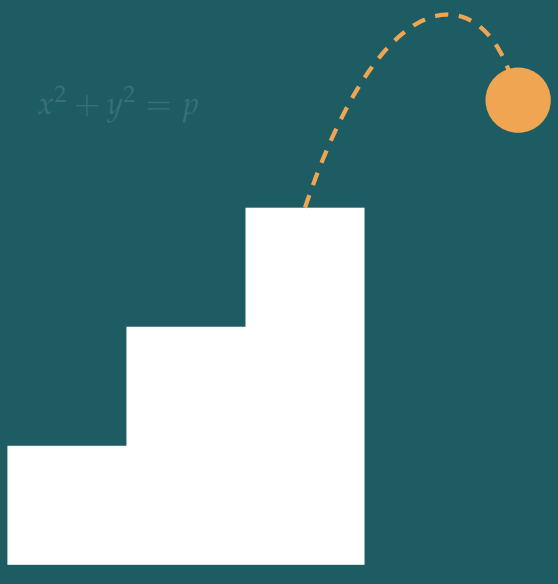
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

1999 年详细解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

STEP I, II 及 III

1999 年详细解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

1999 年详细解答

1999 年 STEP 试卷（STEP I, II 及 III）全部 42 题的详细解答。自样本试卷以来每一道 STEP 题目的详细解答、*Beyond STEP* 全书以及各章的单行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

阅读解答之前，请先认真尝试解题。每个答案均已用数值方法核对，但解答数量如此之多，难免会有疏漏：如果发现有可疑之处，请相信自己的演算，并仔细检查。

由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目录

STEP I

第 1 题 互质整数的计数 纯数学 3

第 2 题 轨迹与形心 纯数学 6

第 3 题 轮换方程组 纯数学 9

第 4 题 含绝对值的区域 纯数学 13

第 5 题 小角近似 纯数学 18

第 6 题 二次函数的极值 纯数学 22

第 7 题 二阶微分方程 纯数学 26

第 8 题 调和级数的界限 纯数学 30

第 9 题 匀速率运动学 力学 34

第 10 题 简谐运动 力学 38

第 11 题 变力作用下的圆周运动 力学 42

第 12 题 灌铅骰子的不等式 概率与统计 46

第 13 题 指示变量 概率与统计 50

第 14 题 条件概率 概率与统计 53

STEP II

第 1 题 大数的比较 纯数学 56

第 2 题 二次方程的判别式 纯数学 59

第 3 题 数学归纳法 纯数学 63

第 4 题 二项式系数恒等式 纯数学 66

第 5 题 三角方程 纯数学 69

第 6 题 代换积分法 纯数学 72

第 7 题 曲线描绘 纯数学 75

第 8 题 三角级数 纯数学 80

第 9 题 变力作用下的运动 力学 . . . 83
第 10 题 连续碰撞 力学 . . . 87
第 11 题 抛体与移动目标 力学 . . . 91
第 12 题 贝叶斯定理 概率与统计 . . . 95
第 13 题 连续随机变量 概率与统计 . . . 98
第 14 题 最优停止 概率与统计 . . . 101

STEP III

第 1 题 三次方程的根 纯数学 . . . 105
第 2 题 实根的计数 纯数学 . . . 108
第 3 题 黎曼和与极限 纯数学 . . . 112
第 4 题 欧拉公式与多面体 纯数学 . . . 116
第 5 题 斐波那契恒等式与数学归纳法 纯数学 . . . 120
第 6 题 参数曲线与面积 纯数学 . . . 123
第 7 题 群与同构 纯数学 . . . 127
第 8 题 分段微分方程 纯数学 . . . 130
第 9 题 牛顿壳层定理 力学 . . . 134
第 10 题 落链条的冲量 力学 . . . 138
第 11 题 刚体转动 力学 . . . 141
第 12 题 离散联合分布 概率与统计 . . . 144
第 13 题 连续先验分布的贝叶斯定理 概率与统计 . . . 147
第 14 题 条件化求期望值 概率与统计 . . . 150

详细解答

STEP I 1999，第 1 题

纯数学 · 互质整数的计数

> **STEP I 1999，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q1

关键思路

能否被 2 和 5 整除（divisibility）只取决于末位数字，而能否被 3 和 7 整除只取决于模（modulo）21 的余数（remainder）。因此，我们要找的整数会按固定的规律一段接一段地重复出现，要数它们的个数，只需数出一段中有多少个，再乘以段数。至于平均值，窍门在于对称（symmetry）：若 n 在集合内，它的“拍档”$N-n$ 也在集合内，于是这些数便围绕中点两两配对。

解答

第 1 部分：小于一百万且不能被 2 或 5 整除的整数

“不能被 2 或 5 整除”的意思是两者都不能整除。一个整数能被 2 或 5 整除，当且仅当它的末位数字是 $0, 2, 4, 5, 6$ 或 8。所以我们要找的是末位数字为 1、3、7 或 9 的整数。

整数 $0, 1, \ldots, 999\,999$ 可分成 100 000 段，每段是十个连续整数 $10k, 10k+1, \ldots, 10k+9$，而每段恰好包含四个我们要找的整数。因此个数为

$$4 \times 100\,000 = 400\,000.$$

（用容斥原理（inclusion–exclusion）也得到相同结果：$10^6 - \frac{1}{2}10^6 - \frac{1}{5}10^6 + \frac{1}{10}10^6 = 400\,000$。）

求平均值时，把每个这样的 n 与 $10^6 - n$ 配对。若 n 的末位数字是 $1, 3, 7, 9$，则 $10^6 - n$ 的末位数字分别是 $9, 7, 3, 1$，而且因为 $n \neq 0$，所以 $0 < 10^6 - n < 10^6$。因此 $n \mapsto 10^6 - n$ 把这个集合映射到它自身，而且这个映射是它自己的逆映射（inverse）。它没有不动点（fixed point），因为 $n = 500\,000$ 是偶数。于是这个集合分成 200 000 对，每对之和为 10^6。

总和是 $200\,000 \times 10^6$，平均值是

$$\frac{200\,000 \times 10^6}{400\,000} = 500\,000.$$

第 2 部分：小于 4179 且不能被 3 或 7 整除的整数

4179 这个数是精心挑选的：

$$4179 = 3 \times 1393 = 3 \times 7 \times 199 = 21 \times 199.$$

n 能否被 3 或 7 整除，只取决于 n 除以 21 所得的余数。在余数 $0, 1, \ldots, 20$ 之中，3 的倍数有 $0, 3, \ldots, 18$（共七个），7 的倍数有 $0, 7, 14$（共三个），其中 0 在两边都数了一次。所以有 $21 - 7 - 3 + 1 = 12$ 个余数不能被两者中任何一个整除：

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10,\ 11,\ 13,\ 16,\ 17,\ 19,\ 20.$$

