) 里只有一个孤零零的 $+1$，它怎样帮助我们处理 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ 这一项?

把分子和分母同时除以 2^k。设 $y = x/2^k$，则

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

这里用了 (iii)(a)，并以 y 代替 x。所以 $k = 0, 1, \ldots, K$ 各项之和会伸缩相消:

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

当 $K \to \infty$ 时，$x/2^{K+1} \to 0$，而答案取决于它从 0 的哪一侧趋近。

- 若 $x \geq 0$: 一旦 $2^{K+1} > x$，便有 $0 \leq x/2^{K+1} < 1$，所以最后的取整值为 0，此后 $S_K = \lfloor x \rfloor$。
- 若 $x < 0$: 一旦 $2^{K+1} \geq -x$，便有 $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$，所以最后的取整值为 -1，此后 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$。

无论哪种情况，都只有有限多项不为零，因此该无穷级数为

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

当 x 为非负整数时，和就是 x。

验算

试取 $x = 7$。各项为 $\lfloor 4 \rfloor = 4$、$\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$、$\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$、$\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$，之后每一项都是 0。它们的和是 $7 = \lfloor 7 \rfloor$。再试 $x = -\frac{5}{2}$: 各项为 $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$、$\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$、$\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0$，如此类推。和为 $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$，证实负数的情况确实不同。至于 (ii)，取 $n = 3$、$x = 1.5$，得 $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$。用电脑对两万个随机有理数 x 及 $1 \leq n \leq 30$ 的各个值作检验，题中每一条恒等式以及伸缩相消后的部分和都得到证实。

常见错误

- 在 (ii)(c) 中只用 (a) 向上移，这样只涵盖了 $x \geq 0$，对负数 x 则甚么也没有说明。
- 在 (iii)(b) 中假设对所有 x 都有 $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$。对于负数 x，它最终停留在 -1，而不是 0。

- 在 a 和 b 都不是整数时写 $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$。第 (i) 部分正正就是容许这样写的情况。

STEP 之外

(ii)(c) 中的恒等式就是埃尔米特恒等式（Hermite's identity）。它属于一系列在初等数论（elementary number theory）中占核心地位的取整函数结果，例如勒让德（Legendre）公式 $\sum_{k\geq 1}\lfloor N/p^k \rfloor$，它给出整除 $N!$ 的质数 p 的最高次幂。(iii)(b) 中的和也在数算某样东西：对正整数 x，第 k 项就是从 1 到 x 之间能被 2^k 整除但不能被 2^{k+1} 整除的整数个数，而每个整数都恰好被数一次。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是观察这些思想如何实际运用的好去处。

详细解答

STEP II 2025，第 5 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2025，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

这里每个积分（integral）的范围都是由 0 到 ∞，而形如 $x = u^{-m}$ 的代换（substitution）会把 $[0,\infty)$ 映射到自身，只是两端互换了。$\mathrm{d}x$ 带来的负号会抵消上下限的互换，所以我们得到的仍然是一个在 $[0,\infty)$ 上的积分。如果新的被积函数（integrand）正好是原来的负数，那么这个积分等于它自己的相反数，因此为零。如果新的被积函数是另一个形状相同的被积函数的倍数，我们就得到两个积分之间的关系，而毋须计算任何一个积分。在第 (iii) 及第 (iv) 部分，我们把指数（exponent）保留为一般形式，再选取它的值，使 u 的幂互相抵消。

解答

在整个解答中，若 $x = u^{-m}$ 且 $m > 0$，则当 $u \to \infty$ 时 $x \to 0$，而当 $u \to 0$ 时 $x \to \infty$，所以

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\left(-mu^{-m-1}\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

我们会先在 $m = 1$ 及 $m = 2$ 的情况下使用这个结果，然后再用于一般的 m。

第 (i) 部分

把该积分记为 I，并设 $x = u^{-1}$；把上下限重新排好次序后，$\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$。对 $u > 0$，

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

而且

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

因此

$$I = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}} \cdot \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u = -I.$$

由于变量叫甚么名字并不重要，最后那个积分其实又是 I。所以 $2I = 0$，得 $I = 0$，正如所求。

注意，这并不表示被积函数为零。它在 $(0,1)$ 上是负的，在 $(1,\infty)$ 上是正的，而代换令这两部分面积恰好互相抵消。

第 (ii) 部分

现在设 $x = u^{-2}$；重新排好上下限后，$\mathrm{d}x \to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$。对 $u > 0$，

$$x^3+1 = u^{-6}+1 = \frac{1+u^6}{u^6}, \qquad \sqrt{x^3+1} = \frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}} \cdot \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

把 u 改名为 x 后，这就是所求的结果。

第 (iii) 部分

第 (i) 部分是 $s = 1$、$p = 3$、$r = \frac{1}{2}$ 的情况，所以我们用字母重复同一方法。把该积分记为 J，并设 $x = u^{-1}$：

$$x^s(x^p+1) = u^{-s} \cdot \frac{1+u^p}{u^p} = \frac{u^p+1}{u^{s+p}}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x^s(x^p+1)} = u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

同时 $x^r - 1 = (1-u^r)/u^r$。所以

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u = -\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

把它与写成以下形式的 J 本身比较：

$$J = \int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{-s/2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

> ? **想一想** 为甚么只需令 u 的幂相符，而不用计算任何东西?

如果两个 u 的幂相同，代换就会把 J 变成 $-J$，于是正如第 (i) 部分一样得 $J = 0$。所以我们需要

$$\frac{s+p}{2} - r - 2 = -\frac{s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s + \frac{p}{2} - 2.$$

取这个 r 值，便有 $J=-J$，所以 $J=0$。（题目告诉我们 p 和 s 使这些积分收敛（converge），而论证 $J=-J\Rightarrow J=0$ 所需要的就只是这一点。）验算一下：$s=1$ 和 $p=3$ 给出 $r=1+\frac{3}{2}-2=\frac{1}{2}$，这正是第 (i) 部分。

第 (iv) 部分

第 (ii) 部分是 $k=2$、$p=3$、$q=6$ 的情况，而它来自 $x=u^{-2}$。所以我们尝试 $x=u^{-m}$，其中 $m>0$，使 $\mathrm{d}x\to mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u$：由于 $x^p+1=(1+u^{mp})/u^{mp}$，

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = m\int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\,u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp}+1}}\,\mathrm{d}u.$$

多出来的 u 的幂会在以下情况消失：

$$\frac{mp}{2}=m+1 \quad\Longleftrightarrow\quad p=2+\frac{2}{m},$$

此时右方为 $m\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q+1}}$，其中 $q=mp=2m+2$。

现在取 $m=k$。对任何 $k>0$，选取

$$p=2+\frac{2}{k},\qquad q=2k+2$$

便得到

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = k\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q+1}}.$$

由于 $k>0$，两个指数都大于 2。这正是这些积分收敛的条件，因为当 x 很大时，被积函数的表现与 $x^{-p/2}$ 相若。所以我们的关系式中的积分都存在。取 $k=2$ 便重新得到第 (ii) 部分的 $p=3$、$q=6$，而 $k=1$ 则给出平凡情况 $p=q=4$。

验算

- 数值上，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}\approx 2.8044$，而 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}\approx 1.4022$，恰好是一半，与第 (ii) 部分所说的一致。
- 第 (i) 部分的积分在机器精度内计算出来为零，尽管负的贡献主要来自 $x=0$ 附近，而正的贡献则稀疏地分布在 $(1,\infty)$ 上。
- 对随机选取的容许 p 和 s，以电脑验算第 (iii) 部分的积分，在 $r=s+\frac{p}{2}-2$ 时得到零。把 r 改变 0.3，则得到明显非零的值。
- 对 $k=\frac{1}{2}$（即 $p=6$、$q=3$），第 (iv) 部分的关系式就是把第 (ii) 部分倒过来读，理应如此。

常见错误

- 忘记代换会互换上下限。$\mathrm{d}x$ 带来的负号与倒转的上下限互相抵消，漏掉其中任何一个，都会令第 (i) 部分的符号出错。
- 在第 (iii) 部分处理一般的幂时，写成 $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$，而不是 $u^{-s/2}$。
- 在第 (iv) 部分，只对某个特定的 k 找出一对 (p,q)，而不是把 p 和 q 写成适用于每个 $k > 0$ 的函数。

STEP 之外

这些积分全都可以求出闭式（closed form）。代换 $t = x^p/(1+x^p)$ 会把 $\int_0^\infty (1+x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ 变成 $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$，其中 B 是欧拉（Euler）的 Beta 函数（Beta function）。再配合 Gamma 函数（Gamma function），就可以明确写出第 (iv) 部分中的比值。利用对称 $x \mapsto 1/x$ 把一个积分变成它自己的相反数，这个技巧在分析（analysis）和围道积分（contour integration）中一再出现。若想仔细学习反常积分（improper integrals），包括我们在此可以略过的收敛问题，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。若想看更多 STEP 风格的代换技巧，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）。

详细解答

STEP II 2025，第 6 题

纯数学 · 与抛物线相切的圆

STEP II 2025，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

这里所有圆的圆心都在 y 轴上，因此一切都关于 x 对称（symmetric），而“在两点相切”的意思就是在一对镜像点 $(\pm x_0, y_0)$ 相切，其中 $x_0 \neq 0$。要刻画相切（tangency），最简单的方法是说两者的法线（normal）一致：通往切点的半径必须沿着另一曲线在该点的法线方向。一旦第 (i) 和第 (ii) 部分各自给出以圆心高度 a 表示 r^2 的公式，第 (iii) 部分就变成研究一条关于 a 的二次方程（quadratic equation），而它的两个根（roots）正是 a_1 和 a_2。

解答

第 (i) 部分

设圆与抛物线（parabola）相切于 $P = (x_0, y_0)$，其中 $x_0 \neq 0$。（两个不同的切点不可能都在对称轴上，因为抛物线与 $x = 0$ 只相交于原点；而且由对称性，若 (x_0, y_0) 是切点，则 $(-x_0, y_0)$ 也是。）

圆在 P 的法线沿着半径方向 $(x_0,\ y_0 - a)$。把抛物线写成 $2ky - x^2 = 0$，它的法线沿着梯度（gradient）方向 $(-2x_0,\ 2k)$。相切即表示这两个向量平行：

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

由于 $x_0 \neq 0$，得 $y_0 = a - k$。由于 P 在抛物线上，$x_0^2 = 2ky_0 = 2k(a - k)$；又由于 P 在圆上，故

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a - k) + k^2 = k(2a - k),$$

得证。

反过来，设 $a > k > 0$ 且 $r^2 = k(2a-k)$。令 $y_0 = a - k > 0$ 及 $x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$。按构造，$(\pm x_0, y_0)$ 都在抛物线上；又因 $x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = r^2$，它们也在圆上。在这两点，法线 $(\pm x_0, -k)$ 与 $(\mp 2x_0, 2k)$ 平行，所以两曲线在该处有公共切线。由于 $x_0 \neq 0$，圆与抛物线在两个不同的点相切。

（作为交叉验证，把 $x^2 = 2ky$ 代入圆的方程，得 $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$，即 $(y - (a-k))^2 = 0$：这是一个重根（repeated root），正是相切在代数上的标志。）

第 (ii) 部分

直线 $y = c + x$，即 $x - y + c = 0$，与圆相切当且仅当它与圆心 $(0, a)$ 的距离等于 r：

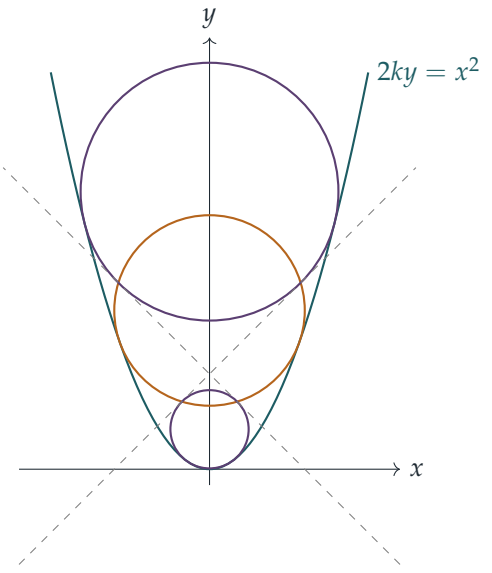
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

直线 $y = c - x$ 是它关于 y 轴的镜像，所以给出相同的条件。

切点就是从 $(0, a)$ 到直线的垂足（foot of the perpendicular）。半径垂直于直线，故方向为 $(1, -1)$；从 $(0, a)$ 移动 $t(1, -1)$ 而落在 $y = c + x$ 上，得 $a - t = c + t$，所以 $t = \frac{a-c}{2}$。与 $y = c + x$ 的切点是

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

而由对称性，与 $y = c - x$ 的切点是 $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$。



$k = 1$、$c = 3$ 的情况：抛物线、与它相切的两个圆 C_1、C_2（紫红色）、直线 $y = 3 \pm x$（虚线），以及第 $(iii)(b)$ 部分的圆（琥珀色）。

第 (iii)(a) 部分

每个圆都与抛物线在两点相切，所以由第 (i) 部分，$r_i^2 = k(2a_i - k)$；每个圆又与直线 $y = c \pm x$ 相切，所以由第 (ii) 部分，$r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$。两式相等，得

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

所以 a_1 和 a_2 都满足二次方程 $a^2 - 2(c+2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$。由于 $a_1 \neq a_2$，它们正是这方程的两个根，因此

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

于是

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

(a) 得证。

第 (iii)(b) 部分

由第 (ii) 部分，C_i 上的切点是 $\left(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2}\right)$。记 $u_i = a_i - c$ 会更整洁，这样切点就是 $\left(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2}\right)$。

> **想一想** 我们需要一个经过四点的圆，但只有 d 和 p 两个未知数。怎样才能在不明确解出 a_1 和 a_2 的情况下确定它们?

这四点是两对镜像点，而任何圆心在 y 轴上的圆都是对称的，所以只需令圆经过 $u = u_1$ 及 $u = u_2$ 时的点 $\left(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2}\right)$ 即可。这条件是

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c-d)\, u + 2(c-d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

另一方面，把 $a = u + c$ 代入 (a) 中的二次方程，得

$$u^2 - 4k\, u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

它的根恰好是 u_1 和 u_2，而由于 $a_1 \neq a_2$，这两个根不相等。圆经过全部四点，当且仅当 u_1 和 u_2 都是 $(*)$ 的根。两个具有相同两个相异根的首一（monic）二次多项式必然相同，所以与 $(**)$ 比较系数:

$$2(c - d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

然后 $2(c-d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$，所以

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

第 (iii)(c) 部分

我们使用第 (i) 部分的逆命题（converse）。当 $d = c + 2k$ 时，

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

所以这个圆正好具有 $r^2 = k(2a - k)$ 的形式，只是以 d 代替 a。剩下要验证的是 $d > k$。

> **想一想** (a) 和 (b) 都没有提及任何不等式，那么像 $d > k$ 这样的不等式（inequality）从何而来?

它来自 C_1 和 C_2 确实与抛物线在两点相切这一事实。在第 (i) 部分，在两点相切迫使切点满足 $y_0 = a - k$ 且 $x_0^2 = 2k(a - k) > 0$（因为 $x_0 \neq 0$），所以 $a_1 > k$ 且 $a_2 > k$。把两式相加并利用 (a)，

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

所以 $d > k > 0$ 且 $p^2 = k(2d - k)$，由第 (i) 部分的后半，圆 $x^2 + (y - d)^2 = p^2$ 与抛物线 $2ky = x^2$ 在两点相切，即 $\left(\pm\sqrt{2k(c + k)},\, c + k\right)$。

验算

取 $k = 1$、$c = 3$(即上图)。(a) 中的二次方程是 $a^2 - 10a + 11 = 0$,所以 $a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$ 及 1.258。两者之和为 $10 = 2c + 4k$，平方和为 $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$。(b) 给出 $d = 5$ 及 $p^2 = 9$。圆 $x^2 + (y - 5)^2 = 9$ 与 $2y = x^2$ 相交于 $2y + (y - 5)^2 = 9$，即 $(y - 4)^2 = 0$: 在 $y = 4$ 有重根，所以两者相切于 $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$，与 (c) 的预测一致。四个切点中的每一个，例如 $\left(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2}\right)$，与 $(0, 5)$ 的距离都是 3。所有结果也已用电脑对数以百计随机选取的容许 k 和 c 值验证过。

常见错误

- 在 (i) 中，忘记切点满足 $x_0 \neq 0$。正是这一点让我们可以除以 x_0，也正是它给出 $a > k$。
- 在 (iii)(a) 中，只用了 $r^2 = k(2a - k)$ 或只用了 $r^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2$。关于 a 的二次方程来自两者同时成立。
- 在 (iii)(c) 中，验证了 $p^2 = k(2d - k)$ 却没有验证 $d > k$。没有这一点，这个“圆”可能只在原点相切，甚至完全不相切。

STEP 之外

由第 (i) 部分，圆心在 y 轴上且与抛物线两度相切的圆是 $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y - k) = 0$：一条关于参数 a 为线性的方程。这样的一族圆称为圆束（pencil of circles，又称共轴圆系（coaxal system）），而 C_1、C_2 以及 (b) 中的圆都属于这一族。比对法线是迈向曲线之间接触（contact）这一概念的第一步；与曲线达到二阶接触的圆就是它的曲率圆（circle of curvature），这会在曲线微分几何（differential geometry of curves）的入门课程中遇到。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了许多同一风格、STEP 式的坐标几何题目。

详细解答

STEP II 2025，第 7 题

纯数学 · 非线性微分方程

STEP II 2025，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

右边的 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 恰好是 x^2 对 t 的导数（derivative），所以方程可以立即积分一次，得到一阶方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+C$。初始条件决定 C，而三个部分正好对应 C 的三种可能符号：零、正和负。之后每个一阶方程都可以分离变量（separation of variables），粒子的运动情况可以从公式读出，甚至直接从 x^2+C 的符号看出来。

解答

积分一次

由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right)=2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，方程即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right),\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+C$$

其中 C 为常数。在 $t=0$ 时 $x=a$，所以 C 等于初速度减去 a^2。在三个部分中，分别有 $C=0$、$C=p^2$ 及 $C=-q^2$。

第 (i) 部分

此时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2$。只要 $x\neq 0$，速度便是正数，所以 x 从 $a>0$ 开始递增，永远不会到达 0；因此我们可以除以 x^2 并分离变量：

$$\int_a^x\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=t\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=t\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{a}{1-at}.$$

当 t 从 0 增加至趋近 $\frac{1}{a}$ 时，粒子沿正方向移动，而且愈来愈快（其速度为 x^2），并且当 $t \to \frac{1}{a}$ 时 $x \to \infty$。粒子在有限时间 $\frac{1}{a}$ 内逃逸至无穷远，而解在该时刻之后并不存在。

第 (ii) 部分

现在 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$，它恒为正数，所以可以分离变量：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

设 $\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$，由于 $a, p > 0$，它位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，于是

$$x = p\tan\left(pt + \alpha\right).$$

此式在 $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时成立。粒子同样沿正方向移动，速率不断增加，而当 $pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$ 时 $x \to \infty$，即当

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

这里用到了当 $\theta > 0$ 时 $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$。所以粒子在有限时间内逃逸至无穷远，而且比 (i) 更早，这正符合较大初速度的预期。

第 (iii) 部分

现在

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

在 $x = \pm q$ 处速度为零，所以这两个位置是平衡点（equilibria）。$x^2 - q^2$ 的符号已经说明了一切：当 $x > q$ 时粒子向右移动，当 $-q < x < q$ 时向左移动。所以答案取决于 a 与 q 的大小比较。

利用部分分式（partial fractions）$\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$ 分离变量：

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{常数}.$$

取指数，并以 $t = 0$ 时 $x = a$ 确定常数，可推想

$$\frac{x-q}{x+q} = Ke^{2qt}, \qquad K = \frac{a-q}{a+q}, \qquad \text{即} \qquad x = q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

为确保各种情况下符号都正确，我们直接验证。设 $E = Ke^{2qt}$，则 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2qE$。于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q\cdot\frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2}, \qquad x^2-q^2 = q^2\,\frac{(1+E)^2-(1-E)^2}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

两者相等。在 $t = 0$ 时，$1 + K = \frac{2a}{a+q}$ 而 $1 - K = \frac{2q}{a+q}$，所以 $x = q\cdot\frac{a}{q} = a$。因此只要 $1 - E \neq 0$，这条公式就是方程的解。注意由于 $a > 0$，有 $-1 < K < 1$。