整数 $0, 1, \ldots, 4178$ 恰好组成 199 个完整的段，每段长 21，所以个数为

$$12 \times 199 = 2388.$$

作为验算，用容斥原理：$4179 - 1393 - 597 + 199 = 2388$。

> **想一想** 这里的数与十进制数字毫无关系，为甚么对称的窍门仍然行得通？

关键在于 21 整除 4179。于是 $4179 - n \equiv -n \pmod 3$ 以及 $\pmod 7$，所以 $3 \mid 4179 - n$ 当且仅当 $3 \mid n$，对 7 亦然。此外，$n = 0$ 已被排除（它能被任何数整除），所以集合中每个 n 都满足 $1 \le n \le 4178$，从而亦有 $1 \le 4179 - n \le 4178$。因此 $n \mapsto 4179 - n$ 把这个集合映射到它自身。它没有不动点，因为 4179 是奇数。于是这 2388 个整数组成 1194 对，每对之和为 4179，平均值是

$$\frac{1194 \times 4179}{2388} = \frac{4179}{2} = 2089\tfrac{1}{2}.$$

验算

用电脑把所有整数逐一检查，可确认个数 400 000 和 2388 以及平均值 500 000 和 2089.5 完全正确。你也可以亲手验算一个小例子：在小于 21 的范围内，上面列出的十二个余数之和为 $126 = 12 \times \frac{21}{2}$，所以它们的平均值是 $10.5 = \frac{21}{2}$，与配对论证所预测的完全一致。

常见错误

- 把“不能被 2 或 5 整除”理解为“不能同时被两者整除”，即不能被 10 整除。这样会得出 900 000 个整数。

- 使用容斥原理时，忘记把 21 的倍数（或 10 的倍数）加回去，因为它们被减了两次。
- 没有检查集合是否对称，就假定平均值必定是范围的中点。这里之所以行得通，只因为 10 整除 10^6，而 21 整除 4179。

STEP 之外

在 $1, \ldots, m$ 之中与 m 互质(coprime)的整数的个数,就是欧拉函数(Euler's totient function) $\varphi(m)$。这里 $\varphi(10) = 4$ 及 $\varphi(21) = 12$, 而所求的个数就是 $\varphi(10^6) = 400\,000$ 和 $199\,\varphi(21)$。配对 $n \leftrightarrow m - n$ 说明，当 $m > 2$ 时，与 m 互质的整数之和总是 $\frac{1}{2} m\,\varphi(m)$，这个事实是踏入模 m 整数算术的第一步。想进一步阅读，达文波特（Davenport）的 *The Higher Arithmetic* 是极佳的入门书。

详细解答

STEP I 1999，第 2 题

纯数学 · 轨迹与形心

> **STEP I 1999，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q2

关键思路

写下条件并展开，便会得到 x^2 和 y^2 的系数同为 3，而且没有 xy 项：这正是圆的特征。配方法（completing the square）显示出圆心的位置，而形心（centroid）亦自然出现，因为一次项中出现的正是 $x_1 + x_2 + x_3$。至于对 a^2 的限制，只要问一问“半径的平方”何时可以是负数，答案便呼之欲出。

解答

轨迹

设 $P = (x, y)$ 为轨迹（locus）上的一点，并记 $A_i = (x_i, y_i)$，其中 $i = 1, 2, 3$。条件是

$$\sum_{i=1}^{3} \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right] = a^2.$$

展开，并利用 $x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{x}$ 及 $y_1 + y_2 + y_3 = 3\bar{y}$，得

$$3x^2 - 6\bar{x}\,x + 3y^2 - 6\bar{y}\,y + \sum_i (x_i^2 + y_i^2) = a^2.$$

这就是轨迹的方程。要看清它是甚么，把方程除以 3 再配方：

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - \sum_i (x_i^2 + y_i^2) + 3\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2}{3}.$$

分子可以整理得相当简洁。由于 $\sum_i x_i = 3\bar{x}$，

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x} \cdot 3\bar{x} + 3\bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - 3\bar{x}^2,$$

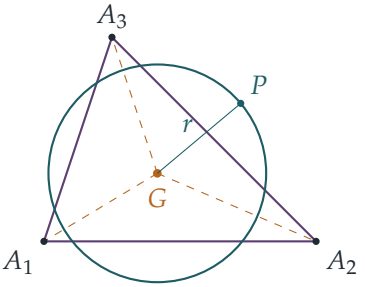
y 的情况亦相同。因此，若记

$$S = \sum_{i=1}^{3}\left[(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2\right]$$

为三点与其形心 $G = (\bar{x}, \bar{y})$ 的距离的平方和，则轨迹为

$$\boxed{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \frac{a^2 - S}{3}}.$$

诠释。当 $a^2 > S$ 时，这是一个圆，圆心是三点的形心 G，半径为 $\sqrt{(a^2 - S)/3}$。随着 a^2 变化，我们得到一族以 G 为圆心的同心圆（concentric circles）。在临界情况 $a^2 = S$ 时，这个“圆”收缩成单独一点 G。



为何 a^2 不能小于 S

想一想 方框内方程的右边是负数，这代表甚么？

左边 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2$ 是实数的平方和，所以永不为负。若 $a^2 < S$，右边是负数，没有任何实点 (x, y) 满足方程：轨迹是空集。因此，要有点能够按题目所述移动，必须有 $a^2 \geq S$。

把同一番运算倒过来看，会很有启发。我们实际上证明了的，是以下对任意点 P 均成立的恒等式（identity）：

$$PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2 = 3\,PG^2 + S.$$

由于 $PG^2 \geq 0$，和 $PA_1^2 + PA_2^2 + PA_3^2$ 必定不小于 S，而等号仅在 $P = G$ 时成立。用文字来说：形心就是令到三点的距离平方和最小的那一点，而最小值为 S。一个比这最小值还要小的常数和 a^2 是不可能的。

验算

- 取 $A_1 = (0,0)$、$A_2 = (4,0)$、$A_3 = (1,3)$，则 $G = (\frac{5}{3}, 1)$，且 $S = \frac{34}{9} + \frac{58}{9} + \frac{40}{9} = \frac{44}{3}$。在 $P = G$ 时，距离平方和恰好是 $\frac{44}{3} \approx 14.67$；在 $P = (0,0)$ 时，它是 $0 + 16 + 10 = 26$，

而 $3PG^2 + S = 3 \cdot \frac{34}{9} + \frac{44}{3} = 26$，与恒等式所预测的一致。

- 另一个有用的形式：$S = \frac{1}{3}\left(A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_1^2\right)$。在上述例子中，各边长的平方为 16、18 和 10，同样得出 $\frac{44}{3}$。
- 我们以分数作精确运算，在 2000 组随机抽取的三点上检验了这个恒等式，并以数值方法确认了圆上的点给出的和为 a^2，以及该和的最小值为 S，在 G 处取得。

常见错误

- 把半径留作 $\sqrt{\left(a^2 - \sum(x_i^2 + y_i^2)\right)/3 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2}$，而没有认出它可以用 S 表示；这样一来，最后一部分便很难看得出来。
- 忘记退化情况（degenerate case）$a^2 = S$，此时轨迹是单独一点，而不是圆。

STEP 之外

恒等式 $\sum PA_i^2 = 3PG^2 + \sum GA_i^2$ 是转动惯量（moment of inertia）的平行轴定理（parallel axis theorem）的一种形式；在统计学中，它就是把平方和分解为“组间”（between）与“组内”（within）两部分：平均值正是令离差平方和最小的那个值，而这就是最小二乘法（least squares）拟合之所以行得通的根本原因。在线性代数中，它是乔装了的毕氏定理（Pythagoras′ theorem），因为由 G 到 P 的向量与各离差 $A_i - G$（在适当的意义下）正交（orthogonal），而这些离差之和为零。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）阐述了这种以投影（projection）看待最小二乘法的观点。

详细解答

STEP I 1999，第 3 题

纯数学 · 轮换方程组

STEP I 1999，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q3

关键思路

每条方程都是 $x_k = f(x_{k+1})$ 的形式，其中 $f(x) = 1 + 1/x$，而整个方程组首尾相接，形成一个环。相邻两项之差遵从一个简单的规律：每个差等于下一个差除以两个大于 1 的数之积。因此沿着环走一圈，这些差只会愈来愈小。既然最后回到起点，它们必定全部为零。