情况 $a > q$。 此时 $0 < K < 1$，而 $E = Ke^{2qt}$ 从 K 开始递增。粒子以正速度 $a^2 - q^2$ 出发，沿正方向移动，愈来愈快。当 $e^{2qt} = \frac{1}{K}$ 时分母 $1 - E$ 达到 0，所以

$$x \to \infty \quad \text{当} \quad t \to \frac{1}{2q} \ln \frac{a+q}{a-q}.$$

与 (i) 和 (ii) 一样，粒子在有限时间内逃逸至无穷远。

情况 $a = q$。 此时 $K = 0$，对所有 t 都有 $x = q = a$。初速度为 0，加速度 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 亦然：粒子在 $x = a$ 处保持静止。

情况 $0 < a < q$。 此时 $-1 < K < 0$，所以 $E < 0$，而分母 $1 - E > 1$ 永不为零：解对所有 $t \geq 0$ 都存在。

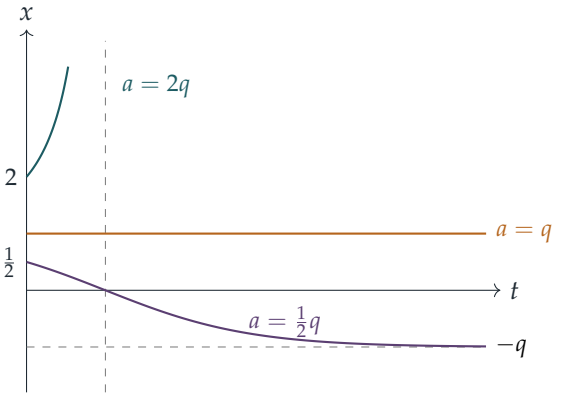
> ? **想一想** 粒子会停在原点，还是穿过原点？它最终会到哪里？

初速度 $a^2 - q^2$ 为负数，所以粒子沿负方向移动。当 $E = -1$，即 $t = \frac{1}{2q} \ln \frac{q+a}{q-a}$ 时，粒子位于原点，并且直接穿过，因为该处的速度是 $-q^2 \neq 0$。当 $t \to \infty$ 时，$E \to -\infty$，而

$$x = q\,\frac{1+E}{1-E} \to -q.$$

在整个过程中 $|x| < q$（因为当 $E < 0$ 时 $\frac{1+E}{1-E} \in (-1, 1)$），所以速度 $x^2 - q^2$ 一直保持负值：粒子稳定地向左移动，趋近 $x = -q$ 但永远不会到达。它的速率 $q^2 - x^2$ 在经过原点时最大，为 q^2，之后逐渐减小至零。

以双曲函数(hyperbolic functions)表示,这些解为:当 $a > q$ 时 $x = -q \coth\left(qt - \operatorname{arcoth} \frac{a}{q}\right)$，当 $a < q$ 时 $x = -q \tanh\left(qt - \operatorname{artanh} \frac{a}{q}\right)$。下图展示 $q = 1$ 时的三种情况。



对于 $a = 2q$ 和 $a = \frac{1}{2}q$，特殊时刻 $\frac{1}{2q} \ln 3$（垂直虚线）分别是爆破时刻和穿过原点的时刻。

验算

- 在 (ii) 中令 $p \to 0$：$p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$ 及 $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$，与 (i) 吻合。在 (iii) 中 $a > q$ 的情况下令 $q \to 0$，结果亦相同。
- 对 $x = \frac{a}{1-at}$ 求导：$\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$ 及 $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$。
- 以数值方法逐步推进原来的二阶方程，例如取 $a = 0.5$、$q = 1.4$，得到 $t = 1$ 时 $x \approx -1.0814$，$t = 3$ 时 $x \approx -1.3987$，与公式相符；而粒子在 $t \approx 0.2669$ 时位于原点，正如预测。

常见错误

- 没有察觉 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是一个恰当导数，转而尝试如 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 配合 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的代换；这方法可行，但较费时。
- 在 (iii) 中漏掉对数内的绝对值，以致当 $a < q$ 时得出错误的 K 符号。
- 遗漏平衡情况 $a = q$，或说粒子“停在 $-q$”，但其实它只是趋近该点。

STEP 之外

这里看到的有限时间爆破（finite-time blow-up）是非线性方程的标志：$\dot{x} = x^2$ 的右边完全光滑，但其解只在有限时间内存在，这在线性方程中从不会发生。第 (iii) 部分是相线分析（phase-line analysis）的初步：平衡点 $x = q$（不稳定）和 $x = -q$（稳定）支配着整个运动，你甚至在求解之前就可以从 $x^2 - q^2$ 的符号预测其行为。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讨论了这两个概念，包括解的存在性与唯一性。

详细解答

STEP II 2025，第 8 题

纯数学 · 整数的平衡分拆

STEP II 2025，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

把一个集合的每个元素都加上同一个数 c，其总和与平方和的变化是可以控制的：变化只取决于元素的个数、元素之和，（就平方而言）再无其他。因此，若两个元素个数相同的集合，其总和与平方和已经相等，那么把两者各自平移一份再互相对调，便可构造出一个更大的平衡分割（balanced partition）。第 (ii) 部分正是这个想法背后的代数，第 (iii) 及 (iv) 部分则是它的两个应用。

解答

第 (i) 部分

$1, 2, \ldots, 8$ 的总和是 36，它们的平方和是 204，所以每一半的总和须为 18，平方和须为 102。

把 8 放进 B。B 其余三个元素的总和须为 10，平方和须为 $102 - 64 = 38$。由 1 至 7 中选出三个互不相同、总和为 10 的数，所得三元组为

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

其平方和分别为 54、46、42 和 38。只有 $\{2,3,5\}$ 符合要求，所以

$$A = \{1,4,6,7\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}.$$

验证：$1+4+6+7 = 18 = 2+3+5+8$，且 $1+16+36+49 = 102 = 4+9+25+64$。（以上搜索亦显示，除了对调 A 与 B 之外，这是唯一一个分成两组各四个数的平衡分割。）

第 (ii) 部分

用二项式定理（binomial theorem）展开每个立方：

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

以 a_k 代替 b_k 亦同理。因此

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

因为 mc^3 项互相抵消，两份 $\sum a_k^3$ 和两份 $\sum b_k^3$ 亦然。根据假设，两个括号都等于零，所以对每个实数 c，两边都相等，得证。

留意同样的展开降低一次方便得到

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

而对一次方则有 $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$，因为两者都等于 $mc + \sum a_k + \sum b_k$。

第 (iii) 部分

取 (i) 中的平衡分割，令 a_k 依次取 $1,4,6,7$，b_k 依次取 $2,3,5,8$，并取 $c=8$。于是 $c+a_k$ 依次为 $9,12,14,15$，$c+b_k$ 依次为 $10,11,13,16$。设

$$A = \{1,4,6,7\}\cup\{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}\cup\{9,12,14,15\}.$$

这两个集合不相交（disjoint），各有 8 个元素，合起来正是 $\{1,2,\ldots,16\}$，因为 $\{1,\ldots,8\}$ 和 $\{9,\ldots,16\}$ 都分别被分到两者之中。

> **想一想** 为甚么要把 B 的平移副本放进 A，而不是把 A 的平移副本放进去?

因为这正是 (ii) 的模式：该处左边是 $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$，即我们的 A 的立方和；右边则是我们的 B 的立方和。所以取 $c=8$ 代入 (ii)，便得到两者的立方和相等。(ii) 末尾的两条额外恒等式则给出总和相等及平方和相等，所以这个分割同样是平衡的。

直接计算：两半的总和都是 68，平方和都是 748，立方和都是 9248。

第 (iv) 部分

把 S 的元素写成 $(n+k)^2$，其中 $k=0,1,\ldots,11$。对任何由 k 值组成的集合 K，

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\,n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

所以，若把 $\{0,1,\ldots,11\}$ 分成两个大小相同、总和相同、平方和亦相同的集合，则对应的平方数对每个 n 都会有相等的总和。

题目给出的 $\{1,\ldots,11\}$ 的分割，总和相等（各为 33），平方和亦相等（各为 253），但两部分的大小分别是 6 和 5。把 $k=0$ 加进较小的部分便可解决这个问题：它使大小增加一，而对总和及平方和都没有影响。所以我们采用

$$\{1,3,4,5,9,11\} \quad 及 \quad \{0,2,6,7,8,10\},$$

两者大小都是 6，总和都是 33，平方和都是 253。因此

$$C=\{(n+1)^2,(n+3)^2,(n+4)^2,(n+5)^2,(n+9)^2,(n+11)^2\},$$
$$D=\{n^2,(n+2)^2,(n+6)^2,(n+7)^2,(n+8)^2,(n+10)^2\}$$

的元素总和都是 $6n^2+66n+253$。由于 $n>0$，这十二个平方数互不相同，所以 C 与 D 不相交，而且两者的并集是 S。

验算

- 在 (iv) 中取 $n=1$，得 $C=\{4,16,25,36,100,144\}$ 及 $D=\{1,9,49,64,81,121\}$，两者总和都是 $325=6+66+253$。
- 在 (iii) 中，总和 68 及平方和 748 分别是 1 至 16 的总和 136 及平方和 1496 的一半；立方和 9248 则是 $136^2=18496$ 的一半。
- 用电脑搜索从 $1,\ldots,8$ 中选出四个数的所有方法，确认了 (i) 中的分割在对调之下是唯一的；(iv) 的构造亦已对 n 直至 499 验证过。

常见错误

- 在 (iv) 中直接使用题目给出的 A 和 B：两者大小 6 与 5 不同，所以 n^2 项不会抵消。缺少的元素 n^2（即 $k=0$）必须归入 B。
- 在 (iii) 中平移了错误的一半：把 $\{9,12,14,15\}$（即平移后的 a_k）与 $\{1,4,6,7\}$ 放在一起，总和与平方和仍然平衡，但立方和会相差 $2\left(\sum b_k^3-\sum a_k^3\right)=2(672-624)=96$。

STEP 之外

这就是 Prouhet–Tarry–Escott 问题：把一个整数集合分成两部分，使两者的 j 次方和对 $j=1,\ldots,k$ 都相等。以 $c=16,32,\ldots$ 重复 (iii) 中“平移再对调”的做法，便得到 $\{0,1,\ldots,2^{k+1}-1\}$ 的 Thue–Morse 分割，它使直至 k 次的所有方和都平衡；其证明就

是用归纳法（induction）重复 (ii) 的二项式展开。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是学习这类初等数论（elementary number theory）的好读物。

详细解答

STEP II 2025，第 9 题

力学 · 碰撞与抛体

STEP II 2025，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

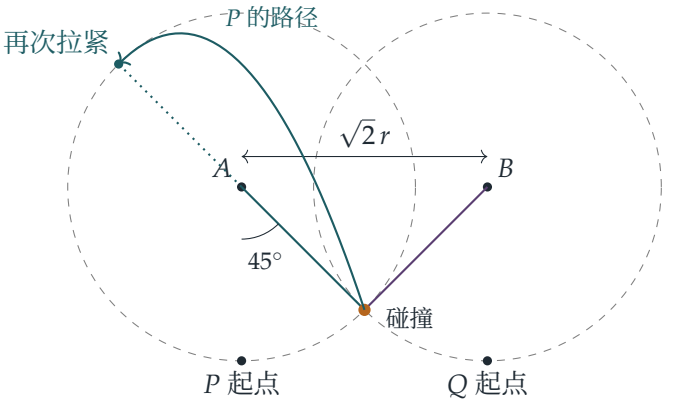
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

对称性（symmetry）完成了大部分工作。两质点必定在 AB 的垂直平分线（perpendicular bisector）上相遇，这就确定了它们碰撞时的位置和速率。碰撞刚结束时，每条绳子都会松弛，所以每个质点都只是普通的抛射体（projectile），直至它与悬点的距离回升至 r 为止。把这个距离条件写出来，就得到一条关于 t 的四次方程（quartic）。三重根（triple root）有其物理意义：质点到达圆周时正沿着圆周运动，因此绳子拉紧时不会产生急扯。

解答

模型：P 和 Q 是质量为 m 的质点（在碰撞中视作细小光滑的球体），绳子轻而不可伸长，且没有空气阻力。设 P 在左方，悬于 A，并以 A 为原点取坐标轴，x 轴水平（指向 B），y 轴竖直向上。



上图显示在第 (iv) 部分的特殊情况下，P 在碰撞后的飞行轨迹：它在远侧、水平线以上 45° 的位置重新回到自己的圆周上。

第 (i) 部分

整个装置关于 AB 的垂直平分线对称，所以两质点在这条线上相遇。此时每个质点都已从最低点水平移动了 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r = r\sin 45^\circ$，所以每条绳子与向下的竖直方向成 45°。每个质点上升了 $r - r\cos 45^\circ = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。到这一刻为止绳子都是拉紧的，而其张力（tension）不做功，所以由能量守恒（conservation of energy），碰撞前一刻的速率 v 满足

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

（两质点要到达这里，需要 $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$。）

每个质点都沿着自己的圆周运动，与水平成 45°，所以

$$\text{速度：质点}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{速度：质点}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

两质点在同一高度相遇，所以连心线（line of centres）是水平的，两者之间的冲量（impulse）也是水平的。因此竖直分量保持不变。在水平方向上，两者的动量大小相等、方向相反，所以碰撞前后的总动量都是零。于是由牛顿恢复定律（Newton's law of restitution），每个质点都以接近速率的 e 倍反弹。碰撞刚结束时，

$$\text{水平速率} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{竖直分量} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\ (\text{向上}),$$

而 P 此时正向左运动，远离 Q。

> **想一想** 在碰撞期间，绳子会否也施加冲量？

不会。绳子只能拉，而且只能沿自身方向拉。碰撞刚结束时，P 相对于 A 位于 $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$，速度为 $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$。它沿 $\overrightarrow{AP}$ 的分量是 $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$，所以 P 正向 A 运动。绳子立即松弛，因此从来不需要冲击张力。

第 (ii) 部分

从碰撞时起计算 t。在绳子再次拉紧之前，P 是一个抛射体，所以相对于 A，

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

绳子拉紧的条件恰好是 $x^2 + y^2 = r^2$。乘以 2，使 $\sqrt{2}\,x$ 和 $\sqrt{2}\,y$ 出现，得

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

这条式在 $t=0$ 时成立，因为在碰撞那一刻绳子仍然拉紧，所以我们要找的时间是一个非零根。由对称性，Q 在同一时刻发生同样的情况。两质点在水平方向上互相远离，所以它们不可能先再次相撞。

第 (iii) 部分

展开并消去 $2r^2$：

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4-\sqrt{2}\,gv\,t^3+\big((1+e^2)v^2+\sqrt{2}\,rg\big)t^2-2(1+e)rv\,t=0.$$

除以 $t\neq 0$ 后剩下一条三次方程（cubic）。现在

$$\frac{z}{c}=\frac{vt}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2}=\frac{gt}{\sqrt{2}\,v},\qquad \text{所以}\qquad t=\frac{\sqrt{2}\,v}{g}\cdot\frac{z}{c}.$$

代入此式，并把整条三次方程除以 $\sqrt{2}\,v^3/g$。记 $w=z/c$，各项变为

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3,\\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2,\\
\big((1+e^2)v^2+\sqrt{2}\,rg\big)t &\longrightarrow \Big(1+e^2+\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\Big)w=\Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)w,\\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e)=-\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

其中用到 $\dfrac{2}{c}=\dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2}=\dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$。这就是所求的方程

$$\Big(\frac{z}{c}\Big)^3-2\Big(\frac{z}{c}\Big)^2+\Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)\Big(\frac{z}{c}\Big)-\frac{2}{c}(1+e)=0.$$

第 (iv) 部分

若关于 w 的三次方程有三重根 α，它必定是 $(w-\alpha)^3=w^3-3\alpha w^2+3\alpha^2w-\alpha^3$。比较系数，

$$3\alpha=2,\qquad 3\alpha^2=\frac{2}{c}+1+e^2,\qquad \alpha^3=\frac{2}{c}(1+e).$$

所以 $\alpha=\frac{2}{3}$。记 $k=2/c$。于是 $k=\frac{4}{3}-1-e^2=\frac{1}{3}-e^2$，而最后一条方程变为

$$\Big(\tfrac{1}{3}-e^2\Big)(1+e)=\tfrac{8}{27}\iff 27e^3+27e^2-9e-1=0\iff(3e-1)(9e^2+12e+1)=0.$$

二次因式的根是 $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$,两者都是负数,所以不可能是恢复系数(coefficient of restitution)。因此 $e=\frac{1}{3}$。于是 $k=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$，所以 $c=9$，并且

$$v^2=\frac{c\,rg}{\sqrt{2}}=\frac{9rg}{\sqrt{2}}=\tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

正如所求。

想一想 重根说明了运动的甚么特点?

设 $D(t) = x^2 + y^2 - r^2$。除一个正因子外，D 等于 $w(w-\alpha)^3$。当 $0 < w < \alpha$ 时它是负数，所以在绳子拉紧之前，P 一直严格位于自己的圆内。由于 α 是重根（repeated root），在该处亦有 $D' = 0$。但 $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$，所以在那一刻，沿绳子方向的速度分量是零：质点到达时正沿着圆周运动。冲击张力会沿绳子方向作用，只有在需要消除沿绳子方向的速度分量时才会出现。这里没有这样的分量，所以没有冲量，速度不变，也没有动能损失。

第 (v) 部分

能量只在碰撞中损失。从碰撞到圆周最低点之间，只有重力做功：飞行期间没有张力，拉紧时没有急扯，之后张力又与运动方向垂直。碰撞刚结束时，速率的平方是

$$\frac{e^2v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

而质点位于其最低点之上 $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处。因此

$$U^2 = \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}rg.$$

我们还应检查绳子在下摆途中一直保持拉紧。当 $w = \frac{2}{3}$ 时，$t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$。代入后得位置 $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ 及速度 $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$。所以 P 在远离 B 的一侧、水平线以上 45° 处重新回到自己的圆周上，速率的平方为 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$。在该处沿指向 A 的方向分解，

$$T + mg\sin 45^\circ = \frac{m}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad T = 0,$$

所以绳子拉紧时张力为零。当 P 向下摆动时，其速率增加，而重力向内的分量减少，所以此后 $T > 0$。质点沿圆周一直摆到最低点；若从这一点起用能量计算，也得到相同的 U^2 值：$\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$。

验算

- 取 $r = 1$ 及 $g = 9.81$，以电脑逐步模拟飞行和圆周摆动，得 $U^2 \approx 40.430$。这与 $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{2})g \approx 40.430$ 吻合，而且在整个摆动过程中张力一直非负。
- 求 U^2 的两条途径（从碰撞点出发，以及从绳子拉紧的位置出发）结果一致。
- 若 $e = 1/3$ 且 $c = 9$，则 $w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$ 准确成立。

常见错误

- 把上升的高度当作 $r\cos 45°$（即悬点以下的深度），而不是 $r - r\cos 45°$。
- 把恢复定律应用于整个速度。只有沿连心线的分量（这里是水平分量）会受影响。
- 忘记排除关于 e 的三次方程的负根。

STEP 之外

重根条件表示两条曲线（抛射体的抛物线和圆）以高阶相切：它们相交、有共同的切线，而在这里甚至有相同的曲率（curvature），这正是绳子拉紧时张力恰好为零的原因。接触阶（order of contact）和密切圆（osculating circle）会在大学一年级的曲线及微分几何（differential geometry）课程中出现。冲击约束（impulsive constraint）以及它们何时会耗散能量，是动力学中的标准课题。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是看这些概念如何发展的好去处。

详细解答

STEP II 2025，第 10 题

力学 · 刚杆的静力学

STEP II 2025，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

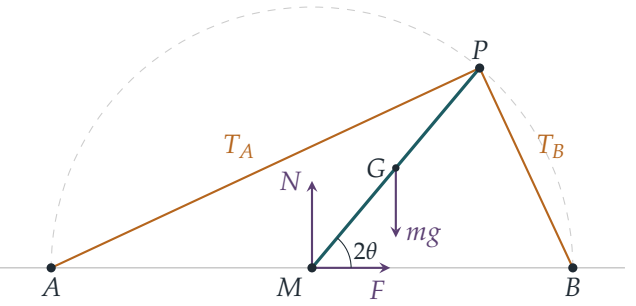
关键思路

由于 $MA = MB = MP = a$，点 P 位于以 AB 为直径的圆上，而整道题正是由这一个观察推动的：它给出 P 处的直角、以 θ 表示的绳长，以及每条绳与杆所成的角。根据胡克定律（Hooke's law），张力（tension）为 $\lambda(\text{长度} - \ell)/\ell$，它自然地分拆成“$\lambda \times \text{长度}/\ell$”部分和常数“$-\lambda$”部分；这个分拆正是第 (i) 部分所要求的分解。之后，只要对适当选取的点取力矩（moment），就能消去我们不需要的力。

解答

把杆模型化为均匀（uniform）刚性杆，其重量 mg 作用于中点 G；把绳模型化为遵从胡克定律的轻弹性绳（light elastic string）。把 M 置于原点，$B = (a, 0)$，$A = (-a, 0)$，于是

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$



（图中摩擦力 F 的方向会在第 (iii) 部分加以说明。）

第 (i) 部分

由于 $MA = MB = MP = a$，点 P 位于以 M 为圆心、AB 为直径的圆上。根据半圆上的圆周角定理（angle in a semicircle），$\angle APB = 90°$。

绳长。三角形 MPA 是等腰三角形(isosceles),$MP = MA$,顶角 $\angle PMA = 180° - 2\theta$,因此两个底角为 $\angle MPA = \angle MAP = \theta$。同理, 三角形 MPB 的顶角为 2θ, 所以 $\angle MPB = 90° - \theta$。在直角三角形 APB 中，斜边（hypotenuse）$AB = 2a$，且 $\angle PAB = \theta$，故

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

由于 $\theta < 45°$，有 $PB < PA$；两条绳都处于张紧状态，所以 $2a\sin\theta > \ell$。

分拆力。设 $\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 为由 P 分别指向 A 和 B 的单位向量（unit vector）。根据胡克定律, 绳 PA 的张力为 $\lambda(PA - \ell)/\ell$，因此它在 P 点施于杆上的力为

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

PB 的情况亦然。把两者相加,

$$\text{绳的合力} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

由于 M 是 AB 的中点，$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$，而 $|\overrightarrow{PM}| = a$。所以第一项是沿杆方向（指向 M）、大小为 $2a\lambda/\ell$ 的力。

至于第二项, $\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 是互相垂直的单位向量 (P 处的角是直角), 所以 $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$ 是单位正方形的对角线: 其长度为 $\sqrt{2}$, 方向沿 $\angle APB$ 的角平分线 (bisector)。因此 $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$ 是沿 $\angle APB$ 的角平分线（指离 AB）、大小为 $\sqrt{2}\,\lambda$ 的力。这就是所求的分解。

第 (ii) 部分

对 M 取力矩；该处的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）没有力矩。以逆时针方向为正（B 位于右方）。

想一想 M 与每条绳所在直线的距离是多少?