以下一律把下标按循环（cyclic）方式理解：x_{n+1} 即 x_1，x_{n+2} 即 x_2。这样，方程组中每条方程都可写成同一形式

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

解答

第 (i) 部分

所有 x_k 皆为正数，所以对每个 k 都有 $1/x_{k+1} > 0$。因此

$$x_k = 1 + \frac{1}{x_{k+1}} > 1 \qquad \text{对于} k = 1, 2, \ldots, n,$$

而由于下标是循环的，这已涵盖 $x_1, \ldots, x_n$ 中的每一个（最后一个是 $x_n = 1 + 1/x_1$）。所以 $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$。

第 (ii) 部分

把第一条方程减去第二条方程：

$$x_1 - x_2 = \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 x_3} = -\frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3},$$

这正是所求的结果。我们只用了 $x_1 = 1 + 1/x_2$ 和 $x_2 = 1 + 1/x_3$（以及 $n \geq 3$，使得 x_3 是另一个变量）。对任意两条相邻的方程作完全相同的计算，便得到对每个 k 都有

$$x_k - x_{k+1} = -\frac{x_{k+1} - x_{k+2}}{x_{k+1} x_{k+2}} \qquad \text{(下标按循环方式理解)}.$$

第 (iii) 部分

记相邻两项之差为 $d_k = x_k - x_{k+1}$，故 $d_n = x_n - x_1$。(ii) 的一般形式就是 $d_k = -d_{k+1}/(x_{k+1}x_{k+2})$。取绝对值（absolute value），并利用第 (i) 部分所给出的 $x_{k+1}x_{k+2} > 1$，

$$|d_k| = \frac{|d_{k+1}|}{x_{k+1}x_{k+2}} \leq |d_{k+1}|,$$

而且只要 $d_{k+1} \neq 0$，不等式（inequality）就是严格成立的。把这些不等式沿着环逐一串连起来，

$$|d_1| \leq |d_2| \leq |d_3| \leq \cdots \leq |d_n| \leq |d_1|.$$

两端是同一个数，所以这串不等式中每一个都是等式。特别地，$|d_1| = |d_2|$。但假如 $d_2 \neq 0$，我们便会有严格的 $|d_1| < |d_2|$，所以 $d_2 = 0$；于是所有 $|d_k|$ 既然都等于 $|d_2|$，也就全部为零。

? **想一想** 我们究竟在哪一步用到了方程组首尾相接，即 $x_n = 1 + 1/x_1$?

只在这串不等式的最后一环 $|d_n| \leq |d_1|$ 用到，它来自 $x_n = 1 + 1/x_1$。没有这一环，这些差大可以随 k 增加而愈来愈大；事实上，一条不闭合的链 $x_1, \ldots, x_n$ 不一定是常数。正是因为要回到起点，所谓的缩小才被迫变成完全没有缩小。

所以对每个 k 都有 $x_k = x_{k+1}$，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$。

x_1 的值

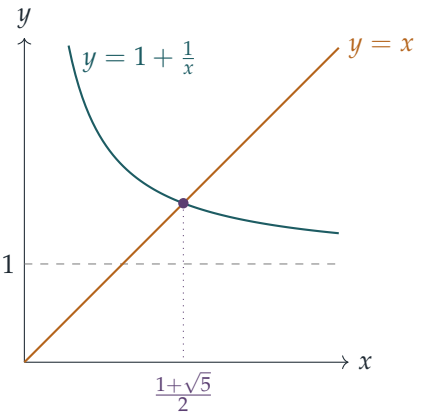
把这个共同的值称为 x。现在任何一条方程都变成 $x = 1 + 1/x$，所以

$$x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

由第 (i) 部分知 $x > 1$，故负根须舍去，所以

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

反过来，令每个 x_k 都等于这个值，确实满足全部 n 条方程，所以方程组的确有这个解，而由 (iii) 可知再没有其他解。从几何上看，x 就是曲线 $y = 1 + 1/x$ 与直线 $y = x$ 相交之处：



验算

- 取 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180$，得 $1 + 1/x \approx 1 + 0.6180 = 1.6180$，符合要求。
- (ii) 中的恒等式（identity）可以用任何一条不闭合的链来检验：取 $x_3 = 2$，则 $x_2 = \frac{3}{2}$，$x_1 = \frac{5}{3}$。于是 $x_1 - x_2 = \frac{1}{6}$，而 $-(x_2 - x_3)/(x_2 x_3) = \frac{1/2}{3} = \frac{1}{6}$。
- 沿着环走完一整圈，得 $x_1 = f^n(x_1)$，其中 $f(x) = 1 + 1/x$。对 $n = 3, \ldots, 11$，在 $(0, 20)$ 上以数值方法扫描 $f^n(x) - x$，只找到一次变号，位于 $x \approx 1.618$，由此确认没有其他解。

常见错误

- 单凭 $|d_1| \le |d_2|$ 就去证明 (iii)。一步只说明这些差不会变大；你必须沿着环走完一整圈，回到 $|d_1|$。
- 先假设各个 x_k 相等，然后求 x_1。第 (iii) 部分才是这样做的依据，而它需要第 (i) 部分的严格不等式 $x_{k+1} x_{k+2} > 1$。
- 忘记舍去 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，它是负数。

STEP 之外

这道题的核心在于：在 $x > 1$ 上，$f(x) = 1 + 1/x$ 会把点拉得更近，因为 $|f(a) - f(b)| = |a - b|/(ab)$。这样的映射称为压缩映射（contraction），而巴拿赫不动点定理（Banach fixed-point theorem）指出，完备空间（complete space）上的压缩映射恰有一个不动点，而且从任何起点开始迭代（iteration）都会收敛（converge）到这个不动点。在这里从 $x = 1$ 开始迭代，得到的是相邻斐波那契数（Fibonacci numbers）之比 $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$，以及黄金比（golden ratio）的连分数（continued fraction）$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$。分析方面，可读 Abbott 的 *Understanding Analysis*。连分数方面，可读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

详细解答

STEP I 1999，第 4 题

纯数学 · 含绝对值的区域

> **STEP I 1999，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q4

关键思路

绝对值（modulus）符号把平面分成若干区域，在每个区域内各括号的正负号固定，于是条件就变成普通的线性不等式（最后一部分则是双曲线型的不等式）。另一个大大节省时间的方法是利用对称（symmetry）和平移（translation）：$|x|$ 和 $|y|$ 令集合对两条坐标轴都对称，所以只需在一个象限内计算，然后作反射；而把 x 换成 $x-1$，只是把整个图形向右平移一个单位。

解答

第 (i) 部分

把 x 换成 $-x$ 或把 y 换成 $-y$，集合都不变，所以它对两条坐标轴都对称。在第一象限（$x \geq 0$，$y \geq 0$）内，条件就是 $x+y \leq 1$：即顶点为 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 的三角形。对两条坐标轴作反射，便得到四个三角形，合起来是一个以一角竖立的正方形，顶点为

$$(1,0),\quad (0,1),\quad (-1,0),\quad (0,-1).$$

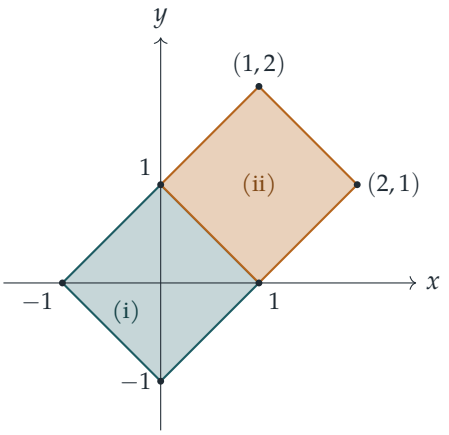
换句话说，它是四个半平面（half-plane）$\pm x \pm y \leq 1$ 的交集。边界包括在内（不等式是 $\leq$），面积为 2。