直线 PA 与 PM 所成的角为 $\angle MPA = \theta$，而 $PM = a$，所以 M 到直线 PA 的垂直距离为 $a\sin\theta$。同理，M 到直线 PB 的距离为 $a\sin(90° - \theta) = a\cos\theta$。重量作用于 M 右方水平距离 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ 处。

绳 PA 把 P 拉向 A（绕 M 逆时针）；PB 和重量则使杆顺时针转动。以 T_A、T_B 表示两条绳的张力,

$$T_A\,a\sin\theta \;=\; T_B\,a\cos\theta + mg\cdot\tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

代入 $T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$ 和 $T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$,

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\big(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\big) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

(这其实就是那个大小为 $\sqrt{2}\lambda$、沿角平分线的力的力矩，因为沿杆方向的力对 M 没有力矩。) 于是力矩方程变为

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

由于 $0 < \theta < 45°$，有 $\cos\theta - \sin\theta > 0$，所以可以两边除以它:

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ 的范围。写成 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$。杆与地面倾斜，所以 $0 < \theta < 45°$，即 $45° < \theta + 45° < 90°$，在此范围内 sin 由 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 严格递增至 1。因此

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

这就是这种平衡（equilibrium）存在的必要条件（necessary condition）。

第 (iii) 部分

> **想一想** 对哪一点取力矩，能使两条绳的力都从力矩方程中消失?

两条绳都作用于 P, 所以对 P 取力矩: 这样方程中只出现重量和 M 处的两个地面作用力。相对于 P，点 M 位于水平距离 $a\cos 2\theta$（向左）及垂直距离 $a\sin 2\theta$（向下）处；G 的相应距离则为其一半。

假设摩擦力 F 指向 B（下文会加以证实)。对 P 取力矩:

- N（在 M 处向上，位于 P 左方）的顺时针力矩为 $N\,a\cos 2\theta$;
- F（在 M 处指向 B，位于 P 下方）的逆时针力矩为 $F\,a\sin 2\theta$;
- mg（在 G 处向下，位于 P 左方）的逆时针力矩为 $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$。

平衡时,

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

由于 $2\theta < 90°$，有 $\cos 2\theta > 0$，两边除以 $a\cos 2\theta$ 得

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

此即所求。

摩擦力的方向。沿水平方向分解，F 与绳力的水平分量平衡。由第 (i) 部分，$\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$，$\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$，而 $\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$，所以绳力的水平分量为 $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$。因此指向 B 的摩擦力为

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

由于 $2a\sin\theta > \ell$（两条绳都张紧），它是正数。所以摩擦力确实指向 B，而 F 就是其大小。

验算

- 第 (ii) 部分的极限情况合理：当 $\theta \to 0$，杆几乎平躺，$\lambda \to \frac{1}{2}mg$；当 $\theta \to 45°$，杆变为铅直，$\lambda \to mg/\sqrt{2}$。
- 数值验算：取 $a = 1$、$mg = 10$、$\theta = 20°$、$\ell = 0.5$，则 $\lambda = 5(\cos 20° + \sin 20°) \approx 6.408$，张力为 $T_A \approx 17.68$ 及 $T_B \approx 2.36$，分解后得 $N \approx 18.26$、$F \approx 15.81$，所以 $N - F\tan 40° \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$。对 M 的力矩亦平衡。以电脑对数千个随机构形进行验算，所有结果在舍入误差范围内均成立。

常见错误

- 把张力写成 $\lambda \times$ 伸长量，而不是 $\lambda \times$ 伸长量$/\ell$。
- 除以 $\cos\theta - \sin\theta$ 或 $\cos 2\theta$ 时，没有指出 $\theta < 45°$ 使它们为正。
- 在第 (iii) 部分对 M 取力矩：这样会消去 N 和 F，而它们恰恰是我们想求的力。对 P 取力矩则会消去绳的力。

STEP 之外

第 (i) 部分的分拆是一个一般事实的巧妙例子：作用于刚体（rigid body）上的一组力，等价于单一个力加上一个力偶（couple），而你可以随意把各力分组，使力矩的计算最为简便。这里“每条绳 $-\lambda$”的部分，表现得就像一对张力恒定的绳，其合力完全由几何决定。刚体静力学（statics）、虚功（virtual work）及平衡的稳定性，在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）中有深入的讨论。

详细解答

STEP II 2025，第 11 题

概率与统计 · 期望值与二项式求和

STEP II 2025，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

两个游戏都在第一次掷出 $2k$ 时结束，所以两者都可以写成对掷骰次数 r 的求和。Ali 的和近似几何级数（geometric series），而第 (i) 部分正是计算掷骰次数期望值（expected value）所需的工具。至于 Zen，一局胜出的游戏由 $2k$ 之前出现了哪些数字决定，因为一旦知道这个集合，递增的次序就随之确定。数算这些集合会引入二项式系数（binomial coefficients），所以这个和就是第 (iii) 部分的那个和。

解答

第 (i) 部分

当 $|x| < 1$ 时，几何级数给出

$$\sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{1}{1-x}.$$

幂级数（power series）在其收敛区间（interval of convergence）内可以逐项微分（differentiate term by term），因此两边对 x 求导，得

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^{r-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

即为所求。

第 (ii) 部分

每一次掷骰的结果可分为三类：

$$\mathrm{P}(\text{掷出}2k) = \frac{1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{偶数，但不是}2k) = \frac{k-1}{2k}, \qquad \mathrm{P}(\text{奇数}) = \frac{1}{2}.$$

设 R 为掷骰次数。Ali 以 $R = r$ 胜出，当且仅当第 $1, \ldots, r-1$ 次掷出的都是 $2k$ 以外的偶数，而第 r 次掷出 $2k$。各次掷骰互相独立（independent），所以设 $x = \dfrac{k-1}{2k}$，便有

$$\mathrm{P}(\text{Ali 胜出且} R = r) = \frac{1}{2k}\, x^{r-1}.$$

(a) 对几何级数求和（注意 $0 \le x < 1$）：

$$\mathrm{P}(\text{Ali 胜出}) = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{2k}{k+1} = \frac{1}{k+1}.$$

这个结果有一个快捷的看法。$2k$ 以外的偶数不影响结果，可以不理会。游戏的胜负取决于奇数和 $2k$ 哪一个先出现。共有 k 个奇数面和一个 $2k$ 面，出现机会均等，所以 $2k$ 先出现的概率是 $\frac{1}{k+1}$。

(b) 若 Ali 以 $R = r$ 胜出，他赚得 £r，否则一无所得，所以由第 (i) 部分，

$$\mathrm{E}(\text{Ali 的收入}) = \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot \frac{1}{2k}\, x^{r-1} = \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2k}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2 = \frac{2k}{(k+1)^2} \text{ 英镑.}$$

第 (iii) 部分

把该表达式记为 S。它的通项是 $(r+1)\binom{n}{r}x^r$，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。因子 $r+1$ 提示我们对 x^{r+1} 求导：

$$S = \sum_{r=0}^{n} (r+1)\binom{n}{r} x^r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{r+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(x(1+x)^n\Big),$$

这里用了二项式定理（binomial theorem）。由乘积法则（product rule），

$$S = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} = (1+x)^{n-1}\big(1 + (n+1)x\big).$$

第 (iv) 部分

假设 Zen 恰好掷了 r 次而胜出。最后一次掷出 $2k$，而首 $r-1$ 次掷出的是取自 $\{1, 2, \ldots, 2k-1\}$ 的严格递增（strictly increasing）的数。（无论如何它们都必须小于 $2k$，因为游戏在第一次掷出 $2k$ 时便停止。）

> **想一想** 长度为 r 的胜出序列有多少个?

一个严格递增序列，只要知道其中出现了哪些数，便完全确定，因为把一组互不相同的数按递增次序排列只有一种方法。所以长度为 r 的胜出序列与 $\{1, \ldots, 2k-1\}$ 的 $(r-1)$ 元子集（subset）一一对应。这样的子集共有 $\binom{2k-1}{r-1}$ 个，且 $1 \le r \le 2k$。

每一个特定的 r 次掷骰序列的概率都是 $\left(\frac{1}{2k}\right)^r$。因此

$$\mathrm{E}(\text{Zen 的收入}) = \sum_{r=1}^{2k} r\binom{2k-1}{r-1}\left(\frac{1}{2k}\right)^r = \frac{1}{2k}\sum_{j=0}^{2k-1}(j+1)\binom{2k-1}{j}\left(\frac{1}{2k}\right)^j,$$

其中 $j = r - 1$。这正是第 (iii) 部分中 $n = 2k - 1$、$x = \frac{1}{2k}$ 时的和，此时 $1 + (n+1)x = 1 + 2k \cdot \frac{1}{2k} = 2$。所以

$$\text{E(Zen 的收入)} = \frac{1}{2k}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \cdot 2 = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \text{ 英镑.}$$

第 (v) 部分

把 Zen 的预期收入除以 Ali 的预期收入：

$$\rho = \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k-2} \cdot \frac{(k+1)^2}{2k} = \frac{(k+1)^2}{2k^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}}{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^2}.$$

现在设 k 很大。那么

- $\dfrac{(k+1)^2}{k^2} = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)^2 \approx 1$；
- $\left(1 + \dfrac{1}{2k}\right)^2 \approx 1$；
- 由题目给出的近似式，取 $n = 2k$，得 $\left(1 + \dfrac{1}{2k}\right)^{2k} \approx \mathrm{e}$。

所以

$$\rho \approx \frac{\mathrm{e}}{2} \approx \frac{2.71828}{2} = 1.359\ldots,$$

即当 k 很大时，Zen 的预期收入约为 Ali 的 1.359 倍，也就是多出稍高于 35%，即为所求。

验算

- 当 $k = 1$ 时，骰子就是一枚两面为 1, 2 的硬币。Ali 只有在第一次掷出 2 时才胜出，概率为 $\frac{1}{2} = \frac{1}{k+1}$，此时赚得 £1，所以预期收入为 $\frac{1}{2} = \frac{2k}{(k+1)^2}$。Zen 以序列 2（概率 $\frac{1}{2}$，赚得 £1）和 1, 2（概率 $\frac{1}{4}$，赚得 £2）胜出，所以她的预期收入是 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$。公式与此吻合：$k = 1$ 时指数 $2k - 2$ 为 0，所以公式给出 $\frac{1}{1} \cdot 1 = 1$。
- 当 $k = 3$ 时，Ali 的预期收入是 $\frac{3}{8}$，Zen 的是 $\frac{1}{3}\left(\frac{7}{6}\right)^4 = \frac{2401}{3888} \approx 0.618$。两者都与直接列举所有胜出序列的结果相符，也与游戏的电脑模拟结果相符。
- 比率 ρ 在 $k = 10$ 时约为 1.456，在 $k = 100$ 时约为 1.369，在 $k = 10^4$ 时约为 1.3592。它递减趋向 $\mathrm{e}/2 = 1.35914\ldots$。

常见错误

- 在第 (iv) 部分用阶乘去数有序序列，而不是数子集。每个集合只有一种递增排列。
- 忘记 Zen 游戏中较早的掷骰不能包含 $2k$。这使范围变成 $\{1,\ldots,2k-1\}$，所以 $n = 2k-1$，而不是 $2k$。
- 在第 (ii) 部分把继续游戏的概率写成 $\frac{k}{2k}$，而不是 $\frac{k-1}{2k}$。掷出 $2k$ 虽然是偶数，但它会结束游戏。

STEP 之外

第 (iii) 部分是*生成函数*（generating functions）的一个小例子：把一个数列编码为一个幂级数的系数，然后对这个级数运用微积分。概率生成函数（probability generating functions）把这个想法更进一步。若 $G(s) = \mathrm{E}(s^X)$，则 $\mathrm{E}(X) = G'(1)$，这正是本题两次用到的求导技巧。极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$ 在概率论中随处可见，例如以泊松分布近似二项分布（Poisson approximation to the binomial）。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）有一章很好地讲解生成函数。

详细解答

STEP II 2025，第 12 题

概率与统计 · 泊松分布

STEP II 2025，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

对于泊松分布（Poisson distribution），相邻两项概率的比有简单的形式 $p_r/p_{r-1} = \lambda/r$，因此每一个差（difference）d_r 都可以写成某个已知概率乘以一个关于 r 的简单有理因子。d_r 的正负号告诉我们 p_r 在哪里上升、在哪里下降；再深入一层，二阶差分（second difference）$d_{r+1} - d_r$ 的正负号告诉我们 d_r 在哪里上升、在哪里下降，而这个正负号由一个关于 r 的二次式（quadratic）决定。那个看似古怪的数 $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$，其实只不过是该二次式的一个根（再加一）。

解答

全文中 $p_r = \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^r/r!$，所以当 $r \geq 1$ 时

$$p_r = \frac{\lambda}{r}\,p_{r-1}, \qquad p_{r-1} = \frac{r}{\lambda}\,p_r,$$

而且每个 p_r 都严格为正。

第 (i) 部分

当 $r \geq 1$ 时，

$$d_r = p_r - p_{r-1} = p_{r-1}\left(\frac{\lambda}{r} - 1\right) = \frac{p_{r-1}}{r}\,(\lambda - r).$$

由于 $p_{r-1}/r > 0$，d_r 的正负号与 $\lambda - r$ 的正负号相同；又因为 λ 不是整数，d_r 永不为零。设 $m = \lfloor \lambda \rfloor$，即小于 λ 的最大整数，于是 $\lambda - 1 < m < \lambda$（由于 $\lambda \notin \mathbb{Z}$，两个不等式（inequality）都是严格的）。那么

- 当 $1 \leq r \leq m$ 时，$r < \lambda$，所以 $d_r > 0$，且 $p_0 < p_1 < \cdots < p_m$；

▶ 当 $r \geq m+1$ 时，$r > \lambda$，所以 $d_r < 0$，且 $p_m > p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots$。

（若 $\lambda < 1$，则 $m = 0$，第一组为空。）因此对每个 $r \neq m$ 都有 $p_r < p_m$：m 是唯一的最可能取值，而且 $\lambda - 1 < m < \lambda$。

第 (ii) 部分

现在看看 d_r 本身如何变化。当 $r \geq 1$ 时，设 $e_r = d_{r+1} - d_r = p_{r+1} - 2p_r + p_{r-1}$。把所有项都用 p_r 表示，

$$e_r = p_r\left(\frac{\lambda}{r+1} - 2 + \frac{r}{\lambda}\right) = \frac{p_r}{\lambda(r+1)}\Big(\lambda^2 - 2\lambda(r+1) + r(r+1)\Big).$$

前面的因子为正，所以 e_r 的正负号与下式相同：

$$Q(r) = r^2 + (1-2\lambda)r + \lambda^2 - 2\lambda.$$

这个二次式的判别式（discriminant）是 $(1-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 2\lambda) = 1 + 4\lambda$，所以它的根是

$$\alpha = \lambda - \tfrac{1}{2} - \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}}, \qquad \beta = \lambda - \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}},$$

而 $Q(r) < 0$ 恰好当 $\alpha < r < \beta$。因此

$$d_{r+1} < d_r \iff \alpha < r < \beta, \qquad d_{r+1} > d_r \iff r < \alpha \text{ 或 } r > \beta.$$

注意 $\beta + 1 = \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$ 不是整数，所以 β 也不是整数，而 $k = \lfloor \beta + 1 \rfloor = \lfloor \beta \rfloor + 1$ 正是满足下式的整数：

$$k < \lambda + \tfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \tfrac{1}{4}} < k + 1.$$

? **想一想** 既然 $r < \alpha$ 时 d_r 也是递增的，我们到底应该在哪里寻找 d_r 的最小值?

由第 (i) 部分，$r < \lambda$ 时 $d_r > 0$，$r > \lambda$ 时 $d_r < 0$，所以最小值必定在负项之中，即 $r \geq m+1$。此外 $\beta > \lambda$（因为 $\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$）而 $\alpha < \lambda$，所以每个 $r \geq m+1$ 都满足 $r > \alpha$；而由 $k > \beta > \lambda$ 可得 $k \geq m+1$。因此在整数 $r \geq m+1$ 上：

▶ 当 $m+1 \leq r \leq k-1$ 时：$r < \beta$，所以 $e_r < 0$，得 $d_{m+1} > d_{m+2} > \cdots > d_k$；

▶ 当 $r \geq k$ 时：$r > \beta$，所以 $e_r > 0$，得 $d_k < d_{k+1} < d_{k+2} < \cdots$。

（当 $k = m+1$ 时，第一组为空。）所以 d_k 严格小于其他每一个负的 d_r，当然也小于所有正项。d_r 的最小值出现在 $r = k$，正如所求。换言之：p_r 在 $r = k-1$ 与 $r = k$ 之间下降得最陡。

第 (iii) 部分

首先, 若 $\lambda < 1$, 则由第 (i) 部分, 每个 d_r 都是负数。但当 $r \to \infty$ 时 $d_r \to 0$ (因为 $p_r \to 0$), 所以对任何 r，总有后面的某一项比 d_r 大：最大值根本无法取得，更不会在 $r = 1$ 取得。因此我们需要 $\lambda > 1$（由于 λ 不是整数，$\lambda = 1$ 已被排除)。

现设 $\lambda > 1$，于是 $d_1 > 0$。正项为 $d_1, \ldots, d_m$，任何最大值都在它们之中。

- 若最大值在 $r = 1$，则 $d_2 < d_1$，即 $e_1 < 0$。
- 反之，若 $e_1 < 0$，则 $\alpha < 1 < \beta$，所以每个满足 $1 \leq r < \beta$ 的整数 r 都有 $e_r < 0$。由于 $m < \lambda < \beta$，得 $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$，而其后各项都是负数。所以最大值在 $r = 1$。

因此，当 $\lambda > 1$ 时，最大值在 $r = 1$ 恰好当 $e_1 < 0$，即当 $Q(1) < 0$:

$$Q(1) = 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 2 < 0 \iff 2 - \sqrt{2} < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

结合 $\lambda > 1$（以及 $2 - \sqrt{2} < 1$)，条件为

$$1 < \lambda < 2 + \sqrt{2}.$$

第 (iv) 部分

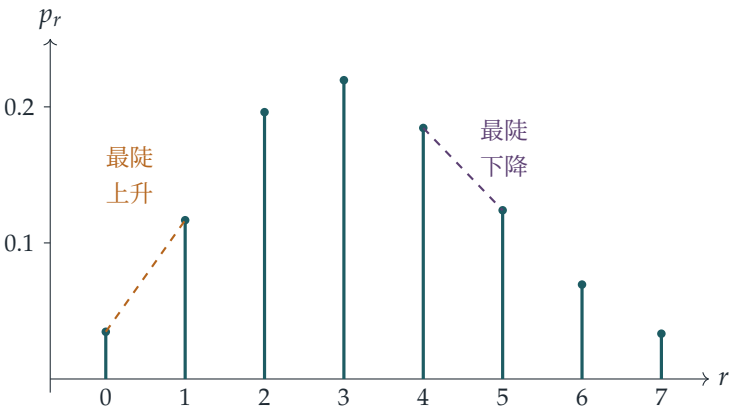
当 $\lambda = 3.36$ 时，$\lambda + \frac{1}{4} = 3.61 = 1.9^2$，所以:

- 由第 (i) 部分，众数（mode）是 $m = 3$;
- $\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} = 3.86 + 1.9 = 5.76$，所以 $k = 5$：最陡的下降是由 p_4 到 p_5;
- $1 < 3.36 < 2 + \sqrt{2} \approx 3.41$，所以最陡的上升是由 p_0 到 p_1（只是刚刚好：$\alpha = 0.96$ 很接近 1，所以 d_1 与 d_2 几乎相等)。

利用 $p_r = \frac{3.36}{r} p_{r-1}$ 及 $p_0 = \mathrm{e}^{-3.36} \approx 0.035$，得出近似值

$$p_0, \ldots, p_7 \approx 0.035,\ 0.117,\ 0.196,\ 0.220,\ 0.185,\ 0.124,\ 0.069,\ 0.033.$$

草图应显示：一开始就急升，然后逐渐平缓，在 $r = 3$ 达到峰值；随后下降越来越陡，在 $r = 4$ 与 $r = 5$ 之间最陡，之后再渐趋平缓。



验算

- 对 20,000 个随机的 $\lambda \in (0, 40)$ 计算 p_r 及 d_r，证实众数是 $\lfloor \lambda \rfloor$，d_r 的最小值在 $\lfloor \lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \rfloor$，而且（当 $\lambda > 1$ 时）d_r 的最大值在 $r = 1$ 恰好当 $\lambda < 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$。
- 当 $\lambda = 3.36$：$d_1 \approx 0.0820$ 而 $d_2 \approx 0.0794$，所以 d_1（以些微之差）是最大的；$d_4, d_5, d_6 \approx -0.035, -0.061, -0.055$，所以 d_5 是最小的，与预测一致。
- 小的 λ：当 $\lambda \to 0$ 时，$\lambda + \frac{1}{2} + \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}} \to 1$，所以 $k = 1$。事实上，此时几乎所有概率都集中在 0，最大的下降就是第一个，即 $p_1 - p_0$。

常见错误

- 忘记 d_r 在 $r < \alpha$ 时也是递增的，因而没有解释为何最小值不可能在该区域（那是 $d_r > 0$ 的区域）。
- 在第 (iii) 部分只检查 $d_2 < d_1$，而漏掉 $\lambda < 1$ 的情况——此时每个 d_r 都是负数，数列根本取不到最大值。
- 写成 $\lambda - 1 \leq m \leq \lambda$：正正因为 λ 不是整数，这些不等式才是严格的。

STEP 之外

差 d_r 与 e_r 是一阶及二阶导数（derivative）的离散版本，而 k 标示了泊松分布的一个离散“拐点”（point of inflection）。当 λ 很大时，泊松分布近似于平均值为 λ、标准差（standard deviation）为 $\sqrt{\lambda}$ 的正态分布（normal distribution），而后者的拐点位于 $\lambda \pm \sqrt{\lambda}$；可与这里的 $\alpha, \beta \approx \lambda \pm \sqrt{\lambda}$ 比较。利用比值 p_r / p_{r-1} 的技巧是求离散分布众数的标准方法，在 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》），或 Blitzstein 与

Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）中有更深入的探讨。

详细解答

STEP III 2025，第 1 题

纯数学 • Beta 函数积分

> **STEP III 2025，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

这里用到的每一步，不是代换（substitution），就是恒等式（identity）$x+(1-x)=1$。反射 $x \mapsto 1-x$ 会把 p 和 q 的角色互换；用 $x+(1-x)$ 拆开被积函数（integrand），可以把相邻的值联系起来；$x=\sin^2\theta$ 把积分化成三角积分；而 $x=t/(1+t)$ 则把 $[0,1)$ 拉伸到 $[0,\infty)$。最后那个积分就是把前面的结果串连起来，最终化为一个可以亲手计算的 $\sin^4\theta$ 积分。

解答

第 (i) 部分

代入 $u=1-x$，于是 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，而 $x=0,1$ 分别对应 $u=1,0$：

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

第 (ii) 部分

把右方的两个积分相加，

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\big[x+(1-x)\big]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q),\end{aligned}$$

移项即得 $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$。

现在设 $q=p$。由第 (i) 部分，$\mathrm{b}(p,p+1)=\mathrm{b}(p+1,p)$，所以

$$\mathrm{b}(p+1,p)=\mathrm{b}(p,p)-\mathrm{b}(p+1,p)\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{b}(p+1,p)=\tfrac{1}{2}\mathrm{b}(p,p).$$

第 (iii) 部分

设 $x=\sin^2\theta$, 则 $\mathrm{d}x=2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, 且 $1-x=\cos^2\theta$。当 θ 由 0 变到 $\frac{1}{2}\pi$ 时, x 由 0 递增至 1, 而且 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是非负的, 因此 $x^{p-1}=(\sin\theta)^{2p-2}$ 及 $(1-x)^{q-1}=(\cos\theta)^{2q-2}$, 正负号不会出问题。因此

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

至于第二个结果，取 $q=p$，并利用 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$:

$$\mathrm{b}(p,p)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta=2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta=2^{1-2p}\int_0^{\pi}(\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\phi=2\theta$。

> **想一想** 怎样才能回到一个在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上、形如 $\mathrm{b}(p,\cdot)$ 的积分?

$\sin\phi$ 在 $[0,\pi]$ 上的图像关于 $\phi=\frac{1}{2}\pi$ 对称(代入 $\phi\mapsto\pi-\phi$ 即可见),所以在 $[0,\pi]$ 上的积分是在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上积分的两倍。此外, 在三角形式中取 $q=\frac{1}{2}$, 便有 $(\cos\theta)^{2q-1}=(\cos\theta)^0=1$, 得

$$\mathrm{b}\left(p,\tfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\mathrm{b}(p,p)=2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi=2^{1-2p}\,\mathrm{b}\left(p,\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}\left(p,\tfrac{1}{2}\right),$$

正是所求。

第 (iv) 部分

我们希望当 t 由 0 变到 ∞ 时，x 由 0 变到 1，同时 $1-x$ 的形式要简单；$x=\dfrac{t}{1+t}$ 两者兼备，且

$$1-x=\frac{1}{1+t},\qquad \mathrm{d}x=\frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}.$$

当 t 由 0 递增至 ∞ 时，x 由 0 递增并趋向 1。所以

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

第 (v) 部分

把被积函数与第 (iv) 部分对照：$p-1=\frac{3}{2}$ 且 $p+q=6$，所以 $p=\frac{5}{2}$，$q=\frac{7}{2}$。这个积分就是 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$，我们逐步把它化简：

$$\begin{aligned}\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}\right) &= \mathrm{b}\left(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{由 (i)}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}\right) && \text{由 (ii)，取} p=\tfrac{5}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) && \text{由 (iii)，取} p=\tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

最后，由三角形式取 $p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{1}{2}$，

$$\mathrm{b}\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

两次使用 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$，

$$\sin^4\theta=\tfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right)=\tfrac{1}{8}\left(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta\right).$$

余弦项在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上的积分为零（它们的原函数（antiderivative）$\sin 2\theta$ 和 $\sin 4\theta$ 在两个端点都等于零），所以 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3\pi}{16}$，而 $\mathrm{b}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{8}$。因此

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{256}.$$

验算

- 取 $p=q=1$，由定义得 $\mathrm{b}(1,1)=1$，而 (ii) 给出 $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$，与直接计算 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 的结果吻合。
- 同样取 $p=1$，第 (iii) 部分说 $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$。结果一致。
- 数值上，$3\pi/256\approx 0.036816$，而用电脑直接对 $t^{3/2}/(1+t)^6$ 在 $[0,\infty)$ 上作数值积分，结果在很多位小数上都吻合。再粗略检查一下大小：被积函数在 $t=\frac{1}{3}$ 处达到峰值，约为 0.034，其“隆起”部分的宽度约为 1 的数量级，所以积分值为百分之几是合理的。

常见错误

- 在 (iv) 中，忘记了 $\mathrm{d}x$ 带来的因子 $(1+t)^{-2}$，结果得出错误的幂 $p+q-2$。
- 在 (iii) 中，只在 θ 的区间 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上积分 $(\sin 2\theta)^{2p-1}$，却忘记了 $\phi=2\theta$ 会令积分范围加倍、并令 $\mathrm{d}\theta$ 减半。
- 在 (v) 中，把 p 对应到指数 $\frac{3}{2}$，而不是 $\frac{3}{2}+1$。

STEP 之外

函数 b(p,q) 就是欧拉（Euler）的 beta 函数（beta function），通常记作 $B(p,q)$。它与 gamma 函数（gamma function）的关系是 $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$，而第 (iii) 部分的结果正是 Γ 的勒让德（Legendre）倍元公式（duplication formula）的一种形式；利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，一行便可重新得出 $3\pi/256$。beta 函数在概率论中亦有出现，它是 beta 分布（beta distribution）的归一化常数（normalising constant）。想进一步了解这类积分，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）；关于 beta 分布，则可参阅 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）。

详细解答

STEP III 2025，第 2 题

纯数学 · 迭代函数与周期性

STEP III 2025，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 8.8 节周期三蕴含混沌中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/period-three.html

关键思路

本题所有函数都由直线段组成，所以整道题的关键在于清楚掌握自己身处哪一段。逐段求出 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 和 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$，利用内层函数的正负号去掉每个绝对值（modulus）。然后倒过来理解有关数列的问题：$\mathrm{f}^n(x) = x$ 的解是一个经过 n 步后回到自身的起始值；而每个小于 7 的数在 f 下恰好有两个原像（preimage），且两者互为相反数。

解答

以下记 $\mathrm{f}^2(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 和 $\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$。由于 f 只取决于 $|x|$，三个函数都是偶函数（even function），所以只需处理 $x \geq 0$ 的情况，再关于 y 轴作反射即可。

第 (i) 部分

(a) $y = \mathrm{f}(x)$ 的图像是一个倒 V 形，顶点为 $(0, 7)$，斜率（gradient）为 ∓ 2，与 x 轴相交于 $x = \pm\frac{7}{2}$。

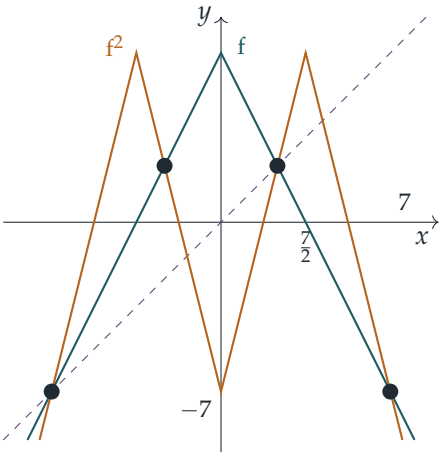
求 f^2 时需要知道 $\mathrm{f}(x)$ 的正负号。若 $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$，则 $\mathrm{f}(x) = 7 - 2x \geq 0$，所以

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

若 $x \geq \frac{7}{2}$，则 $\mathrm{f}(x) \leq 0$，所以 $|\mathrm{f}(x)| = 2x - 7$，且

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

因此 $y = \mathrm{f}^2(x)$ 呈 W 形：在 $x = 0$ 处的值为 -7，在 $x = \pm\frac{7}{2}$ 处（正是 f 等于零的位置）有高度为 7 的峰，斜率为 ± 4，x 截距为 $\pm\frac{7}{4}$ 和 $\pm\frac{21}{4}$。解 $7 - 2x = 4x - 7$ 和 $7 - 2x = 21 - 4x$，可知两条图像相交于 $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ 和 $(\pm 7, -7)$。



（青色：$y = \mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y = \mathrm{f}^2(x)$；虚线：$y = x$。）

(b) 我们在四段上分别求解，只保留落在相应范围内的根。

- $0 \le x \le \frac{7}{2}$：由 $4x - 7 = x$ 得 $x = \frac{7}{3}$，在范围内。
- $x \ge \frac{7}{2}$：由 $21 - 4x = x$ 得 $x = \frac{21}{5} = 4.2$，在范围内。
- $-\frac{7}{2} \le x \le 0$：此时 $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$，由 $-4x - 7 = x$ 得 $x = -\frac{7}{5}$，在范围内。
- $x \le -\frac{7}{2}$：此时 $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$，由 $21 + 4x = x$ 得 $x = -7$，在范围内。

所以 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 恰好有四个解：

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}.$$

(c) 数列的周期（period）为 2，当且仅当 $u_2 = u_0$，即 $\mathrm{f}^2(a) = a$，但 $u_1 \ne u_0$，即 $\mathrm{f}(a) \ne a$。

想一想 (b) 的四个答案是否都给出周期为 2 的数列?

不是。其中两个是 f 本身的不动点（fixed point）：$\mathrm{f}(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$ 与 $\mathrm{f}(-7) = 7 - 14 = -7$。它们给出常数数列，周期为 1。另外两个则互相交换：

$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad \mathrm{f}\left(\tfrac{21}{5}\right) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

所以数列的周期为 2，当且仅当 $a = -\frac{7}{5}$ 或 $a = \frac{21}{5}$。

(d) 取 $a = \frac{28}{5}$，

$$u_1 = 7 - \tfrac{56}{5} = -\tfrac{21}{5}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}, \qquad u_3 = \mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = \tfrac{21}{5}.$$

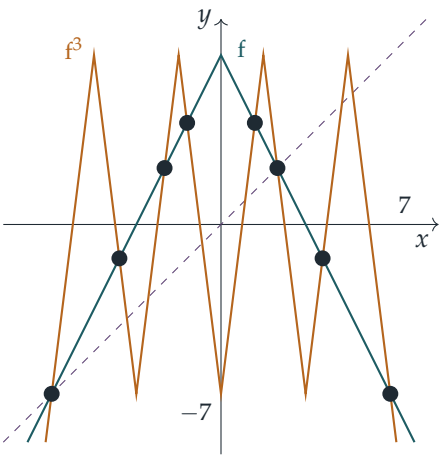
从 u_2 起，该数列就是 (c) 部分中以 $-\frac{7}{5}$ 为起点的数列，所以 $u_2, u_3, u_4, \ldots$ 为 $-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, \ldots$，周期为 2。最后，$u_0 = \frac{28}{5}$ 和 $u_1 = -\frac{21}{5}$ 都与 $u_2 = -\frac{7}{5}$ 及 $u_3 = \frac{21}{5}$ 各不相同。（四对都要检查，不能只查 $u_0 \neq u_2$ 和 $u_1 \neq u_3$。）这正是题目所要求的。

第 (ii) 部分

(a) 现在把 f 作用于 $\mathrm{f}^2(x)$，在 f^2 每段变号的位置，即 $x = \frac{7}{4}$ 和 $x = \frac{21}{4}$ 处，把该段再分开。对于 $x \geq 0$：

$$\mathrm{f}^3(x) = 7 - 2\left|\mathrm{f}^2(x)\right| = \begin{cases} 7 + 2(4x - 7) = 8x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4}, \\ 7 - 2(4x - 7) = 21 - 8x, & \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - 2(21 - 4x) = 8x - 35, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{21}{4}, \\ 7 + 2(21 - 4x) = 49 - 8x, & x \geq \frac{21}{4}. \end{cases}$$

所以图像以斜率 ± 8 在 -7 与 7 之间来回曲折：谷底在 $(0, -7)$ 和 $(\pm\frac{7}{2}, -7)$，峰顶在 $(\pm\frac{7}{4}, 7)$ 和 $(\pm\frac{21}{4}, 7)$，然后在 $|x| > \frac{21}{4}$ 时一直下降。把 $7 - 2x$ 与每一段联立求解，可知它与 $y = \mathrm{f}(x)$ 相交于 $(\pm\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$、$(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$、$(\pm\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$ 和 $(\pm 7, -7)$。



（青色：$y = \mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y = \mathrm{f}^3(x)$；虚线：$y = x$。）

(b) 从 $a = 1$ 开始：$u_1 = 7 - 2 = 5$，$u_2 = 7 - 10 = -3$，$u_3 = 7 - 6 = 1$。从 $a = -\frac{7}{9}$ 开始：

$$u_1 = 7 - \tfrac{14}{9} = \tfrac{49}{9}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{98}{9} = -\tfrac{35}{9}, \qquad u_3 = 7 - \tfrac{70}{9} = -\tfrac{7}{9}.$$

所以两个数列都在三步后回到起点：它们分别是 3-循环（cycle）$1 \to 5 \to -3 \to 1$ 和 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$。

3-循环中的每一项(不只是起始值)都满足 $\mathrm{f}^3(x) = x$,所以这给出六个解 $1, 5, -3, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}, -\frac{35}{9}$。此外，f 的任何不动点都满足 $\mathrm{f}^3(x) = x$，这就加上第 (i) 部分的 $\frac{7}{3}$ 和 -7。合共八个不同的解。

想一想 我们怎样知道没有其他解?