第 (ii) 部分

设 $X = x-1$，$Y = y-1$。条件于是变成 $|X|+|Y| \leq 1$，也就是 (X,Y) 坐标下的第 (i) 部分。因此这个集合就是把第 (i) 部分的正方形平移 $(1,1)$ 所得：中心为 $(1,1)$，顶点为

$$(2,1),\quad (1,2),\quad (0,1),\quad (1,0),$$

由直线 $x+y=1$、$x+y=3$、$y=x+1$ 和 $y=x-1$ 围成。它与两条坐标轴相接，接点分别是 $(1,0)$ 和 $(0,1)$。



第 (iii) 部分

同样先作平移：设 $X=x-1$，$Y=y+1$，条件变成

$$|X|\le 1+|Y|.$$

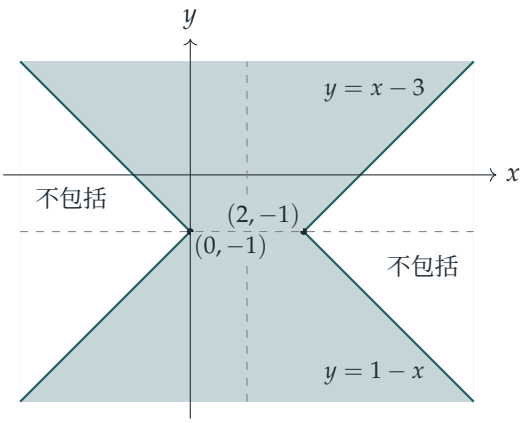
这个条件对 X 轴和 Y 轴都对称，即对直线 $x=1$ 和 $y=-1$ 对称。在象限 $X\ge 0$、$Y\ge 0$ 内，条件是 $X\le 1+Y$：即直线 $X=1+Y$ 左方的所有点，这条直线通过 $(1,0)$，斜率为 1。作反射之后，这个集合包含平面上所有的点，只除去两个开的楔形区域：

- 右边是 $X>1+|Y|$：一个直角楔形，顶点为 $(X,Y)=(1,0)$，向右张开，边界为 $Y=\pm(X-1)$；
- 左边是 $X<-1-|Y|$：它的镜像，顶点为 $(-1,0)$，向左张开。

想一想 这个集合是否像 (i) 和 (ii) 那样有界（bounded）?

不是。那个负号改变了一切：$|Y|$ 越大，条件反而越容易满足，所以对每个固定的 Y，容许的 X 构成区间 $-1-|Y|\le X\le 1+|Y|$，而这个区间随 $|Y|$ 增大而变阔。特别地，整条垂直线 $X=0$（即 $x=1$）都在集合之内。

回到 x,y 坐标，两个顶点是 $(2,-1)$ 和 $(0,-1)$。被排除的右楔形是 $x>2+|y+1|$，边界是 $x\ge 2$ 时的两条半直线 $y=x-3$ 和 $y=1-x$；被排除的左楔形是 $x<-|y+1|$，边界是 $x\le 0$ 时的 $y=x-1$ 和 $y=-1-x$。边界线本身属于这个集合。在直线 $y=-1$ 上，集合只是线段 $0\le x\le 2$，那是它最窄的地方。



虚线 $x = 1$ 和 $y = -1$ 是对称轴。

第 (iv) 部分

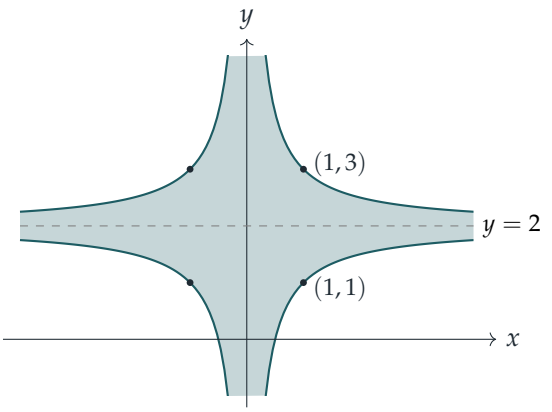
设 $Y = y - 2$，条件变成 $|x|\,|Y| \le 1$，它对 x 轴方向和直线 $Y = 0$（即 $y = 2$）都对称。在象限 $x \ge 0$、$Y \ge 0$ 内：

- 若 $x = 0$，条件对任何 Y 都成立，所以整条 y 轴都在集合之内；
- 若 $x > 0$，我们可以除以 x，条件变成 $0 \le Y \le 1/x$：即双曲线（hyperbola）$Y = 1/x$ 下方的区域。

对两条对称轴作反射，这个集合就是

$$x = 0, \quad \text{或} \quad 2 - \frac{1}{|x|} \le y \le 2 + \frac{1}{|x|} \ \ (x \ne 0),$$

即夹在双曲线 $(y-2)x = \pm 1$ 四条分支之间的区域。它包含整条 y 轴和整条直线 $y = 2$，而这两条直线正是边界曲线的渐近线（asymptote）。它看起来像一个以 $(0,2)$ 为中心的粗身加号：“正方形” $|x| \le 1$、$|y-2| \le 1$ 的四个角落在边界上，位于 $(\pm 1, 1)$ 和 $(\pm 1, 3)$；当 $|x| \to \infty$ 时，横臂向 $y = 2$ 收窄；当 $|y| \to \infty$ 时，直臂向 y 轴收窄。这个集合是无界的（不过有趣的是，它的面积是无限大）。



验算

- 取几个点代入原来的不等式检验。在 (iii) 中，$(1, 100)$ 给出 $0 - 101 \leq 1$，所以它在集合之内（证实集合是无界的），而 $(2.01, -1)$ 给出 $1.01 > 1$，刚好在右边顶点之外。在 (iv) 中，$(2, 2.5)$ 给出 $2 \times 0.5 = 1$，在边界上，而 $(2, 2.51)$ 则刚好在外面。
- 在 (i) 中，四个三角形每个面积为 $\frac{1}{2}$，所以正方形的面积是 2；用格点数算得到 2.002。
- 我们为每一部分在 $[-6, 6]^2$ 内测试了 400,000 个随机点，把原来的不等式与我们的描述（半平面、被排除的楔形，或 $|y - 2| \leq 1/|x|$）互相比较；结果完全一致。

常见错误

- 在 (ii) 和 (iii) 中，平移方向弄错：$|x - 1|$ 把图形移到 $x = +1$，而 $|y + 1|$ 把图形移到 $y = -1$。
- 在 (iii) 中，仿照 (i) 画出一个有界的菱形。负号把 $|y + 1|$ 的作用倒转了，集合其实是无界的。
- 在 (iv) 中，没有另外处理 $x = 0$ 就除以 $|x|$，因而遗漏了整条 y 轴都属于这个集合这一事实。