(ii)(a) 中的公式显示 f^3 由八段直线组成（$x \geq 0$ 时四段，加上它们的镜像），每段的斜率都是 ± 8。由于没有任何一段与 $y = x$ 平行，每段与直线 $y = x$ 最多相交一次，所以最多有八个解。我们已找到八个，因此 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$ 的完整解集是

$$x = -7, \quad -\frac{35}{9}, \quad -3, \quad -\frac{7}{9}, \quad 1, \quad \frac{7}{3}, \quad 5, \quad \frac{49}{9}.$$

（草图亦吻合：虚线与八条琥珀色线段各相交一次。）

(c) 我们仿照 (i)(d) 的思路，从一个 3-循环倒推。由于 $\mathrm{f}(y) = c$ 表示 $|y| = \frac{1}{2}(7 - c)$，每个 $c < 7$ 恰有两个原像 $\pm\frac{1}{2}(7 - c)$。从循环 $1 \to 5 \to -3 \to 1$ 中取 $u_3 = 1$。1 在循环内的原像是 -3，所以要离开循环，就选另一个原像 $u_2 = 3$，它不在循环中。于是

$$\mathrm{f}(u_1) = 3 \ \Rightarrow\ |u_1| = 2, \quad \text{取} u_1 = 2; \qquad \mathrm{f}(u_0) = 2 \ \Rightarrow\ |u_0| = \frac{5}{2}, \quad \text{取} u_0 = \frac{5}{2}.$$

所以 $a = \frac{5}{2}$ 可行。顺推验证：

$$\frac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

从 u_3 起，数列沿循环 $1, 5, -3$ 运行，周期为 3；而 $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$ 都与 1、5 和 -3 不同。

（其他选择亦可：例如 $a = -\frac{5}{2}$ 或 $a = \pm\frac{9}{2}$，它们导致 $u_1 = -2$；或 $a = \frac{3}{2}$，它经由 $u_2 = -1$ 在 $u_3 = 5$ 进入循环。）

验算

- 每个所声称的解都可以用手迭代验证：例如 $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$，以及 $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$。
- 用电脑在 $-30 \leq x \leq 30$ 范围内扫描 $\mathrm{f}^3(x) - x$，只在 -7、-3.889、-3、-0.778、1、2.333、5 和 5.444 附近发现变号，与八个解吻合；对 $\mathrm{f}^2(x) - x$ 作同样扫描，只发现 -7、-1.4、2.333 和 4.2。
- 计数检查：f^n 有 2^n 段斜率为 $\pm 2^n$ 的线性段，所以 $\mathrm{f}^n(x) = x$ 有 2^n 个解。当 $n = 2$ 时，这是 $4 = 2 + 2$（两个不动点和一个 2-循环）；当 $n = 3$ 时，这是 $8 = 2 + 3 + 3$（两个不动点和两个 3-循环）。

常见错误

- 在 (i)(c) 中给出 (i)(b) 的全部四个解：不动点给出的周期是 1。
- 在 (ii)(b) 中只列出 1 和 $-\frac{7}{9}$，或忘记不动点 $\frac{7}{3}$ 和 -7 亦满足 $\mathrm{f}^3(x) = x$。
- 草图中把图像交点的位置画错；用代数方法求出交点即可避免。

STEP 之外

这是离散动力系统（discrete dynamical system）的初步体验。由于 f 是斜率为 2 的帐篷映射（tent map），f^n 有 2^n 段，所以存在任何周期的周期点，而这个映射是混沌（chaotic）行为的标准例子。沙可夫斯基定理（Sharkovskii's theorem）指出，对于实数线上的连续映射，若存在周期为 3 的点，则必存在任何周期的点，这就是著名的口号“周期三意味着混沌”（period three implies chaos）。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非线性动力学与混沌》）是一本易读的迭代映射入门书。

详细解答

STEP III 2025，第 3 题

纯数学 • 平均值不等式

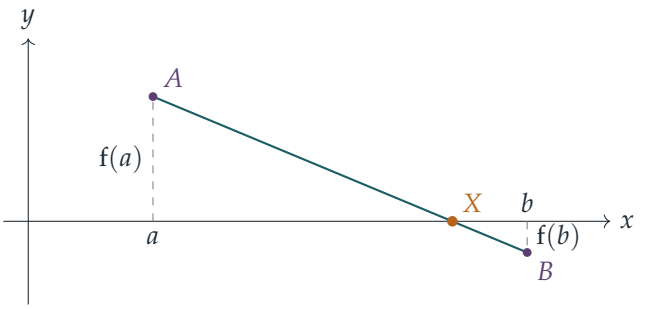
STEP III 2025，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

由于 A 位于轴的上方而 B 位于轴的下方，交点 X 会把 AB 按两个高度之比 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$ 分割。因此 m 是 a 与 b 的加权平均（*weighted average*），而接下来的一切，都是关于这些权重如何随 f 改变。一旦把 m 写成单一比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ 的函数，比较两个不同的 f 就变成比较两个数。



解答

第 (i) 部分

由 A、其垂足 $(a,0)$ 及 X 组成的三角形，与由 B、其垂足 $(b,0)$ 及 X 组成的三角形，是相似三角形（similar triangles）（在 X 处的对顶角相等，在垂足处均为直角）。因此

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

所以

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

（由于 $\mathrm{f} > 0$，分母为正；把 $y = 0$ 代入直线方程 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x - a)$，亦可得出相同答案。）

值得设 $r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$，把分子和分母同时除以 $\mathrm{f}(b)$，将结果改写为：

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \tag{$*$}$$

第 (ii) 部分

当 $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ 时，

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

此即所求。

至于第二个目标，分子 $a^{n+1} + b^{n+1}$ 应该是由 $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$ 通分后得来，这提示 $\mathrm{f}(b)$ 应该表现得像 b^{-n}。试取 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$，它在 $x > 0$ 时为正：

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

这里把分子和分母同时乘以 $a^n b^n$。所以 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ 符合要求（它的任何正常数倍亦然，因为 m 只取决于比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$）。留意 $n = -\frac{1}{2}$ 正好还原第一个结果。

第 (iii) 部分

设 $r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b)$ 及 $r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$，两者均为正数。由 $(*)$，$M_i = b - \dfrac{b - a}{1 + r_i}$。由于 $b - a > 0$，当 $r > 0$ 时，式子 $b - \frac{b-a}{1+r}$ 对 r 严格递增（strictly increasing），所以只需证明 $r_1 > r_2$。

> ? **想一想** 一个关于函数 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ 的条件，怎样转化为关于 r_1 和 r_2 的条件?

记 $h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$。于是

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

因为 h 递减（decreasing）且 $a < b$，故 $h(a) > h(b) > 0$。由于 $r_2 > 0$，可得 $r_1 > r_2$，从而 $M_1 > M_2$。

由此。我们需要三个函数，使其对应的 m 值分别是这三个平均值。

- $f(x) = 1$（常数）给出 $m = \dfrac{a+b}{2}$。
- 由第 (ii) 部分，$f(x) = \sqrt{x}$ 给出 $m = \sqrt{ab}$。
- $f(x) = x$ 给出 $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$。

现在把刚证明的结果应用两次。取 $g_1 = 1$、$g_2 = \sqrt{x}$，比值 $g_1/g_2 = x^{-1/2}$ 在 $x > 0$ 时递减，所以 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$。取 $g_1 = \sqrt{x}$、$g_2 = x$，比值同样是 $x^{-1/2}$，亦为递减，所以 $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$。合起来，

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

第 (iv) 部分

曲线经过 A 和 B，所以

$$f(a) = p(c-a)^3, \qquad -f(b) = p(c-b)^3, \text{ 即 } f(b) = p(b-c)^3.$$

由于 $f(b) > 0$，我们有 $p \neq 0$ 及 $b \neq c$，因此可以相除：

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

每个实数都恰好有一个实立方根（cube root），所以取立方根是可逆的，故

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{1/3},$$

此即所求。把右方记作 k（$k > 0$），则 $c - a = k(b-c)$，所以 $c(1+k) = a + kb$，而

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,f(b)^{1/3} + b\,f(a)^{1/3}}{f(a)^{1/3} + f(b)^{1/3}},$$

这里把分子和分母同时乘以 $f(b)^{1/3}$。

想一想 我们以前在哪里见过这条公式?

它正是第 (i) 部分的公式，只是把 f 换成 $f^{1/3}$，而后者在 $x > 0$ 时同样有定义且为正。所以 c 就是函数 $f^{1/3}$ 所对应的 m 值。取 $g_1 = f$ 及 $g_2 = f^{1/3}$，应用第 (iii) 部分：

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = f(x)^{2/3}.$$

若 f 递减且为正，则 $f^{2/3}$ 亦然，因为 $t \mapsto t^{2/3}$ 在 $t > 0$ 时递增。因此第 (iii) 部分给出 $M_1 > M_2$，其中 $M_1 = m$（对应 f 本身）及 $M_2 = c$。故 $c < m$。

验算

- 取 $a=1$、$b=4$。三个平均值为 $2.5>2>1.6$，而 $\mathrm{f}=\sqrt{x}$ 给出 $m=(1\cdot 2+4\cdot 1)/3=2=\sqrt{4}$。
- 当 $\mathrm{f}(x)=1/x$、$a=1$、$b=4$ 时：$m=\frac{1/4+4}{5/4}=3.4$，而 $k=4^{1/3}\approx 1.587$ 给出 $c\approx 2.84<3.4$，与第 (iv) 部分的预测一致。m 和 c 都位于 a 与 b 之间，正如加权平均必然如此。
- 在第 (ii) 部分中设 $n=0$，得 $\mathrm{f}=1$ 及 $m=\frac{a+b}{2}$；设 $n=-1$，得 $\mathrm{f}=x$ 及 $m=\frac{2ab}{a+b}$，与第 (iii) 部分一致。

以上各项，以及对每个结果在大量不同的 a、b 和 f 下所作的随机测试，均已用电脑核实。

常见错误

- 忘记 B 的高度是 $-\mathrm{f}(b)$，结果得出分母 $\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)$，而所得的点未必位于 a 与 b 之间。
- 在第 (iii) 部分，试图一次过交叉相乘四个函数值来比较 M_1 和 M_2，而不是化简为单一比值 r。
- 在第 (iv) 部分，把 $\mathrm{g}_1=\mathrm{f}^{1/3}$、$\mathrm{g}_2=\mathrm{f}$ 的次序弄反：它们的比值 $\mathrm{f}^{-2/3}$ 是递增的，所以按这个次序不能应用第 (iii) 部分。

STEP 之外

这里每一个 m 都是加权平均 $\lambda a+(1-\lambda)b$，而第 (iii) 部分巧妙地为整个幂平均族 $\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)/\left(a^n+b^n\right)$（即莱默平均（Lehmer means））排出大小次序，它们随 n 递增。平均值之间的不等式，以及背后的凸性（convexity）论证，是大学一年级分析课的基本内容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）和 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）都是见识更多这类论证的好去处。

详细解答

STEP III 2025，第 4 题

纯数学 · 曲线的变换

STEP III 2025，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

设平面上的映射 T 有逆映射（inverse）。那么曲线 $f\left(T^{-1}(x,y)\right)=0$ 就是曲线 $f(x,y)=0$ 在 T 之下的像，因为一点在新曲线上，当且仅当 T^{-1} 把它送到旧曲线上。第 (i) 部分就旋转（rotation）的情况证明这一点。第 (ii) 部分对反射（reflection）做同样的事，此时 $T^{-1}=T$。在第 (iii) 部分，我们留意到代换（substitution）$u=x-2y$ 把方程变成 $y=\sin x$ 的一个水平剪切（horizontal shear），再用参数化（parametrisation）便能求出切线（tangent），完全免去隐函数微分（implicit differentiation）的麻烦。

解答

第 (i) 部分

把矩阵乘积展开，得

$$x_2=\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},\qquad y_2=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}.$$

把 $(x,y)=(x_2,y_2)$ 代入 G_2 方程中的两个括号：

$$\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}=\frac{(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=x_1,$$
$$-\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}=\frac{-(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=y_1.$$

所以 G_2 的方程左边在 (x_2,y_2) 的值是 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}$。由于 (x_1,y_1) 在 G_1 上，这个值等于 1。因此 (x_2,y_2) 在 G_2 上。

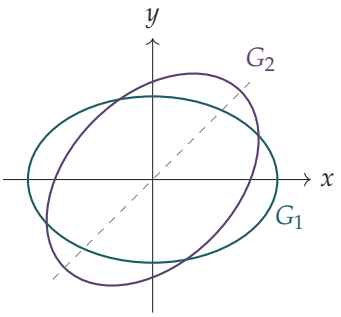
至于旋转，留意 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$，所以矩阵是

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

即绕原点逆时针旋转 45°。我们刚刚证明了 R 把 G_1 上每一点都映射到 G_2 上。要证明 G_2 恰好就是旋转后的曲线，我们还需要 G_2 上每一点都来自 G_1。取 G_2 上任意一点 (x, y)，并设

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

这就是 $R^{-1}(x, y)$（反方向转回 45°）。G_2 的方程正好说明 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$，所以 $(x_1, y_1) \in G_1$，而且 $R(x_1, y_1) = (x, y)$。因此 $G_2 = R(G_1)$：椭圆（ellipse）G_2 就是把 G_1 绕原点逆时针旋转 45° 所得的曲线。



第 (ii)(a) 部分

把该矩阵记作 M。点 (x, y) 是不变点（invariant point），当且仅当 $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$，即

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

第一式给出 $0.8y = 1.6x$，所以 $y = 2x$；第二式给出 $0.8x = 0.4y$，两者其实一样。所以不变点所成的直线（即镜线（mirror line））是

$$y = 2x.$$

第 (ii)(b) 部分

记 $(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$。第二条方程正是

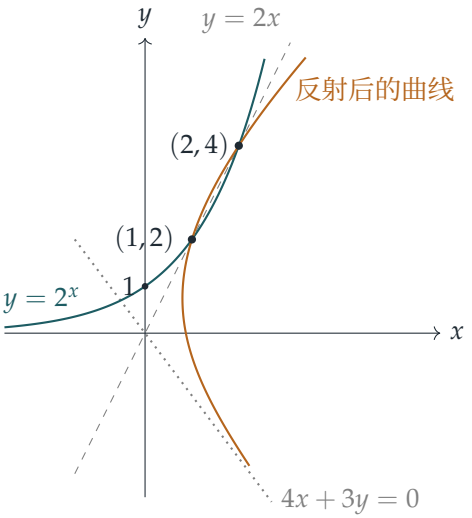
$$Y = 2^X.$$

所以 (x, y) 在第二个图像上，当且仅当 $M(x, y)$ 在 $y = 2^x$ 上。反射会抵销自己（$M^2 = I$，可以自行把乘积展开验证），所以 $(x, y) = M(X, Y)$。这又是第 (i) 部分的论证：第二个图像就是 $y = 2^x$ 关于直线 $y = 2x$ 的反射。

想一想 反射后曲线的渐近线去了哪里？曲线又朝哪个方向伸向无穷远？

把 $y = 2^x$ 的特征逐一反射。

- 渐近线（*asymptote*）。当 $x \to -\infty$，$y = 2^x$ 趋近 x 轴。方向 $(1,0)$ 反射成 $M(1,0) = (-0.6, 0.8)$，所以 x 轴反射成直线 $4x + 3y = 0$，即 $y = -\frac{4}{3}x$。等价地说，$Y = 0.8x + 0.6y = 2^X > 0$，所以反射后的曲线严格位于 $4x + 3y > 0$ 那一侧，并在 $X \to -\infty$ 时趋近 $4x + 3y = 0$。在远处，$y = 2^x$ 上的点大约是 $(X, 0)$，其中 X 是很大的负数，这些点反射后大约是 $(-0.6X, 0.8X)$。所以反射后的曲线在第四象限趋近其渐近线，此时 $x \to +\infty$ 而 $y \to -\infty$。
- 镜线上的点。反射保持 $y = 2x$ 上每一点不动。而 $2^x = 2x$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 成立（也只在这两处成立，因为 $2^x - 2x$ 是凸函数（convex））。所以两条曲线都经过 $(1,2)$ 和 $(2,4)$，并在那里相交。用电脑沿 $y = 2^x$ 搜索，找不到其他公共点。
- 其他点。$(0,1)$ 反射成 $(0.8, 0.6)$。
- 最左点。反射后的曲线是 $\left(-0.6t + 0.8 \cdot 2^t,\ 0.8t + 0.6 \cdot 2^t\right)$。它的 x 坐标在 $0.8 \cdot 2^t \ln 2 = 0.6$ 时最小，该点大约是 $(0.80, 0.74)$。那里的切线是铅垂的，所以反射后的曲线并不是 x 的函数的图像。
- 增长。当 $X \to +\infty$，点 $(X, 2^X)$ 反射后大约是 $2^X(0.8, 0.6)$。所以曲线向右上方伸展，方向大致是斜率 $\frac{3}{4}$。



第 (iii) 部分

$0 \le x \le 2\pi$ 范围内的图像 $y = \sin x$ 就是大家熟悉的一个完整波形。

对于 $y=\sin(x-2y)$，设 $u=x-2y$。点 (x,y) 在曲线上，当且仅当 $y=\sin u$，而此时 $x=u+2y$。所以该曲线恰好是

$$x=u+2\sin u,\qquad y=\sin u.$$

这就是把 $y=\sin x$ 上每一点向横方向推移其高度的两倍：即水平剪切 $(u,v)\mapsto(u+2v,v)$。

*哪些 u 给出 $0\le x\le 2\pi$？*设 $x(u)=u+2\sin u$。那么 $x(-u)=-x(u)$ 而且 $x(u+2\pi)=x(u)+2\pi$。由于 $x'(u)=1+2\cos u$，函数 $x(u)$ 在 $[0,\frac{2\pi}{3}]$ 上由 0 递增至 $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 3.83$，然后在 $[\frac{2\pi}{3},\pi]$ 上递减至 π。所以当 $0<u\le\pi$ 时它落在 $(0,2\pi)$ 内，而在 $[\pi,2\pi]$ 上，对称性 $x(2\pi-u)=2\pi-x(u)$ 保证它落在 $(0,2\pi]$ 内。对于 $u>2\pi$，由归纳法（induction）得 $x(u)=x(u-2\pi)+2\pi>2\pi$；对于 $u<0$，由奇函数（odd function）的性质得 $x(u)<0$。所以当 u 由 0 走到 2π 时，所需的那段曲线恰好被描出一次，由 $(0,0)$ 走到 $(2\pi,0)$。

*切线。*沿着曲线，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=1+2\cos u,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos u}{1+2\cos u}.$$

这两个导数不会同时为零，因为 $\cos u=0$ 时 $1+2\cos u=1$。

- 水平切线出现在 $\cos u=0$ 之处，即 $u=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$：

$$\left(\tfrac{\pi}{2}+2,\ 1\right)\quad 及\quad \left(\tfrac{3\pi}{2}-2,\ -1\right).$$

- 铅垂切线出现在 $\cos u=-\frac{1}{2}$ 之处，即 $u=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$：

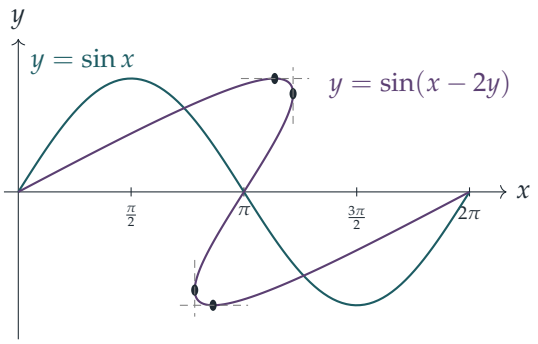
$$\left(\tfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad 及\quad \left(\tfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

它们的数值大约是 $(3.57,1)$、$(2.71,-1)$、$(3.83,0.87)$ 和 $(2.46,-0.87)$。

想一想 顶部的水平切线位于 $x\approx 3.57$，但曲线之后仍然到达 $x\approx 3.83$。曲线实际上是甚么样子的？

让 u 由 0 走到 2π。曲线以斜率 $\frac{1}{3}$ 离开原点（代入 $u=0$），比 $y=\sin x$ 平缓。它上升至最高点 $(\frac{\pi}{2}+2,1)$，然后向右下方移动，到达位于 $(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的铅垂切线。接着它向左弯回，以斜率 $\frac{-1}{-1}=1$ 经过 $(\pi,0)$。它到达位于 $(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的第二条铅垂切线，再向右转经过最低点 $(\frac{3\pi}{2}-2,-1)$，然后上升至 $(2\pi,0)$。这条曲线像一个正在卷起的浪头般向前悬垂。在 $x\approx 2.46$ 与 $x\approx 3.83$ 之间，每个 x 对应三个 y 值。整幅图关于 $(\pi,0)$ 有半周旋转对称（half-turn symmetry）。

顺带一提，两个图像在 $\sin x=\sin(x-2\sin x)$ 之处相交。要么 $\sin x=0$，得 $x=0,\pi,2\pi$；要么 $x-\sin x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，得 $x\approx 2.31$ 和 $x\approx 3.97$。



验算

- 第 (i) 部分：取 G_1 的顶点 $(3,0)$。它被映射到 $(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$，而 G_2 方程中的两个括号分别给出 3 和 0，所以左边等于 1。
- 第 (ii) 部分：$M\binom{1}{2}=\binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2}=\binom{1}{2}$，正如不变点应有的结果。点 $(1,2)$ 也满足第二条方程：$0.8+1.2=2=2^{-0.6+1.6}$。
- 第 (iii) 部分：在 $(\frac{\pi}{2}+2,1)$，得 $x-2y=\frac{\pi}{2}$，而 $\sin\frac{\pi}{2}=1=y$。同样，$(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 给出 $x-2y=\frac{2\pi}{3}$，而 $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。隐函数微分给出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$。它的分子在第一点为 0，分母在第二点为 0。

常见错误

- 只证明了 G_1 被映射到 G_2 之内。要说 G_2 就是旋转后的曲线，还需要证明 G_2 上每一点都来自 G_1，这就要用到逆映射。
- 把 $y=\sin(x-2y)$ 当作 x 的函数，结果把曲线画成一个没有悬垂部分的普通波形。铅垂切线正是曲线向回折的地方。
- 忘记反射后的指数曲线有一条斜渐近线（oblique asymptote）$4x+3y=0$，而且整条曲线完全位于它的一侧。

STEP 之外

这道题背后的原理是：把可逆映射（invertible map）T 作用于曲线 $f(x,y)=0$，得到的是曲线 $f\big(T^{-1}(x,y)\big)=0$。在大学一年级的线性代数（linear algebra）课程中，这会发展成研究二次型（quadratic form）在基变换（change of basis）之下如何改变。旋转坐标轴以消去圆锥曲线（conic）中的 xy 项，正是对称矩阵（symmetric matrix）对角化（diagonalisation）在二维的情况。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导

论》）以非常易读的方式讲解旋转、反射及其特征向量（eigenvector）（第 (ii)(a) 部分中的不变直线就是一个特征值（eigenvalue）为 1 的特征向量）。

详细解答

STEP III 2025，第 5 题

纯数学 · 三维向量

STEP III 2025，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

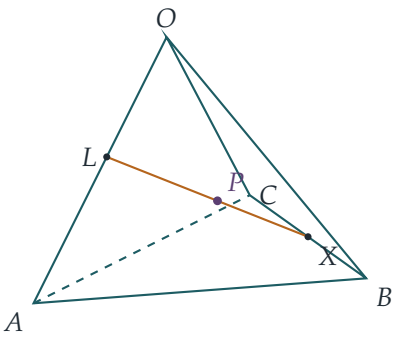
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

由于 O 位于不共线（non-collinear）三点 A、B、C 所在平面的上方，向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是线性独立（linearly independent）的，因此在任何以它们表示的向量方程中，我们都可以*比较系数*（compare coefficients）。题中每一点都可以先用未知参数写出，再通过对应系数求得。点在平面上方的高度只是系数的倍数，因此处理“水平”这个条件就变得十分容易。

解答

由于 O 不在平面 ABC 上，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 之中没有任何一个是其余两个的组合（例如若 $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$，则 O、A、B、C 便会共面（coplanar））。所以 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$ 必然推出 $x = x'$、$y = y'$、$z = z'$。另外亦须留意 $k > 0$。



第 (i) 部分

设 $\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$。由于 P 在 LX 上，存在某个 s 使得

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

与 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ 比较：

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

将后两式相加得 $s = \beta + \gamma$，于是 $t = \gamma/(\beta+\gamma)$，所以

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma}.$$

最后 $1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$，这是正数，所以

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

正如所求。（各系数都是被唯一确定的，所以 L 和 X 是唯一的；又由于 $0 < s < 1$ 及 $0 < t < 1$，P 严格位于 L 与 X 之间，而 X 严格位于 B 与 C 之间。）

第 (ii) 部分

把字母轮换（$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$，$\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$），以同样的论证可得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

? **想一想** 怎样判断一个经过三个给定点的平面是否水平?