STEP 之外

(i) 中的集合是“计程车”范数（taxicab norm）$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$ 的单位球（unit ball），而 (ii) 则是以 $(1, 1)$ 为中心、半径为 1 的球。不同的范数给出形状不同的单位球（通常的距离给出圆形，$\max(|x|, |y|)$ 给出边为水平的正方形），而分析或度量空间（metric space）的入门课程会证明，在 $\mathbb{R}^2$ 上它们所定义的收敛（convergence）和连续（continuity）概

念完全相同。Bartle 与 Sherbert 合著的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）是认识这些概念的好起点。

详细解答

STEP I 1999，第 5 题

纯数学 • 小角近似

STEP I 1999，第 5 题

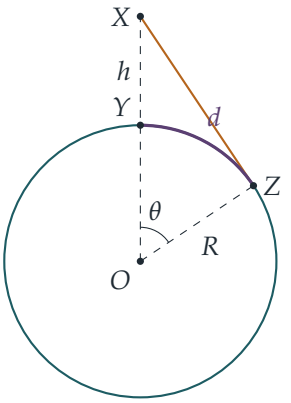
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q5

关键思路

“刚好在地平线上看见”的意思是，由 Z 望向 X 的视线刚好擦过地球表面，所以这条视线是地球在 Z 处的切线（tangent），并与半径 OZ 垂直。这样便得到一个以地心 O 为顶点之一的直角三角形，而弧（arc）YZ 的长度等于 R 乘以 O 处的角。至于那两个近似式（approximation），则分别来自考虑这个角很小的情况，以及这个角接近直角的情况。

解答



第 (i) 部分

设 O 为地球的中心，并设 $\theta = \angle YOZ$。由于 X 位于 Y 的正上方，O、Y、X 三点共线（collinear），且 $OX = R + h$。由于从 Z 刚好可以看见 X，直线 ZX 与地球相切于 Z，所

以它与半径 OZ 垂直。在直角三角形 OZX 中，

$$\cos\theta = \frac{OZ}{OX} = \frac{R}{R+h}.$$

在半径为 R 的圆上，对应圆心角 θ 的弧 YZ 的长度为 $R\theta$，所以

$$d = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right).$$

这里 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，因为 $0 < R/(R+h) < 1$。

第 (ii) 部分

当 h 相对于 R 很小时，$\cos\theta = R/(R+h)$ 接近 1，所以 θ 很小，我们可以使用 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$。此外，

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{h}{R+h} \approx 1 - \frac{h}{R},$$

因为 $R + h \approx R$。令两者相等，

$$1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 \approx 1 - \frac{h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta^2 \approx \frac{2h}{R} \quad\Longrightarrow\quad \theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}},$$

其中因 $\theta > 0$ 而取正根。因此

$$d = R\theta \approx R\sqrt{\frac{2h}{R}} = \sqrt{2}\,(Rh)^{1/2},$$

这正是所要求的形式，其中 $k = \sqrt{2}$。

第 (iii) 部分

现在 $R/(R+h)$ 很小，所以 $\cos\theta$ 接近 0，而 θ 接近 $\frac{\pi}{2}$，并不是小角。题目给出的近似式只适用于小角，所以我们改为量度那个*确实*很小的角。

> ? **想一想** 这里哪一个角是小角？哪一个近似式适用于它？

记 $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$，其中 $\phi = \angle OXZ$ 是卫星处的角，当卫星离得很远时，这个角很小。于是 $\cos\theta = \sin\phi$，所以

$$\sin\phi = \frac{R}{R+h}.$$

我们需要把这个式子准确至 R/h 的二阶，因为答案中有一项 R^2/h。由二项式展开（binomial expansion），因 $R/h < 1$ 而成立，

$$\frac{R}{R+h} = \frac{R}{h}\left(1 + \frac{R}{h}\right)^{-1} = \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2} + \cdots.$$

利用 $\sin\phi \approx \phi$，

$$\phi \approx \frac{R}{h} - \frac{R^2}{h^2}.$$

因此

$$\begin{aligned} d = R\theta &= R\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) \\ &\approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h} + \frac{R^3}{h^2}. \end{aligned}$$

最后一项比 R^2/h 还要再小一个因子 R/h，所以我们把它舍去，得到

$$d \approx \frac{\pi}{2}R - \frac{R^2}{h},$$

这正是所要求的形式，其中 $a = \frac{\pi}{2}$ 及 $b = -1$。

在这个阶数下使用 $\sin\phi \approx \phi$ 是稳妥的：它的误差约为 $\frac{1}{6}\phi^3$，属于 R^3/h^3 的阶，所以只会在 R^4/h^3 这一阶才影响 d。

验算

- 极限情况合理。当 $h \to 0$ 时，$d \to 0$。当 $h \to \infty$ 时，$d \to \frac{\pi}{2}R$，即绕地球四分之一圈：一颗非常遥远的卫星几乎可以看见整个半球。$-R^2/h$ 这一项是负数，所以 d 从下方趋近 $\frac{\pi}{2}R$，这是必然的，因为 $\theta < \frac{\pi}{2}$。
- 数值上，取 $R = 1$ 及 $h = 10^{-4}$，d 的准确值除以 $\sqrt{2Rh}$ 得 0.99996。取 $h = 1$ 及 $R = 0.01$，d 的准确值与 $\frac{\pi}{2}R - R^2/h$ 相差 9.9×10^{-7}，约为 R^3/h^2，与预测相符。
- 若卫星位于半径为 6370 km 的地球上空 300 km 处，d 的准确值约为 1918 km，而 $\sqrt{2Rh}$ 给出 1955 km。

常见错误

- 在第 (iii) 部分使用 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$，但那里 θ 接近 $\frac{\pi}{2}$，并不是小角。
- 在第 (iii) 部分只把 $R/(R+h)$ 展开至一阶，结果失去了 R^2/h 这一项，得出错误的 b。

STEP 之外

这两部分都是渐近展开（asymptotic expansion）：把 d 的准确值按一个小参数（small parameter）h/R 或 R/h 的幂展开，保留至指定阶数的各项，同时估计误差的上界。利用大 O 记号和带余项的泰勒定理（Taylor's theorem with remainder）把“$\approx$”说得精确，

是大学一年级数学分析的课题；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）中有更多这类近似法的 STEP 练习。

详细解答

STEP I 1999，第 6 题

纯数学 · 二次函数的极值

STEP I 1999，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q6

关键思路

直线在闭区间（closed interval）上的极值必定出现在端点，而哪一端取最大值、哪一端取最小值，只取决于斜率（gradient）的正负。对于 $c > 0$ 的二次函数（quadratic），图像是一条 $\cup$ 形的抛物线（parabola）：最大值仍然在端点取得，但最小值则当顶点位于区间内时在顶点（vertex）取得，否则在较近的一端取得。因此，整道题归根究底就是要问：顶点 $x = -b/(2c)$ 相对于 $[-10, 10]$ 位于何处。

解答

第 (i) 部分

设 $f(x) = bx + a$，则 $f(10) = a + 10b$ 及 $f(-10) = a - 10b$。

- 若 $b > 0$，f 严格递增（strictly increasing），故最小值为 $f(-10) = a - 10b$（在 $x = -10$ 取得），最大值为 $f(10) = a + 10b$（在 $x = 10$ 取得）。
- 若 $b = 0$，则对所有 x 均有 $f(x) = a$，故最大值和最小值都是 a。
- 若 $b < 0$，f 严格递减（strictly decreasing），故最大值为 $f(-10) = a - 10b$（在 $x = -10$ 取得），最小值为 $f(10) = a + 10b$（在 $x = 10$ 取得）。