当且仅当（if and only if）三点处于同一高度时，该平面才是水平的。设 O 位于平面 ABC 上方高度 $h > 0$ 处。那么 A、B、C 各自都在 O 下方铅垂距离 h 处，因此 OA 上的点 $\mu\mathbf{a}$ 位于 O 下方距离 μh 处，OB 和 OC 上的点亦同理。所以 L、M、N（它们位于三条不同的棱上且不在 O 处，故不共线）分别位于 O 下方深度

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

处。现在

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha - \beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

这里用到 $k > 0$。其余各对同理，所以

$$\text{平面}LMN \text{ 是水平的} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

接着，OP 与平面 ABC 相交于何处？点 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ 位于该平面上，当且仅当 $x+y+z=1$（此时它等于 $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$，而平面上每一点都具有这个形式）。点 $\mu\overrightarrow{OP}$ 的系数之和为 $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$，所以直线 OP 与该平面相交于

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

比较系数可知，它等于 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ 当且仅当

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

即当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$。两个条件都等价于 $\alpha=\beta=\gamma$，所以平面 LMN 是水平的，当且仅当 OP 与平面 ABC 相交于三角形 ABC 的形心（centroid）G。至此完成题目要求的“证明”。

在这情况下 $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，$Y$ 和 Z 亦同理：点 X、Y、Z 分别是 BC、CA 和 AB 的**中点**。

第 (iii) 部分

我们可以写成

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

而正正因为 $\alpha+\beta+\gamma<1$，四个权重 k,α,β,γ 全都是正数。所以 P 是 O、A、B、C 以严格正权重所作的加权平均（weighted average），这表示 P 严格位于四面体（tetrahedron）$OABC$ 的**内部**。

换个说法：单凭 α、β、γ 为正，就已把 P 置于以 O 为顶点、由棱 OA、OB、OC 张成的无限三面锥之内。P 在 O 下方的深度是 $(\alpha+\beta+\gamma)h$，所以条件 $\alpha+\beta+\gamma<1$ 表示 P 位于平面 ABC 上方，与 O 在同一侧。（若和等于 1，P 便在面 ABC 上；若大于 1，则在其另一侧。）

验算

- 取 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$，于是 $k=\frac{1}{4}$：那么 $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}$、$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$、$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$，而 LMN 显然就是水平的中截面，与第 (ii) 部分的预测一致。
- 当 $k\to 0$（即 P 趋近面 ABC）时，$\overrightarrow{OL}\to\mathbf{a}$：$L$ 向下移至 A，这是合理的，因为此时 L、P、X 全都位于平面 ABC 上。
- 以电脑对 2000 个随机四面体及随机的 α,β,γ 进行验算，确认 P 在 LX 上（残差约为 10^{-15}），并且 LMN 是水平的恰好当 G 是形心之时。

常见错误

- 比较系数时没有说明为何可以这样做：这需要 **a**、**b**、**c** 线性独立，而这正是用到“O 位于平面上方”的地方。
- 忘记在 $k(\alpha-\beta)=0$ 中消去 k 需要 $k>0$。
- 只证明了“当且仅当”的其中一个方向。

STEP 之外

数组 (k,α,β,γ) 就是 P 相对于四面体 $OABC$ 的重心坐标（barycentric coordinates）：一点位于内部，当且仅当所有坐标皆为正数；位于某个面上，则恰有一个坐标为零。它们是仿射几何（affine geometry）的自然坐标，在线性代数（linear algebra）中（仿射组合与凸包（convex hulls））以及电脑图像学中都会再次出现——在电脑图像学里，三角形正是以重心权重插值来著色的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是了解线性独立和坐标如何以这种方式运用的好去处。

详细解答

STEP III 2025，第 6 题

纯数学 · 根的对称函数

STEP III 2025，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

关于 $a+b+c$、$a^2+b^2+c^2$ 和 $a^3+b^3+c^3$ 的条件，实际上就是关于初等对称函数（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$ 和 abc 的条件。一旦转换过来，在 (i) 中这些数会成为一个非常简单的多项式（polynomial）的根；在 (ii) 和 (iii) 中则由一个经典的因式分解（factorisation）包办所有工作。最后一部分就是把同样的代数倒过来运用。

解答

第 (i) 部分

将 $a+b+c=0$ 两边平方，得

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

所以同样有 $ab+bc+ca=0$。

*并非全是实数。*若 a、b 和 c 全是实数，则 a^2、b^2、c^2 是总和为 0 的非负实数，迫使 $a=b=c=0$。这与这些数非零矛盾，所以它们不可能全是实数。

*模相等。*设 $p=abc$，它非零。由于 $a+b+c=0$ 且 $ab+bc+ca=0$，

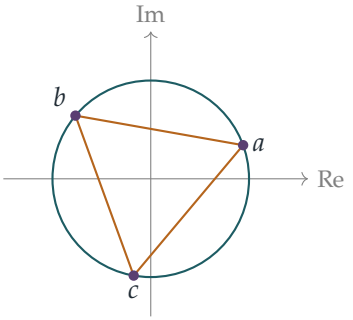
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

所以 a、b、c 每一个都是 $z^3=p$ 的根，即

$$a^3=b^3=c^3=p.$$

取模（modulus），得 $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$；由于模是非负实数，$|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$。所以 a、b 和 c 的模全都相同，得证。

事实上，a、b、c 正是 p 的三个立方根（cube roots），它们位于一个以原点为中心的等边三角形（equilateral triangle）的顶点上。



第 (ii) 部分

设 $a + b + c = 0$。则 $c = -(a + b)$，且

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

若同时有 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$，则 $abc = 0$，所以其中至少一个数为零。因此不存在三个同时具备这两个性质的非零复数。

第 (iii) 部分

这次有用的恒等式（identity）是

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

可以通过展开来验证：两边的 a^2b、ab^2 等项各出现三次，而 abc 出现六次。

现在 $d = -(a + b + c)$，所以 $d^3 = -(a + b + c)^3$，且

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

想一想 为甚么一个乘积等于零，能告诉我们关于模的任何信息？

若干复数的乘积为零，当且仅当其中一个因子为零。所以 $a + b$、$b + c$、$c + a$ 之中有一个等于零；不妨设 $a + b = 0$（其他情况只需重新标记字母，做法相同）。于是 $b = -a$，所以 $|b| = |a|$。因此四个数中至少有两个模相同。

（这里并没有用到 $d \neq 0$ 或这些数非零；结论其实就是这四个数可分成两对互为相反数的数，例如 $a, -a, c, -c$。）

第 (iv) 部分

取 $c=1$、$d=-2$、$e=3$，有

$$c+d+e=2, \qquad c^3+d^3+e^3=1-8+27=20,$$

所以我们需要实数 a、b 使得

$$a+b=-2, \qquad a^3+b^3=-20.$$

利用 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$，第二个条件变成

$$-20=-8+6ab \quad \Longrightarrow \quad ab=-2.$$

所以 a 和 b 是 $t^2+2t-2=0$ 的根，即

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=-1-\sqrt{3},$$

由于判别式(discriminant)$4+8=12$ 为正,它们都是实数。它们的绝对值分别是 $\sqrt{3}-1\approx 0.73$ 和 $\sqrt{3}+1\approx 2.73$，两者都不等于 1、2 或 3（两者都是无理数（irrational））。所以

$$-1+\sqrt{3}, \quad -1-\sqrt{3}, \quad 1, \quad -2, \quad 3$$

是五个绝对值各不相同的实数，总和为 0，而它们的立方和也是 0。

验算

- 在 (i) 中, 1 的立方根 1、ω、ω^2 满足 $1+\omega+\omega^2=0$ 及 $1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$: 模全是 1，且并非全是实数，与预期相符。
- 在 (iii) 中，试取 $a=2$、$b=-2$、$c=\mathrm{i}$、$d=-\mathrm{i}$：两个和都等于零，而这些数确实两两配成相反数。
- 在 (iv) 中，以数值计算得 $0.7320-2.7320+1-2+3=0$ 及 $0.3923-20.3923+1-8+27=0$，其中用到 $(\sqrt{3}-1)^3=6\sqrt{3}-10$ 和 $(-1-\sqrt{3})^3=-6\sqrt{3}-10$。

常见错误

- 在 (i) 中，通过“取立方根”由 $a^3=b^3$ 推出 $|a|=|b|$：a 和 b 不一定相等，但它们的模相等，因为模是非负实数。
- 在 (iii) 中，忘记说明为甚么 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 迫使其中一个因子为零（因为 $\mathbb{C}$ 中没有零因子（zero divisors））。
- 在 (iv) 中，没有检查 a 和 b 的绝对值与 1、2、3 不同，以及两者彼此不同。

STEP 之外

每个多变量对称多项式（symmetric polynomial）都可以用初等对称多项式表示，而牛顿（Newton）恒等式（Newton's identities）则明确给出它们与幂和（power sums）$a^k + b^k + c^k + \ldots$ 之间的联系；这正是这里的条件能把这些数限制得如此紧的原因。一个近亲是 Prouhet–Tarry–Escott 问题：找出两组不同的整数，使它们的一次方、二次方、...、k 次方之和全部相等。这个问题至今仍部分未解决。关于多项式及其根的代数，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

详细解答

STEP III 2025，第 7 题

纯数学 · 反正切函数

STEP III 2025，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

一切都取决于一个事实：$f(x)\,f(-x)=1$，因为 $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$。再加上 $f(x)>0$，便可把 $g(x)+g(-x)$ 化成熟悉的 $\tan^{-1}t+\tan^{-1}(1/t)$。至于 (c)，$\tan\frac{1}{2}\theta$ 是半角正切（half-angle tangent），配合 $\tan\theta=1/x$，它可化简为 $f(x)$。一旦知道 g 与 k 在 $x>0$ 时相等，(e) 中的两个积分便可藉对称性联系起来。

解答

第 (i) 部分

当 $x\neq 0$ 时，有 $x^2=|x|^2$，所以

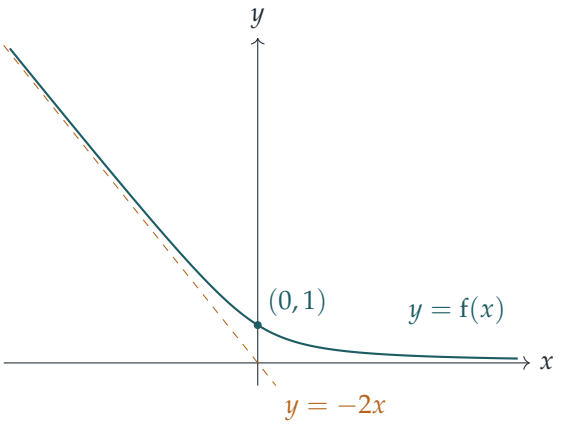
$$\sqrt{x^2+1}=|x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}=|x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\cdots\right)=|x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{8|x|^3}+\cdots,$$

这里用了二项级数（binomial series）；由于 $|x|$ 很大时 $1/x^2<1$，展开是成立的。略去 $|x|^{-3}$ 阶的项，便得 $\sqrt{x^2+1}\approx|x|+\dfrac{1}{2|x|}$，正如所求。

作图。先整理各项事实。

- 对所有 x，$f(x)>0$，因为 $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$。此外 $f(0)=1$。
- $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$，因为 $x<\sqrt{x^2+1}$，所以 f 是递减（decreasing）的。再者 $f''(x)=(x^2+1)^{-3/2}>0$，所以曲线是凸（convex）的。
- 当 $x\to+\infty$：$f(x)\approx x+\frac{1}{2x}-x=\frac{1}{2x}\to 0^+$，所以 x 轴是一条渐近线（asymptote）。

▶ 当 $x \to -\infty$：$|x| = -x$，所以 $\mathrm{f}(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$。直线 $y = -2x$ 是一条斜渐近线（oblique asymptote），而曲线位于它的稍上方。



第 (ii)(a) 部分

利用平方差（difference of two squares）展开，得

$$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

所以 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$。设 $t = \mathrm{f}(x)$，由第 (i) 部分知它是正数。于是

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1}\frac{1}{t}.$$

? **想一想** 为甚么 $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$ 需要 $t > 0$?

设 $\alpha = \tan^{-1} t$。由于 $t > 0$，$\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$，所以 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 也在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内，而这区间位于 $\tan^{-1}$ 的值域之内。它的正切是 $\cot\alpha = 1/t$，所以 $\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。由此得 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \frac{1}{2}\pi$。（若 $t < 0$，总和便会是 $-\frac{1}{2}\pi$，这正是 f 为正这一点重要的原因。）

第 (ii)(b) 部分

$\tan^{-1}$ 是奇函数（odd function），所以当 $x \neq 0$ 时，

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

即 $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

设 $x>0$ 及 $\theta=\tan^{-1}(1/x)$，则 $\theta\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ 且 $\mathrm{k}(x)=\frac{1}{2}\theta$。取一个对边为 1、邻边为 x 的直角三角形，得 $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 及 $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$。利用半角恒等式（half-angle identity）$\tan\frac{1}{2}\theta=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$（由 $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ 及 $\sin\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 得出），

$$\tan\mathrm{k}(x)=\frac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\sqrt{x^2+1}-x=\mathrm{f}(x)=\tan\mathrm{g}(x).$$

结果得证。

还可以说得更多。当 $x>0$ 时，$\mathrm{k}(x)\in(0,\frac{1}{4}\pi)$。此外 $0<\mathrm{f}(x)<\mathrm{f}(0)=1$，所以 $\mathrm{g}(x)\in(0,\frac{1}{4}\pi)$ 亦成立。由于 tan 在该区间上是一一对应（one-to-one）的，

$$\mathrm{k}(x)=\mathrm{g}(x)\quad \text{当}x>0.$$

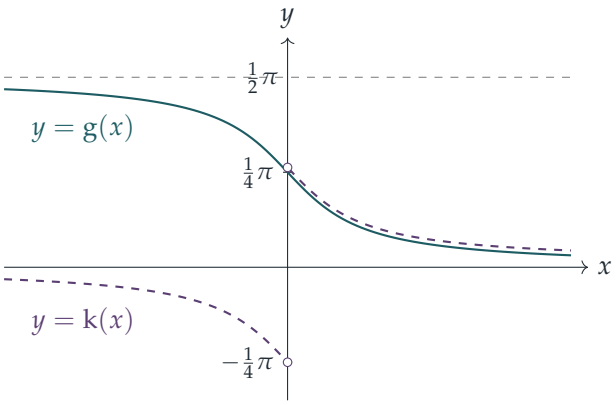
当 $x<0$ 时，有 $-x>0$，所以依次利用 (b)、上述结果及 (a)：

$$\mathrm{k}(x)=-\mathrm{k}(-x)=-\mathrm{g}(-x)=\mathrm{g}(x)-\tfrac{1}{2}\pi\quad \text{当}x<0.$$

第 (ii)(d) 部分

$\mathrm{g}=\tan^{-1}\circ\mathrm{f}$ 是递减的，因为 $\tan^{-1}$（递增）与 f（递减）都是单调（monotonic）的。当 $x\to-\infty$, $\mathrm{f}\to\infty$ 而 $\mathrm{g}\to\frac{1}{2}\pi$。当 $x\to+\infty$, $\mathrm{f}\to0^+$ 而 $\mathrm{g}\to0$。此外 $\mathrm{g}(0)=\tan^{-1}1=\frac{1}{4}\pi$，而由 (a) 可知图像关于 $(0,\frac{1}{4}\pi)$ 具有旋转对称性（rotational symmetry）。

由 (c) 可知，当 $x>0$ 时，k 的图像与 g 的相同，从 $\frac{1}{4}\pi$（不能取得）下降至趋向 0。当 $x<0$ 时，它是 g 的图像向下平移 $\frac{1}{2}\pi$，从 0（当 $x\to-\infty$）下降，当 $x\to0^-$ 时趋向 $-\frac{1}{4}\pi$。所以 k 是奇函数，并在 $x=0$ 处（该处无定义）跳跃 $\frac{1}{2}\pi$。



（当 $x>0$ 时两条曲线重合。该处把虚线曲线画得比实线稍高，只是为了让两者都看得见。）

第 (ii)(e) 部分

当 $x>0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$。使用分部积分（integration by parts），对 $\tan^{-1}(1/x)$ 求导，对 1 积分，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_0^1+\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{4}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

在下限处，当 $x\to 0^+$ 时 $x\tan^{-1}(1/x)\to 0$，因为 $\tan^{-1}(1/x)$ 一直小于 $\frac{1}{2}\pi$。（被积函数有界，所以这个积分完全是正常积分。）

由此。由 (c)，当 $-1\le x<0$ 时 $\mathrm{g}(x)=\mathrm{k}(x)+\frac{1}{2}\pi$。由 (b)，k 是奇函数，所以 $\int_{-1}^0\mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$。因此

$$\int_{-1}^0\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\pi-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2\right)=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

验算

- 在 $[-1,0]$ 上，g 由 $\mathrm{g}(-1)=\tan^{-1}(\sqrt{2}+1)=\frac{3}{8}\pi\approx 1.178$ 递减至 $\frac{1}{4}\pi\approx 0.785$，所以积分必定介乎这两个值之间。我们的答案是 $\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{4}\ln 2\approx 1.0048$，而数值积分（numerical quadrature）在十位小数内给出相同结果。同样地，$\int_0^1\mathrm{k}\,\mathrm{d}x\approx 0.56599$。
- 求导得 $\mathrm{g}'(x)=-\dfrac{1}{2(1+x^2)}$，所以其实 $\mathrm{g}(x)=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\tan^{-1}x$。这条公式令 (a) 一目了然，而直接对它积分亦可重现 (e) 的答案。
- 在 $x=1$：$\mathrm{f}(1)=\sqrt{2}-1=\tan\frac{1}{8}\pi$，而 $\mathrm{k}(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{8}\pi$，与 (c) 的预测一致。

常见错误

- 对所有很大的 $|x|$ 都写 $\sqrt{x^2+1}\approx x+\frac{1}{2x}$。对负数 x 而言这个式子符号错误，而且会掩盖渐近线 $y=-2x$。
- 从 (c) 推断 $\mathrm{k}=\mathrm{g}$ 处处成立。正切相等只能推出角度在相差 π 的倍数下相等，而当 $x<0$ 时两个函数相差 $\frac{1}{2}\pi$。
- 在分部积分中忘记论证 $x\tan^{-1}(1/x)$ 在 0 处的极限。

STEP 之外

函数 f 就是 $e^{-\sinh^{-1}x}$，因为 $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$。它的倒数性质 $f(-x) = 1/f(x)$ 不过是 $\sinh^{-1}$ 为奇函数这一点。(c) 中的陷阱——正切相等并不迫使角度相等——正是反函数分支（branch）问题的实变量版本。这个问题在复对数（complex logarithm）与辐角（argument）中会以更严重的形式再次出现。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是欣赏这一点的绝佳读物，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）则仔细处理了极限与反常积分（improper integral）。