三种情况可以归纳为

$$\text{最大值} = a + 10|b|, \qquad \text{最小值} = a - 10|b|.$$

第 (ii) 部分

设 $g(x) = cx^2 + bx + a$，其中 $c \geq 0$。若 $c = 0$，这就是第 (i) 部分，答案如上所述为 $a \pm 10|b|$。以下取 $c > 0$，并配方（complete the square）：

$$g(x) = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4c}.$$

图像是一条 $\cup$ 形的抛物线，顶点在 $x_0 = -\dfrac{b}{2c}$，g 在该处取得所有实数 x 之中的最小值。此外，g 在 $x < x_0$ 时递减，在 $x > x_0$ 时递增。两个端点的值为

$$g(10) = a + 100c + 10b, \qquad g(-10) = a + 100c - 10b.$$

最大值。

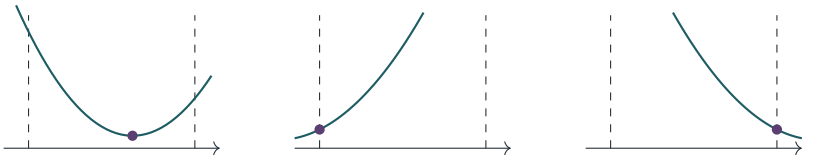
> **想一想** 为甚么无论顶点在哪里，g 在这个区间上的最大值都必定在其中一个端点取得?

由于 $c > 0$,$g(x)$ 只通过距离 $|x - x_0|$ 而取决于 x,并且随这个距离增大而增大。在 $[-10, 10]$ 上，距离 $|x - x_0|$ 在其中一个端点最大（即离 x_0 较远的那一端）。所以最大值是 $g(10)$ 与 $g(-10)$ 之中较大的一个，而两者之差为 $g(10) - g(-10) = 20b$。因此：

- 若 $b > 0$，最大值为 $a + 100c + 10b$，在 $x = 10$ 取得；
- 若 $b < 0$，最大值为 $a + 100c - 10b$，在 $x = -10$ 取得；
- 若 $b = 0$，最大值为 $a + 100c$，在两个端点同时取得。

在所有情况下，最大值 $= a + 100c + 10|b|$。这个结果在 $c = 0$ 时同样成立。

最小值。 这时 x_0 的位置就至关重要了。顶点位于区间内，当且仅当 $-10 \leq -\frac{b}{2c} \leq 10$，即（各项乘以 $2c > 0$）$-20c \leq b \leq 20c$，亦即 $|b| \leq 20c$。



虚线为 $x = \pm 10$，圆点标示函数在区间上的最小值。

- $|b| \leq 20c$（**顶点在区间内**）。最小值就是全局最小值（global minimum），

$$a - \frac{b^2}{4c}, \quad \text{于} x = -\frac{b}{2c}.$$

- $b > 20c$（**顶点在左方**，$x_0 < -10$）。在 $[-10, 10]$ 上有 $x > x_0$，故 g 在该处递增，最小值为 $g(-10) = a + 100c - 10b$，在 $x = -10$ 取得。
- $b < -20c$（**顶点在右方**，$x_0 > 10$）。这时 g 在整个区间上递减，故最小值为 $g(10) = a + 100c + 10b$，在 $x = 10$ 取得。

顶点在区间外的两种情况可以合并为：当 $|b| > 20c$ 时，最小值 $= a + 100c - 10|b|$。

> ? **想一想** 在边界 $|b| = 20c$ 上会怎样？两条公式在那里会否互相矛盾？

不会。若 $b = 20c$，则 $a - \frac{b^2}{4c} = a - 100c$，而 $a + 100c - 10b = a - 100c$ 亦然，因为这时顶点恰好在 $x = -10$。$b = -20c$ 的情况同理。所以当 b 越过 $\pm 20c$ 时，答案是连续地变化的，边界归入哪一种情况都没有分别。

总结。 对于 $-10 \le x \le 10$ 及 $c \ge 0$：

$$\text{最大值} = a + 100c + 10|b|, \qquad \text{最小值} = \begin{cases} a - \dfrac{b^2}{4c}, & c > 0 \text{ 及} |b| \le 20c, \\ a + 100c - 10|b|, & |b| > 20c, \\ a, & b = c = 0. \end{cases}$$

$c = 0$、$b \neq 0$ 的情况属于 $|b| > 20c = 0$，所得结果正是第 (i) 部分的答案。

验算

- 取 $g(x) = x^2 + 4x + 1$：这里 $|b| = 4 \le 20$，故最小值为 $1 - 4 = -3$，在 $x = -2$ 取得，而最大值为 $1 + 100 + 40 = 141$，在 $x = 10$ 取得。直接代入计算，结果相符。
- 取 $g(x) = x^2 + 30x$：这里 $b = 30 > 20$，故顶点 $x = -15$ 在区间之外，最小值为 $g(-10) = 100 - 300 = -200$。事实上 $g(-10) = -200$，而且 g 在 $[-10, 10]$ 上递增。
- 另外用电脑作了简短的检验：对 1000 组随机的 (a, b, c)（包括 $c = 0$ 和边界 $|b| = 20c$ 的情况），以精确的有理数运算，把公式与在 $[-10, 10]$ 内 401 个点上逐点搜索的结果比较。所有情况均相符。

常见错误

- 没有检查顶点是否位于 $[-10, 10]$ 内，就直接把 $a - \frac{b^2}{4c}$ 当作最小值。
- 遗漏了 $c = 0$（没有顶点，而且不能除以 c）和 $b = c = 0$ 这两种情况。

► 顶点在区间外时，弄错哪一端取最小值：应该是较接近顶点的那一端。

STEP 之外

这道题背后的事实是极值定理（Extreme Value Theorem）：在有界闭区间上的连续函数（continuous function）必定取得最大值和最小值，而这些值不是在端点取得，就是在区间内的驻点（stationary point）取得。像 $cx^2 + bx + a$（其中 $c \geq 0$）这样的凸函数（convex function）在端点取得最大值，这个观察是凸优化（convex optimisation）的第一步，而凸优化正是现代应用数学许多范畴的基础。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对极值定理有严谨的证明。

详细解答

STEP I 1999，第 7 题

纯数学 · 二阶微分方程

STEP I 1999，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q7

关键思路

函数 $\sin(k\sin^{-1}x)$ 看来很难求两次导数，但只要设 $x=\sin\theta$，使 $y=\sin k\theta$，它就变得易于处理。先把一阶导数（first derivative）乘以 $\sqrt{1-x^2}$ 再求导，可令代数运算保持简短。至于最后一部分，重点在于：一个二阶微分方程（second-order differential equation）若在某一点给定了函数值和斜率，就只有一个解，所以我们求得的多项式必定是 $\sin(3\sin^{-1}x)$。

解答

微分方程

设 $y=\sin(k\sin^{-1}x)$，其中 $-1<x<1$。根据链式法则（chain rule），并利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \text{所以}\qquad \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=k\cos(k\sin^{-1}x).$$

把第二个式子对 x 求导（左边用积法则（product rule），右边用链式法则）：

$$\sqrt{1-x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{k^2\sin(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{k^2y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

全式乘以 $\sqrt{1-x^2}$（当 $-1<x<1$ 时它不等于零），得

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+k^2y=0,$$

这正是所要证明的 $(*)$。

$k = 3$ 时的三次多项式解

设 $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$。由条件“当 $x = 0$ 时 $y = 0$”得 $D = 0$，而由“当 $x = 0$ 时 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3$”得 $C = 3$。现在