详细解答

STEP III 2025，第 8 题

纯数学 · 以复数求三角函数之和

STEP III 2025，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分的恒等式（identity）其实是一条递推关系（recurrence）：它把 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$ 用低两级的同类表达式写出来，因此反复应用它，就能令一个和式逐项相消（telescope）。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 后，每个 $z^k\pm z^{-k}$ 都变成 $2\cos k\theta$ 或 $2\mathrm{i}\sin k\theta$，代数运算于是化为三角恒等式（trigonometric identity）。至于数值部分，关键在于选取 θ，使 $\sin 2n\theta$ 等于 $\sin\theta$（或 $\cos\theta$），从而可以约去。

解答

第 (i) 部分

展开乘积，得

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)=z^{m+1}+z^{1-m}-z^{m-1}-z^{-(m+1)}.$$

加上 $z^{m-1}-z^{1-m}$，中间两项便互相抵消，剩下 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$，这正是所求的恒等式。

归纳法（*induction*）。当 $n=1$ 时，命题为 $z^2-z^{-2}=(z-z^{-1})(z+z^{-1})$，即平方差（difference of two squares），故成立。假设命题对某个 $n\geq 1$ 成立。在恒等式中取

$m=2n+1$（于是 $m+1=2n+2$，$m-1=2n$），

$$\begin{aligned} z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right), \end{aligned}$$

这里用了归纳假设（inductive hypothesis），而多出来的一项正是 $r=n+1$ 的那一项。所以结果对 $n+1$ 成立，由归纳法知对所有 $n\geq 1$ 成立。

$z+\frac{1}{z}$ 的版本。同样地，

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)=z^{m+1}-z^{1-m}+z^{m-1}-z^{-(m+1)},$$

所以这次要减去 $z^{m-1}-z^{1-m}$：

$$z^{m+1}-\frac{1}{z^{m+1}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)-\left(z^{m-1}-\frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

这个负号令我们每往下推一级时符号交替改变，因此我们断言

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

当 $n=1$ 时，这同样是 $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$。若命题对 n 成立，取 $m=2n+1$ 的恒等式给出

$$z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1}-\frac{1}{z^{2n+1}}\right)-\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

由于 $-(-1)^{n-r}=(-1)^{n+1-r}$，而第一项正是 $r=n+1$ 的那一项，其符号为 $(-1)^0=1$，所以方括号内恰好是 $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}\left(z^{2r-1}-z^{-(2r-1)}\right)$。归纳法至此完成。逐项写出来就是

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1}-\frac{1}{z^{2n-1}}\right)-\left(z^{2n-3}-\frac{1}{z^{2n-3}}\right)+\cdots\pm\left(z-\frac{1}{z}\right)\right].$$

第 (ii) 部分

(a) 取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z^k+z^{-k}=2\cos k\theta$，$z^k-z^{-k}=2\mathrm{i}\sin k\theta$。第 (i) 部分的第一个结果变成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n}2\cos(2r-1)\theta,$$

两边除以 2i，得 $\sin 2n\theta=2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$，即为所求。

(b) 取 $n=2$：$\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta+\cos 3\theta)$。我们希望 $\sin 4\theta$ 等于 $\sin\theta$，而 $\theta=\frac{1}{5}\pi$ 正好做到，因为 $\sin\frac{4}{5}\pi=\sin(\pi-\frac{1}{5}\pi)=\sin\frac{1}{5}\pi$。由于 $\sin\frac{1}{5}\pi\neq 0$，可以两边除以它：

$$1=2\big(\cos\tfrac{1}{5}\pi+\cos\tfrac{3}{5}\pi\big).$$

又 $\cos\frac{3}{5}\pi=-\cos(\pi-\frac{3}{5}\pi)=-\cos\frac{2}{5}\pi$，所以 $\cos\frac{1}{5}\pi-\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{2}{5}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{2}$。

(c) 取 $n=7$ 及 $\theta=\frac{1}{15}\pi$，同样有 $\sin 14\theta=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\neq 0$，所以

$$\sum_{r=1}^{7}\cos\frac{(2r-1)\pi}{15}=\frac{1}{2}.$$

> **想一想** 这里的七个角都是 $\frac{1}{15}\pi$ 的奇数倍，但目标式中的却是偶数倍。怎样由前者过渡到后者?

对大于 $\frac{1}{2}\pi$ 的角使用 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，并留意 $\cos\frac{5}{15}\pi=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$ 及 $\cos\frac{3}{15}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi$：

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{5}\pi,\qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi=-\cos\tfrac{4}{15}\pi,\qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

和式变成

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi+\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{2}{15}\pi-\cos\tfrac{4}{15}\pi+\tfrac{1}{2}+\big(\cos\tfrac{1}{5}\pi-\cos\tfrac{2}{5}\pi\big)=\tfrac{1}{2}.$$

由 (b)，括号内的值是 $\frac{1}{2}$，所以

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi-\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{1}{15}\pi=\tfrac{1}{2}.$$

最后，$-\cos\frac{7}{15}\pi=\cos(\pi-\frac{7}{15}\pi)=\cos\frac{8}{15}\pi$，而 $-\cos\frac{1}{15}\pi=\cos(\pi+\frac{1}{15}\pi)=\cos\frac{16}{15}\pi$，得

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi+\cos\tfrac{8}{15}\pi+\cos\tfrac{16}{15}\pi=\tfrac{1}{2},$$

即为所求。

第 (iii) 部分

> **想一想** 目标式是 θ 的奇数倍角的正弦的交错和。第 (i) 部分哪一个结果正好产生这种形式?

是 $z+\frac{1}{z}$ 的版本。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，它变成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\,2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

所以

$$\sin 2n\theta = 2\cos\theta \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sin(2r-1)\theta.$$

取 $n = 3$：

$$\sin 6\theta = 2\cos\theta\,(\sin 5\theta - \sin 3\theta + \sin\theta).$$

现在我们希望 $\sin 6\theta = \cos\theta$，而 $\theta = \frac{1}{14}\pi$ 符合要求：$\sin\frac{6}{14}\pi = \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{6}{14}\pi) = \cos\frac{1}{14}\pi$，且其值不为零。两边除以它，得

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi - \sin\tfrac{3}{14}\pi + \sin\tfrac{5}{14}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

验算

- 用简单的数值测试恒等式：取 $z = 2$、$n = 2$，得 $16 - \frac{1}{16} = \frac{255}{16}$，而 $(2 - \frac{1}{2})(2 + \frac{1}{2} + 8 + \frac{1}{8}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{85}{8} = \frac{255}{16}$，以及 $(2 + \frac{1}{2})(8 - \frac{1}{8} - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{51}{8} = \frac{255}{16}$。
- 以数值计算，$\cos\frac{2}{5}\pi = 0.309017\ldots$ 与 $\cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2} = 0.809017\ldots - 0.5$ 相符；这就是大家熟悉的 $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$、$\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。
- 用计算机计算，(ii)(c) 和 (iii) 中的和式都等于 0.500000。

常见错误

- 在 $z + \frac{1}{z}$ 的递推关系中弄错符号：较低的一项是被减去的，所以和式符号交替，而最高的一项 $z^{2n-1} - z^{-(2n-1)}$ 必须带 $+$ 号。
- 除以 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ 时，没有指出它在所选的角度下不为零。
- 在 (ii)(c) 中，忘记 $\cos\frac{5}{15}\pi = \frac{1}{2}$，或忘记需要用 (b) 来消去剩下的一对项。

STEP 之外

当 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时，表达式 $z^k + z^{-k}$ 就是 $2\cos k\theta$；而像第 (i) 部分那样的递推关系，正是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials）所满足的关系——这些多项式把 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta / \sin\theta$ 表示成 $\cos\theta$ 的多项式。(ii)(c) 和 (iii) 中那些漂亮的和式源自单位根（roots of unity）：角 $\frac{2}{15}\pi, \frac{4}{15}\pi, \frac{8}{15}\pi, \frac{16}{15}\pi$ 是由反复加倍产生的，这让我们初步窥见高斯（Gauss）周期（Gauss periods）与伽罗瓦理论（Galois theory）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是欣赏这种几何的绝佳读物。

详细解答

STEP III 2025，第 9 题

力学 • 质心

STEP III 2025，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 11.8 节倾斜的平衡中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/tilted-equilibria.html

关键思路

一个放在桌上的立体只在一点与桌面接触，而且只受两个力作用：作用于质心（centre of mass）G 的重量，以及作用于接触点的反作用力（reaction）。这两个力要互相平衡，必须作用在同一条铅垂线上，所以曲面在接触点的法线（normal）必须通过 G。第 (i) 部分找出 G 的位置，第 (ii) 部分告诉我们曲面的法线与轴相交于何处，第 (iii) 部分则把两者结合起来：我们数一数曲面上有多少点的法线通过 G。

解答

全文中，把曲线写成 $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$，其中 $0 \le x \le r$。它由 y 轴上的 $(0, r)$ 向下延伸至 x 轴上的 $(r, 0)$，期间 $y \ge 0$。

第 (i) 部分

我们把立体切成绕 y 轴的薄圆柱壳（cylindrical shells）。半径为 x、厚度为 δx、高度为 y 的圆柱壳，体积为 $2\pi x y\,\delta x$；由于密度均匀，它的质心位于高度 $\frac{1}{2}y$ 处。因此体积及关于 xz 平面的力矩（moment）分别为

$$V = 2\pi \int_0^r xy \,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}x.$$

第一个积分为

$$\int_0^r x\,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\,r^3}{2(n+2)},$$

所以 $V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$。至于第二个积分，把 $(r^n - x^n)^2$ 展开：

$$\begin{aligned}\int_0^r x\,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right)\\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

所以 $V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$。两者相除，

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

此即所求。由对称性可知，质心位于 y 轴上。

第 (ii) 部分

求导得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$，在 $x = rp$ 处其值为 $-np^{n-1}$。由于 $p > 0$，此值不为零，所以法线的斜率（gradient）为 $\dfrac{1}{np^{n-1}}$，方程为

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

代入 $x = 0$，

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

此即所求结果。

当 $n = 4$ 时，$Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$，且

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

想一想 我们怎样知道这个驻点（stationary point）给出的是最大值，而不只是局部（local）最大值?

对于 $p > 0$，$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$ 的正负号与 $1 - 8p^6$ 的相同：当 $p^6 < \frac{1}{8}$ 时为正，当 $p^6 > \frac{1}{8}$ 时为负。因此 Y 递增至 $p^6 = \frac{1}{8}$，即 $p^2 = \frac{1}{2}$、$p = 1/\sqrt{2}$（它位于 $(0, 1]$ 内），之后递减。所以这是整个区间上的最大值：

$$Y_{\max} = r\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cdot 2\right) = \tfrac{1}{4}r.$$

第 (iii) 部分

两个部分。 上边界 $r^3y = r^4 - x^4$ 就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的曲线，所以上半部（$y = 0$ 以上）就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的立体。下边界 $ry = -(r^2 - x^2)$ 是 $n = 2$ 的曲线 $ry = r^2 - x^2$ 关于 x 轴的反射，所以下半部就是倒转过来的 $n = 2$ 立体。两者在平面 $y = 0$ 上半径为 r 的圆形边缘相接。利用第 (i) 部分，即 $V = \pi n r^3/(n+2)$：

	体积	质心高度
上半部（$n = 4$）	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10} = \frac{2}{5}r$
下半部（$n = 2$，经反射）	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6} = -\frac{1}{3}r$

取力矩（与之前一样，假设密度均匀），

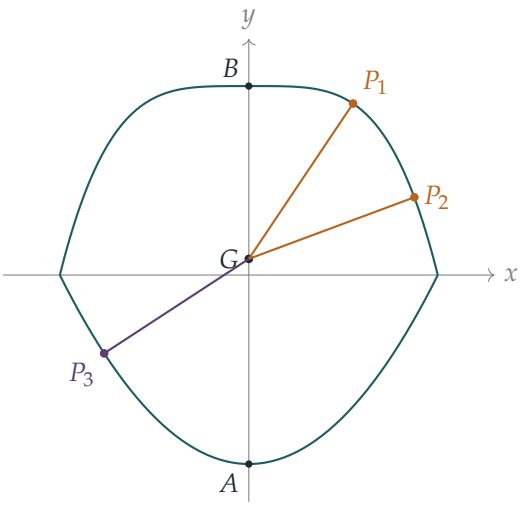
$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}} = \frac{3r}{35},$$

所以 $G = \left(0, \frac{3}{35}r\right)$，略高于边缘。

平衡条件。

? **想一想** 为甚么接触点的法线必须通过 G?

当立体以单一点 P 靠在桌面上时，它只受两个力：铅垂地作用于 G 的重量，以及作用于 P 的桌面反作用力。两个力要平衡，必须大小相等、方向相反并且作用在同一直线上，所以 G 必须位于 P 的正上方。桌面就是 P 处的切平面（tangent plane），所以通过 P 的铅垂线就是立体在该点的法线：P 处的法线必须通过 G。反过来，若法线通过 G，立体便可以在该处静止，因为立体是凸（convex）的（轮廓 $y = r - x^4/r^3$ 是凹（concave）的，而 $y = (x^2 - r^2)/r$ 是凸的），所以它完全位于 P 处切平面的同一侧。旋转曲面（surface of revolution）的法线位于一个通过轴的平面内，所以我们只需考虑 xy 平面上的截面。由于 G 在轴上，我们需要找出与 y 轴相交于 $Y = \frac{3}{35}r$ 的法线。



在上表面接触。 由第 (ii) 部分取 $n=4$（而 $r(1-p^4)$ 是该点的高度），在 $\big(rp, r(1-p^4)\big)$ 处的法线与轴相交于 $r\big(1-p^4-\frac{1}{4}p^{-2}\big)$。令它等于 $\frac{3}{35}r$，再乘以 $140p^2$：

$$140p^2-140p^6-35=12p^2 \iff h(q):=140q^3-128q+35=0, \quad q=p^2.$$

由于 $h(0)=35>0$、$h(\frac{1}{2})=17.5-64+35=-11.5<0$ 及 $h(1)=47>0$，所以 h 有一个根 $q_1\in(0,\frac{1}{2})$ 及一个根 $q_2\in(\frac{1}{2},1)$，给出上表面上的两点 P_1,P_2，其中 $0<p_1<1/\sqrt{2}<p_2<1$。（这正是第 (ii) 部分所预示的：$\frac{3}{35}r$ 低于最大值 $\frac{1}{4}r$，所以这个值在最大值两侧各达到一次。）

在下表面接触。 对于 $n=2$ 的曲线，参数为 p 处的法线与轴相交于 $r(1-p^2-\frac{1}{2})=r(\frac{1}{2}-p^2)$；关于 x 轴反射后，下表面在 $\big(rp,-r(1-p^2)\big)$ 处的法线与轴相交于 $r(p^2-\frac{1}{2})$。令它等于 $\frac{3}{35}r$，得

$$p^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{35}=\tfrac{41}{70}, \qquad p_3=\sqrt{41/70}\in(0,1),$$

这是第三点 P_3（由于我们所用的半截面上 $p>0$，所以取正根；图中显示的是它的镜像，由对称性可知两者等价）。

三个角互不相同且不为零。 当立体在 P 处静止时，向上的铅垂方向由 P 指向 G，即沿 P 处的向内法线。

- 在下表面的 P_3 处，向内法线 $(-2p_3,1)$（曲线的斜率为 $2p_3$）指向上方，与指向正 y 轴方向的 $\overrightarrow{AB}$ 成锐角 $\arctan(2p_3)$。
- 在上表面的 P_1 或 P_2 处，向内法线 $(-4p^3,-1)$ 指向下方，所以与 $\overrightarrow{AB}$ 所成的角是钝角 $180^\circ-\arctan(4p^3)$。

由于 $p_1 \neq p_2$ 且 $\arctan(4p^3)$ 严格递增，两个钝角并不相同，而且两者都与那个锐角不同。由于 $p_1, p_2, p_3 > 0$，三个角都不为零。因此立体可以在 $\overrightarrow{AB}$ 与向上铅垂方向成三个不同的非零角时处于平衡（equilibrium），此即所求。

（事实上平衡位置不止这些：立体亦可以靠边缘平衡，或以 B 点著地、$\overrightarrow{AB}$ 指向正下方而平衡。不过曲面上的这三个位置已足以回答题目。）

验算

- 第 (i) 部分取 $n = 2$，对高度为 r 的抛物面（paraboloid）得出 $\frac{1}{3}r$，这是标准结果：实心抛物面的质心位于由顶点到底面的三分之二处。当 $n \to \infty$ 时，立体变成高度为 r 的圆柱体，而 $\bar{y} \to \frac{1}{2}r$，结果正确。
- 在第 (ii) 部分中，当 $p = 1$（边缘）且 $n = 4$ 时得 $Y = -\frac{1}{4}r$；该处的斜率为 -4，所以法线的斜率为 $\frac{1}{4}$，在水平距离 r 内下降 $\frac{1}{4}r$。两者吻合。
- 取 $r = 1$，各根为 $p_1 \approx 0.552$、$p_2 \approx 0.876$、$p_3 \approx 0.765$，而各角约为 146.1°、110.4° 及 56.8°。以电脑搜索使 G 离桌面高度取驻值的倾角，在严格介乎 0° 与 180° 之间恰好找到这三个，另加边缘的位置（约 85.1°）。

常见错误

- 把下半部的质心放在 $+\frac{1}{3}r$：它是倒转过来的 $n = 2$ 立体，所以质心位于边缘之下。
- 使用圆盘（disc）体积 $\pi x^2\,\delta y$，而 x 仍要以 y 的 $\frac{2}{n}$ 次方表示：这方法可行，但圆柱壳法得出的是多项式积分。
- 求得关于 $q = p^2$ 的三次方程，却没有证明它有两个满足 $0 < p < 1$ 的根；在 $q = 0, \frac{1}{2}, 1$ 检查正负号即可解决。

STEP 之外

法线通过 G 这个条件，使物体滚动时 G 的高度取驻值，而这个高度就是势能（potential energy）。稳定（stable）位置是势能的极小值，不稳定位置则是极大值。光滑的凸体必定至少有两个平衡位置，而 2006 年发现的“Gömböc”是一个只有一个稳定位置和一个不稳定位置的凸形体。关于势能与稳定性的一般理论，可参阅 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

详细解答

STEP III 2025，第 10 题

力学 · 移动木板上的摩擦力

STEP III 2025，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

先解关于 h 的微分方程（differential equation）：这是简谐运动（simple harmonic motion），它表示木板的倾角以恒定速率 ω 增加。知道角度之后，质点的位置固定在木板全长的某个比例处，因此求两次导数（derivative）便得到它的加速度。然后在垂直于木板和沿着木板两个方向分解，应用牛顿第二定律（Newton's second law）就得出各个力，这比沿水平和铅垂方向分解简洁得多。

解答

我们把木板视为刚性杆，把 P 视为质点。设 θ 为木板与水平面所成的角。

第 (i) 部分

方程 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$ 的通解（general solution）为 $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$。条件 $\mathrm{h}(0) = 0$ 给出 $a = 0$，而 $\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$ 给出 $b = L$，所以

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

由于 A 位于高度 h，而木板长度为 L，故 $\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$，所以 $\theta = \omega t$（对 $0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$ 成立，这已涵盖整个运动过程：在此之后 A 便须升至高于 L 的高度）。因此 $A = (0, L\sin\omega t)$，$B = (L\cos\omega t, 0)$。

点 C 位于由 A 到 B 的比例 s 处，所以 $C = A + s(B - A)$：

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

第一式就是所求的 x 坐标，第二式则是相应的 y 坐标表达式。

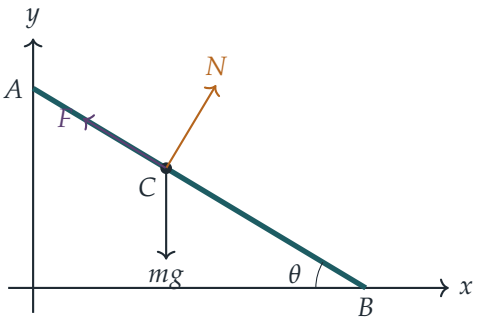
第 (ii) 部分

对 t 求导两次，

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos\omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin\omega t.$$

第 (iii) 部分

作用在 P 上的力有：向下的重量 mg、垂直于木板（向上）的法向反作用力（normal reaction）N，以及沿木板方向的摩擦力（friction）F；我们规定 F 沿斜面向上、指向 A 时为正。



垂直于木板（向上）的单位向量（unit vector）是 $(\sin\theta, \cos\theta)$，沿木板指向 A 的单位向量是 $(-\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $\theta = \omega t$。把运动方程 $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$ 在这两个方向上分解（即分别与每个单位向量取点积（dot product））：

垂直于木板方向。

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2\big(s + (1-s)\big)\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

由 $L\omega^2 = kg$，得

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

与所求相符。

沿木板指向 A 方向。

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2\big(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta\big) = mgk\big(s - \sin^2\theta\big), \end{aligned}$$

这里用了 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。因此

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

即 $F = mgsk + N\tan\omega t$，与所求相符。留意只要 $N > 0$，F 便是正数，所以当 P 紧贴木板时，摩擦力总是沿木板向上作用。

第 (iv) 部分

记 $\mu = \tan\alpha$。当 $N > 0$ 时，质点留在 C 而不滑动，当且仅当 $|F| \le \mu N$；由于此时 $F > 0$，这等价于 $F/N \le \tan\alpha$。把第 (iii) 部分的结果除以 N，

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

开始时，$\theta = 0$，所以 $N = mg > 0$ 且 $F/N = sk$。因此只要 $sk < \tan\alpha$，质点在开始时便不会滑动。

> **想一想** 为甚么比值 F/N 必定会在 N 变为零之前达到 $\tan\alpha$?