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \qquad y'' = 6Ax + 2B,$$

代入 $(*)$，其中 $k^2 = 9$：

$$(1 - x^2)(6Ax + 2B) - x(3Ax^2 + 2Bx + C) + 9(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 0.$$

此式须对所有 x 成立，所以我们比较系数（compare coefficients）：

$$\begin{aligned}
x^3: &\quad -6A - 3A + 9A = 0 \ \text{（对任何 } A \text{ 都成立）}, \\
x^2: &\quad -2B - 2B + 9B = 5B = 0, \\
x^1: &\quad 6A - C + 9C = 6A + 8C = 0, \\
x^0: &\quad 2B + 9D = 0.
\end{aligned}$$

因此 $B = 0$（与 $D = 0$ 一致），而 $6A = -8C = -24$，得 $A = -4$。所求的解是

$$y = 3x - 4x^3.$$

$\sin 3\theta$ 的表达式

> **想一想** 同一个方程，我们有两个解：$\sin(3\sin^{-1} x)$ 和 $3x - 4x^3$。为甚么它们必定是同一个函数?

两者都满足 $k = 3$ 时的 $(*)$，而且在 $x = 0$ 处满足相同的条件。对于多项式，这是我们在构造时已经定下的。对于 $y = \sin(3\sin^{-1} x)$，我们有 $y(0) = \sin 0 = 0$，并且由上面的一阶导数得 $y'(0) = 3\cos 0/1 = 3$。

在 $-1 < x < 1$ 上，我们可以把 $(*)$ 除以 $1 - x^2 \neq 0$。这样得到 $y'' = \dfrac{xy' - 9y}{1 - x^2}$，是一个系数连续（continuous）的二阶线性方程，而这类方程在 $x = 0$ 处给定 y 和 y' 的值后，恰好只有一个解。（可以想像由 $x = 0$ 出发逐步向外走：方程会根据 y 和 y' 告诉你 y''，所以初始值决定了一切。）因此

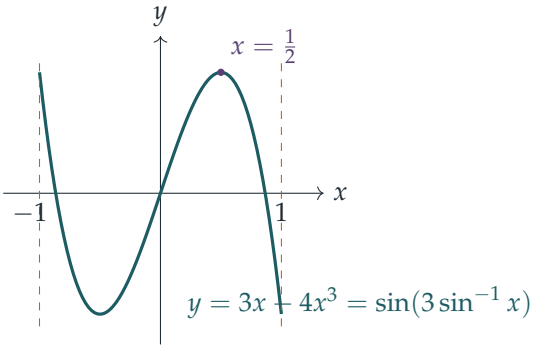
$$\sin(3\sin^{-1} x) = 3x - 4x^3 \qquad \text{对于} -1 < x < 1,$$

而根据连续性，在 $x = \pm 1$ 处同样成立。

现在设 $x = \sin\theta$，其中 $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$，于是 $\sin^{-1} x = \theta$：

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.}$$

这个恒等式（identity）对所有 θ 都成立，而不仅限于 $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$。两边的周期（period）都是 2π。若 $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$，设 $\varphi = \pi - \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。那么 $\sin\varphi = \sin\theta$，且 $\sin 3\varphi = \sin(3\pi - 3\theta) = \sin 3\theta$，所以由 φ 的恒等式即可得出 θ 的恒等式。



这个图像就是大家熟悉的曲线 $\sin 3\theta$ 通过 $x = \sin\theta$ 所见的样子：当 θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，3θ 走过一个半振荡，因此在 $x = \pm\frac{1}{2}$ 处（即 $3\theta = \pm\frac{\pi}{2}$）有两个转向点（turning point）。

验算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$，而 $3 - 4 = -1$。　$\theta = \frac{\pi}{6}$：$\sin\frac{\pi}{2} = 1$，而 $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$。
- 数值上，当 $\theta = 0.7$：$\sin 2.1 = 0.86321$，而 $3(0.64422) - 4(0.64422)^3 = 0.86321$。
- 同一个恒等式也可以由 $\sin(2\theta + \theta)$ 和二倍角公式（double-angle formulae）推出，这是一个很好的独立验算。

常见错误

- 直接用商法则（quotient rule）对 $\dfrac{k\cos(k\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$ 求导：做法正确，但十分繁复。先消去平方根会简洁得多。
- 忘记说明为甚么那个三次多项式等于 $\sin(3\sin^{-1}x)$。单是满足同一个方程并不足够：两个解还必须有相同的 $y(0)$ 和 $y'(0)$。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是切比雪夫（Chebyshev）方程。当 $k = n$ 是整数时，它有一个多项式解，而 $\cos(n\cos^{-1}x)$ 就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial）$T_n(x)$，在数值逼近（numerical approximation）中占有核心地位。我们用到的唯一性定理（uniqueness theorem,

即 Picard–Lindelöf 定理）会在大学一年级的微分方程课程中证明。处理这类方程的幂级数（power series）方法，可参阅 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（一本微分方程入门教科书）。

详细解答

STEP I 1999，第 8 题

纯数学 · 调和级数的界限

STEP I 1999，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q8

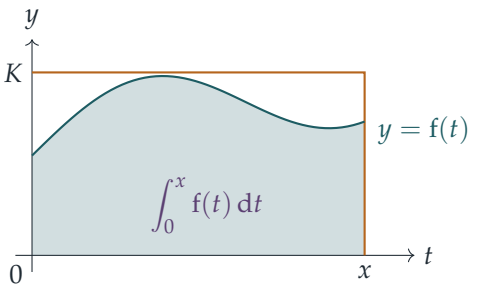
关键思路

积分就是面积，所以把曲线困在一个长方形之内，它的面积便被夹在 0 与长方形的面积之间。题目建议的被积函数（integrand）可用部分分式（partial fractions）拆开，其积分恰好等于 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$，而被积函数的上下界便给出所求的不等式。之后一切都会裂项相消（telescope）：对 n 求和，一连串的对数化为 $\ln N$，一连串的倒数之差则几乎全部消去。

解答

估计积分的上下界

绘出 $y = \mathrm{f}(t)$ 在 $0 \le t \le x$ 的图像。由于 $0 \le \mathrm{f}(t) \le K$，整条曲线位于以 $(0,0)$ 和 (x,K) 为顶点的长方形之内，并且在 t 轴上或其上方。



积分就是曲线下方阴影部分的面积。这面积不可能是负数，因为曲线从不跌到轴的下方；它也不可能超过长方形的面积 Kx，因为该区域完全位于长方形之内。所以

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t \le Kx.$$

关于 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ 的不等式

取 $n>1$。当 $0\le t\le 1$ 时，$n-t\ge n-1>0$，所以被积函数有定义。把它拆成部分分式，

$$\frac{t}{n(n-t)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-(n-t)}{n-t}=\frac{1}{n-t}-\frac{1}{n},$$

所以

$$\int_0^1\frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t=\Big[-\ln(n-t)-\frac{t}{n}\Big]_0^1=\ln n-\ln(n-1)-\frac{1}{n}=\ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big)-\frac{1}{n}.$$

现在估计被积函数在 $[0,1]$ 上的上下界。分子 t 非负，分母 $n(n-t)$ 为正，所以被积函数至少为 0。当 t 由 0 增加至 1 时，分子增大而正的分母减小，所以被积函数是递增的，其最大值在 $t=1$ 处取得：

$$0\le\frac{t}{n(n-t)}\le\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}.$$