现在假设 $sk < \tan\alpha$。因子 $\cos\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时为零；若 $k > 1$，因子 $1 - k\sin\theta$ 会更早在 $\sin\theta = 1/k$ 时变为零。设 θ_0 为首个使 $N = 0$ 的角度（即 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\arcsin(1/k)$）。在 $0 \le \theta < \theta_0$ 上，$N > 0$，且 F/N 连续（continuous）。当 $\theta \to \theta_0^-$ 时，分母 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$ 经正值趋于 0，而分子 sk 是固定的正数，所以第一项趋于 $+\infty$（而 $\tan\theta$ 要么有界，要么同样趋于 $+\infty$）。因此 $F/N \to +\infty$。

所以 F/N 由 $sk < \tan\alpha$ 开始,并在 N 降至零之前无界地增大。根据介值定理(intermediate value theorem)，存在首个角度 $\theta_1 < \theta_0$ 使 $F/N = \tan\alpha$，质点就在此时开始滑动。这发生在 N 仍为正的角度，这就是第一个结论。

在这个角度，由于 $sk > 0$ 且 $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$，

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

α 和 θ_1 都在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内，而 tan 在此区间上递增，所以 $\theta_1 < \alpha$：开始滑动时，木板与水平面所成的角小于 α。这就是第二个结论。

第二个结论其实没有看上去那么出人意表。在固定木板上静止的质点，恰好在木板倾角达到摩擦角（angle of friction）α 时滑动。这里木板在加速，要带动质点一同运动需要额外的力（即 $mgsk$ 项），因此摩擦力会更早支撑不住。

验算

- 当 $t = 0$ 时，木板水平，质点的加速度为 $(-sL\omega^2, 0)$，方向水平。此时 $N = mg$，而 $F = msL\omega^2 = mgsk$ 应恰好提供这个加速度，结果确实如此。
- 若 $\omega \to 0$（从而 $k \to 0$），木板被非常缓慢地擡起；此时 $N \to mg\cos\theta$，$F \to mg\sin\theta$，正是固定斜面上熟悉的平衡值，而滑动发生在 $\theta = \alpha$，即我们不等式的边界。
- 数值上，取 $s = \frac{1}{2}$、$k = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = \frac{\pi}{4}$（所以 $sk = \frac{1}{4} < 1$），解 $F/N = 1$ 可知滑动发生在 $\theta \approx 0.545$ rad，约 $31°$，此时 $N \approx 0.63mg > 0$ 且 $\theta < 45°$。用电脑对数以千计随机选

取、满足 $sk < \tan\alpha$ 的 s、k 和 α 进行检验，每次都发现滑动发生在小于 α 的角度，且 $N > 0$。

常见错误

- 把 θ 取为在 A 处而非 B 处的角：这样正弦和余弦会互换，便得不出题目给出的表达式。
- 沿水平和铅垂方向分解，然后试图解一对满是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的联立方程。沿木板及垂直于木板分解，能立即把 N 和 F 分开。
- 在第 (iv) 部分，只考虑 θ 趋近 $\frac{\pi}{2}$ 的情况，而忘记当 $k > 1$ 时，法向反作用力会更早在 $\sin\theta = 1/k$ 时变为零。

STEP 之外

这道题关乎运动参考系中的力：从木板的角度看，质点会感受到一个额外的“虚构”力（fictitious force），大小等于 $-m$ 乘以点 C 的加速度，而 $mgsk$ 项正是开始时的这个惯性力。在大学里，这个概念会发展成加速参考系和转动参考系的完整理论，包括离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）讨论了非惯性参考系，并附有大量例题。

详细解答

STEP III 2025，第 11 题

概率与统计 · 最大值的分布

STEP III 2025，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 12.25 节众多之中的最大值中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/extremes.html

关键思路

当且仅当每一个 X_i 都不超过 y 时，X_i 之中最大者才不超过 y；而独立性（independence）把这件事化为一个乘积。此后，整道题就是从 G 读出分位数（quantile），再看看当 n 很大时它们会怎样变化。真正起作用的只有一个近似：$\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n} \approx 1 + \frac{\ln\alpha}{n}$，因为当 n 很大时，$(\ln\alpha)/n$ 很小。

解答

第 (i) 部分

对于 $x \geq 0$，

$$F(x) = \int_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

由于 $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$，事件 $\{Y \leq y\}$ 与“对每一个 i 都有 $X_i \leq y$”这个事件相同。各 X_i 互相独立，所以对于 $y \geq 0$，

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X_1 \leq y) \cdots \mathrm{P}(X_n \leq y) = F(y)^n = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right)^n,$$

即为所求。

第 (ii) 部分

Y 是连续随机变量（continuous random variable），所以 $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(Y \le y) = G(y)$。因此 $L(\alpha)$ 须满足的条件是 $G(L(\alpha)) = \alpha$：

$$\begin{aligned}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda L}\right)^n = \alpha &\iff 1 - \mathrm{e}^{-\lambda L} = \alpha^{1/n} \qquad \text{（取正的 } n \text{ 次方根）} \\ &\iff \mathrm{e}^{-\lambda L} = 1 - \alpha^{1/n} \\ &\iff L(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right).\end{aligned}$$

这个对数（logarithm）有定义，因为由 $0 < \alpha < 1$ 可得 $0 < \alpha^{1/n} < 1$。

至于 $U(\alpha)$，条件 $\mathrm{P}(Y > U) = \alpha$ 即 $G(U) = 1 - \alpha$，所以把 α 换成 $1 - \alpha$ 再重复同样的步骤，便得

$$U(\alpha) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(1 - (1-\alpha)^{1/n}\right).$$

由于 $\alpha \le \frac{1}{2} \le 1 - \alpha$，而 G 是递增函数，所以 $L(\alpha) \le U(\alpha)$，且只有当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时才取等号。

第 (iii) 部分

写 $\alpha^{1/n} = \mathrm{e}^{(\ln\alpha)/n}$。当 α 固定而 n 很大时，$t = (\ln\alpha)/n$ 很小，所以由 $\mathrm{e}^t \approx 1 + t$ 得

$$1 - \alpha^{1/n} \approx -\frac{\ln\alpha}{n} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

留意这是正数，因为 $\alpha < 1$。代入第 (ii) 部分的结果，

$$\lambda L(\alpha) = -\ln\left(1 - \alpha^{1/n}\right) \approx -\ln\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\alpha}\right) = \ln(n) - \ln\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right).$$

> **想一想** 对一个近似值取对数，是否安全？$1 - \alpha^{1/n}$ 本身非常小，所以 $1 - \alpha^{1/n}$ 的误差相对于它本身可能很大。

关键在于相对误差（relative error）。设 $t = (\ln\alpha)/n$，则 $1 - \mathrm{e}^t = -t\,(1 + \frac{t}{2} + \cdots)$，所以准确值与近似值之比是 $1 + O(1/n)$。取对数后，$\lambda L(\alpha)$ 的误差是 $\ln(1 + O(1/n))$，它趋于 0。所以这个近似不仅在 n 很大时很好；两边之差确实趋于零。

第 (iv) 部分

Y 的中位数（median）m 满足 $G(m) = \frac{1}{2}$，所以 $m = L(\frac{1}{2})$（它同时也是 $U(\frac{1}{2})$）。由第 (iii) 部分，

$$\lambda m \approx \ln n - \ln(\ln 2).$$

由于 $\ln(\ln 2)$ 是一个固定的数（约为 -0.37），而 $\ln n \to \infty$，所以当 n 增大时，中位数趋于无限大。

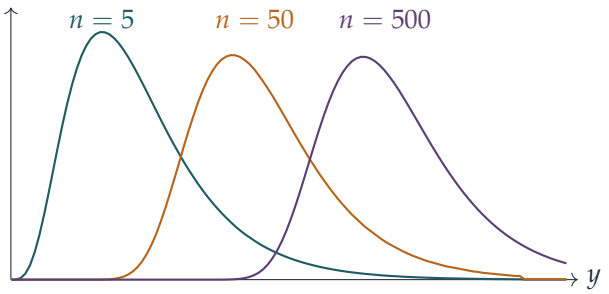
至于 $U(\alpha)$，在第 (iii) 部分中把 α 换成 $1-\alpha$：

$$\lambda U(\alpha) \approx \ln n - \ln\left(\ln\frac{1}{1-\alpha}\right).$$

两式相减，$\ln n$ 项互相抵消：

$$U(\alpha) - L(\alpha) \approx \frac{1}{\lambda}\left[\ln\left(\ln\frac{1}{\alpha}\right) - \ln\left(\ln\frac{1}{1-\alpha}\right)\right].$$

由于两个近似的误差都趋于零（正如上面方框所述），区间宽度趋于这个值，它取决于 α 和 λ，但与 n 无关。所以当 n 增大时，Y 的分布像 $\frac{1}{\lambda}\ln n$ 那样往无限大漂移，但并不会扩散开来。



上图显示 $\lambda = 1$ 时 Y 的概率密度（density）：n 每增大十倍，曲线便向右移约 $\ln 10 \approx 2.3$，而曲线的形状则趋于稳定。

第 (v) 部分

取 $\alpha = 0.05$。那么

$$\mathrm{P}\big(L(\alpha) \le Y \le U(\alpha)\big) = 1 - \mathrm{P}(Y < L) - \mathrm{P}(Y > U) = 1 - 2(0.05) = 0.9,$$

所以无论 n 是多少，Y 落在区间 $[L(0.05), U(0.05)]$ 内的概率恰好是 0.9。当 n 很大时，由第 (iv) 部分，这个区间的宽度约为

$$\frac{1}{\lambda}\left[\ln(\ln 20) - \ln\left(\ln\frac{1}{0.95}\right)\right].$$

现在运用题目给出的两个事实：

- $\mathrm{e}^3 \approx 20$，所以 $\ln 20 \approx 3$，而 $\ln(\ln 20) \approx \ln 3 \approx 1.1$；
- 利用 $\ln(1+t) \approx t$（取 $t = -0.05$），得 $\ln\frac{1}{0.95} = -\ln(1-0.05) \approx 0.05 = \frac{1}{20}$；所以 $\ln\left(\ln\frac{1}{0.95}\right) \approx \ln\frac{1}{20} = -\ln 20 \approx -3$。

因此宽度约为

$$\frac{1}{\lambda}(\ln 3 + 3) \approx \frac{4.1}{\lambda} \approx 4\lambda^{-1},$$

即为所求。

验算

- 在第 (ii) 部分中，把 $L(\alpha)$ 代回 G，得 $\left(1-(1-\alpha^{1/n})\right)^n = \alpha$，完全吻合。
- 当 $\alpha = 0.05$ 而 $n = 10^4$ 时，$\lambda L(\alpha)$ 的准确值是 8.11330，而近似式 $\ln n - \ln\ln 20$ 给出 8.11315；当 $n = 10$ 时，两者分别是 1.35 和 1.21，可见“足够大”这个条件确实重要。
- 第 (v) 部分中宽度的准确极限值是 $4.067/\lambda$，与 $4/\lambda$ 相当接近。以电脑模拟五个指数分布随机变量的最大值，结果亦与 $G(y)$ 吻合至三位小数。

常见错误

- 写成 $G(y) = 1-(\mathrm{e}^{-\lambda y})^n$：这是最小值的累积分布函数（cumulative distribution function），而不是最大值的。
- 把 $\mathrm{P}(Y > U) = \alpha$ 写成 $G(U) = \alpha$，而不是 $G(U) = 1-\alpha$。
- 在第 (v) 部分中选取 $\alpha = 0.1$：区间两端的尾部各应留下 0.05，而不是 0.1。

STEP 之外

这是初窥极值理论（extreme value theory）。第 (iii) 部分其实是在说明 $\lambda Y - \ln n$ 有一个极限分布（limiting distribution），且 $\mathrm{P}(\lambda Y - \ln n \le x) \to \exp(-\mathrm{e}^{-x})$：这就是甘贝尔分布（Gumbel distribution），可用来为破纪录的洪水、一年中最强的阵风以及最大额的保险索偿建立模型。一条了不起的定理指出，经适当缩放的最大值只可能收敛到三个分布族之一。Blitzstein 和 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）讨论了顺序统计量（order statistics），是入门的好起点。

详细解答

STEP III 2025，第 12 题

概率与统计 • 递归随机变量

STEP III 2025，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分其实只是把一个二重和（double sum）用两种方式写出来：两边都是把 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ 在同一组数对 (r,s) 上加起来，一边逐行计算，另一边逐列计算。在第 (ii) 部分，以前一个值 X_{n-1} 为条件（conditioning），可把每个概率 $\mathrm{P}(X_n = r)$ 写成恰好是 (i) 左边那种形式的和。交换求和次序后，$\mathrm{E}(X_n)$ 就变成一个能以 $\mathrm{E}(X_{n-1})$ 表示的式子。

解答

第 (i) 部分

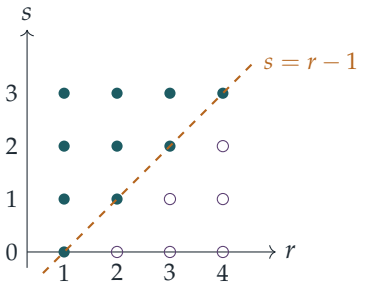
把括号展开，左边是

$$\sum_{r=1}^{m+1}\sum_{s=r-1}^{m}\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s),$$

即 $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ 在所有满足

$$1\le r\le m+1 \quad 及 \quad r-1\le s\le m.$$

的整数对 (r,s) 上的和。我们先固定 s 来描述同一组数对。这些条件迫使 $0\le s\le m$（因为 $s\ge r-1\ge 0$），而对于这样的某个 s，容许的 r 是满足 $1\le r$ 及 $r\le s+1$ 的那些；注意 $s+1\le m+1$，所以界限 $r\le m+1$ 自动成立。反过来，任何满足 $0\le s\le m$ 及 $1\le r\le s+1$ 的数对都符合原来的条件。下图显示 $m=3$ 时的三角形数对区域。



按列求和（固定 r）得到左边；按行求和（固定 s）则得到

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{s+1} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s) = \sum_{s=0}^{m}\Big(\mathrm{g}(s)\sum_{r=1}^{s+1}\mathrm{f}(r)\Big),$$

这正是右边，得证。由于这些都是有限和，重新排列求和次序总是容许的。

第 (ii)(a) 部分

X_1 取 0 或 1 的机会均等，所以 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$。

至于 X_2，以 X_1 为条件。若 $X_1 = 0$，则 X_2 在 $\{0,1\}$ 上均匀分布（uniform）；若 $X_1 = 1$，则 X_2 在 $\{0,1,2\}$ 上均匀分布。由全概率定律（law of total probability），

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = 0) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 1) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},
\end{aligned}$$

如题所求（三者之和为 1，这是个有用的验算）。因此

$$\mathrm{E}(X_2) = 0\cdot\tfrac{5}{12} + 1\cdot\tfrac{5}{12} + 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{4}.$$

第 (ii)(b) 部分

由归纳法（induction），X_{n-1} 的取值在 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ 之中（每一步把可能的最大值提高一）。已知 $X_{n-1} = s$ 时，X_n 在 $s+2$ 个值 $0,1,\ldots,s+1$ 上均匀分布，所以

$$\mathrm{P}(X_n = r \mid X_{n-1} = s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+2}, & 0 \le r \le s+1,\\[2mm] 0, & r > s+1. \end{cases}$$

值 $r = 0$ 总是可能出现的，所以全概率定律给出

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1} = s)}{s+2}.$$

对于 $1 \le r \le n$，只有满足 $s+1 \ge r$，即 $s \ge r-1$ 的那些 s 才有贡献：

$$\mathrm{P}(X_n = r) = \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{\mathrm{P}(X_{n-1}=s)}{s+2}, \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

（当 $r=1$ 时，这与 $r=0$ 的和相同，所以对每个 $n \ge 1$ 都有 $\mathrm{P}(X_n=0) = \mathrm{P}(X_n=1)$，与 (a) 中两个 $\frac{5}{12}$ 吻合。）

第 (ii)(c) 部分

记 $p_s = \mathrm{P}(X_{n-1}=s)$。$r=0$ 的项对期望值（expectation）没有贡献，所以由 (b)，

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{r=1}^{n} r\,\mathrm{P}(X_n=r) = \sum_{r=1}^{n}\Big(r \sum_{s=r-1}^{n-1} \frac{p_s}{s+2}\Big).$$

? **想一想** 第 (i) 部分在这里如何应用?

这就是 (i) 的左边，其中 $m = n-1$（因 $n \ge 1$，这是容许的）、$\mathrm{f}(r) = r$ 及 $\mathrm{g}(s) = p_s/(s+2)$。交换求和次序，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n) &= \sum_{s=0}^{n-1}\Big(\frac{p_s}{s+2}\sum_{r=1}^{s+1} r\Big) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{p_s}{s+2}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\,p_s = \frac{1}{2}\Big(\sum_{s=0}^{n-1} p_s + \sum_{s=0}^{n-1} s\,p_s\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(1 + \mathrm{E}(X_{n-1})\big),
\end{aligned}$$

这里用了 $\sum p_s = 1$。这就是所求的结果。

直观而言：已知 $X_{n-1}=s$ 时，在 $\{0,\ldots,s+1\}$ 上均匀分布的变量的平均值是 $\frac{1}{2}(s+1)$，所以这其实是乔装了的塔性质（tower law）。

要解这个递推关系（recurrence relation），记 $e_n = \mathrm{E}(X_n)$。两边同时减去 1，

$$e_n - 1 = \tfrac{1}{2}\,(e_{n-1} - 1),$$

所以 $e_n - 1$ 每一步减半。由于 $e_0 = 0$，得 $e_n - 1 = -\big(\frac{1}{2}\big)^n$，即

$$\mathrm{E}(X_n) = 1 - \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

验算

此公式给出 $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$ 及 $\mathrm{E}(X_2) = \frac{3}{4}$，与 (a) 一致。逐步计算 X_n 的精确分布直至 $n=15$，证实了 (b) 中的表达式及 $\mathrm{E}(X_n) = 1 - 2^{-n}$；例如 $\mathrm{E}(X_5) = \frac{31}{32} \approx 0.969$，而以电脑模拟 200 000 次得到 0.967。当 $n \to \infty$ 时，平均值趋向 1，这是合理的：每一步都把平均值向 1 拉近一半距离。

常见错误

- 把 $\mathrm{P}(X_n = r)$ 的和从 $s = r$ 而非 $s = r - 1$ 开始：由于 X_n 最大可达 $X_{n-1} + 1$，值 r 可以从 $s = r - 1$ 到达。
- 在 (c) 中交换次序时弄错上下限：交换后，r 由 1 取到 $s + 1$，得 $\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$，而因子 $s + 2$ 会整齐地约去。
- 以 e_1 作为起始值解递推关系，却写成 $1 - 2^{-(n-1)}$；应以 $e_1 = \frac{1}{2}$ 核对。

STEP 之外

这里的过程是一条马尔可夫链（Markov chain）：X_n 的分布只取决于 X_{n-1}，而 (b) 就是把概率向量（probability vector）乘以转移矩阵（transition matrix）的一步。(c) 中的捷径是全期望定律（law of total expectation），$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1})\big)$，它能把许多这类问题化为线性递推关系。这两个概念在 Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）中都有进一步发展。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

2025 年详细解答. 全书各章及
所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为
beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。