在第一个结果中取 $x=1$ 及 $K=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，得

$$0\le\ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big)-\frac{1}{n}\le\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

这正是所求。

由 $n=2$ 求和至 N

把 $n=2,3,\ldots,N$（其中 $N\ge 2$）的不等式相加。对数部分会裂项相消，因为

$$\sum_{n=2}^{N}\ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big)=\ln\Big(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{N}{N-1}\Big)=\ln N,$$

右边各项亦然：

$$\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\Big)=\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\Big)=1-\frac{1}{N}.$$

因此

$$0\le\ln N-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}\le 1-\frac{1}{N}\le 1.$$

（当 $N=1$ 时，和式为空，而 $\ln 1=0$，所以命题此时同样成立。）

> **想一想** 这个双重不等式的哪一半告诉我们调和级数（harmonic series）发散（diverge），哪一半给出上界？

左半说明该和至多为 $\ln N$；右半说明它至少为 $\ln N-1$。要证明发散，我们需要下界，所以用右半。

发散

由 $\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le 1$ 可得 $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \ge \ln N - 1$，再加上 $n = 1$ 的一项，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \ge \ln N.$$

由于当 $N \to \infty$ 时 $\ln N \to \infty$，该和亦趋向无穷大。

$N < 10^{30}$ 时的上界

现在用左半：$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \le \ln N$，所以

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \le 1 + \ln N.$$

由于 $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$，两边取十次方得 $10^{30} < 2^{100}$。所以若 $N < 10^{30}$，则 $N < 2^{100}$，而 ln 是递增函数，故

$$\ln N < 100 \ln 2 < 100,$$

这里用到 $\ln 2 < 1$，它成立是因为 $2 < \mathrm{e}$。因此

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \le 1 + \ln N < 101.$$

验算

- 对多个 $n > 1$ 的值，以辛普森法则（Simpson's rule）计算 $\int_0^1 \frac{t}{n(n-t)}\,\mathrm{d}t$，结果都与 $\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$ 吻合。例如当 $n = 2$ 时，两者都给出 $\ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0.193$，它介乎 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间。
- 对每个不超过 2×10^5 的 N，$\ln N - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n}$ 都落在 $[0, 1]$ 内。当 $N = 2 \times 10^5$ 时，它约为 0.4228，接近 $1 - \gamma \approx 0.4228$，其中 γ 是欧拉常数（Euler's constant）。
- 这个上界相当宽松：$1 + 30 \ln 10 \approx 70.1$，而事实上 $\sum_{n=1}^{10^{30}} \frac{1}{n} \approx 69.65$。调和级数确实发散，但发散得极其缓慢。

常见错误

- 用错双重不等式的一半：证明发散需要该和的下界，而最后一部分需要上界。
- 遗漏 $n = 1$ 的一项：不等式所涉及的是 $\sum_{n=2}^{N}$，而结论所涉及的是 $\sum_{n=1}^{N}$。
- 没有说明为何被积函数的最大值在 $t = 1$ 处取得。只需指出它是递增的（或直接指出 $t \le 1$ 及 $n - t \ge n - 1$）便已足够。

STEP 之外

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N$ 这个量是递减的，并且有下界，所以它收敛（converge）。它的极限是欧拉常数 $\gamma \approx 0.5772$，而至今仍无人知道 γ 是否有理数。像我们在这里所做的那样，把和式与积分作比较，就是**积分判别法**（integral test），它是大学一年级分析课程中处理级数的首批工具之一。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是了解其严格论证的好去处。

详细解答

STEP I 1999，第 9 题

力学 • 匀速率运动学

STEP I 1999，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

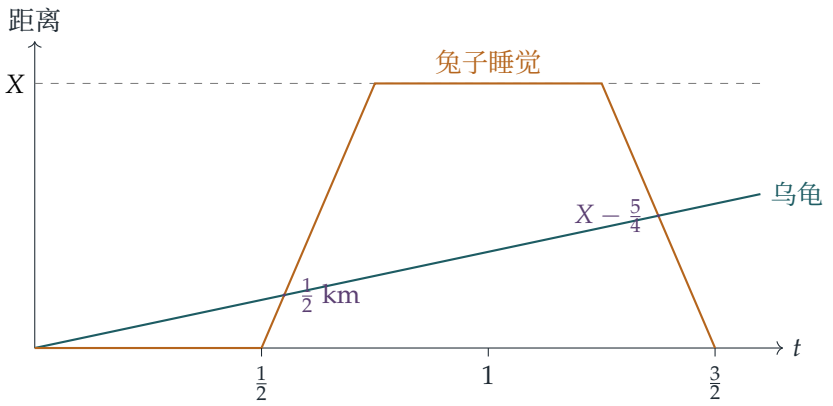
step.maths.org/questions/99-s1-q9

关键思路

所有运动都以恒定速率进行，所以每段路程所需的时间就是距离除以速率。两只动物每次相遇时，都是在同一时刻身处同一位置，因此我们分别写出牠们各自在该刻的时钟时间，再令两者相等。两次相遇给出两条关于 v 和 V 的方程。改用 $1/v$ 和 $1/V$（每公里所需的小时数）来运算，方程便保持线性（linear）。

解答

我们把两只动物都看成沿同一条直线路径以恒定速率（constant speed）运动，并忽略转身所需的时间。时间 t 以小时为单位，由起步一刻开始计算。下面的距离—时间图（distance–time graph）（按最后求得的 X 值绘画）显示了我们用到的两个交点。



第一次相遇

乌龟在时间 $\dfrac{1/2}{v}$ 到达距离起点 $\frac{1}{2}$ km 的位置。兔子在 $t=\frac{1}{2}$ 起步，并在时间 $\frac{1}{2}+\dfrac{1/2}{V}$ 到达同一位置。牠们同时身处该处，所以

$$\frac{1}{2v}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2V},\qquad \text{即}\qquad \frac{1}{v}=1+\frac{1}{V}. \tag{1}$$

第二次相遇

兔子在时间 $\frac{1}{2}+\dfrac{X}{V}$ 到达菜园，睡了半小时，然后在 $1+\dfrac{X}{V}$ 离开。接着牠往回跑了 $\frac{5}{4}$ km，所以牠与乌龟相遇的时间是

$$1+\frac{X}{V}+\frac{5}{4V}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}.$$

乌龟此时仍在去程途中，距离起点 $X-\frac{5}{4}$ km，所以牠已经走了 $\dfrac{X-\frac{5}{4}}{v}$ 小时。令两个时间相等：

$$\frac{X-\frac{5}{4}}{v}=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}. \tag{2}$$

想一想 我们有两条方程和两个未知数，但 (2) 式中 $1/v$ 与 X 相乘。怎样才可以单独求出 V?

我们把 (1) 代入 (2)。这样 X/V 的项便会互相抵消，V 的结果因而如此简洁：

$$\begin{aligned}\left(X-\tfrac{5}{4}\right)\left(1+\frac{1}{V}\right)&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{5}{4}+\frac{X-\frac{5}{4}}{V}&=1+\frac{X+\frac{5}{4}}{V}\\ X-\tfrac{9}{4}&=\frac{5/2}{V}.\end{aligned}$$

因此

$$V=\frac{5/2}{X-\frac{9}{4}}=\frac{10}{4X-9},$$

正如所求。（要使这个速率为正数，我们需要 $X>\frac{9}{4}$，在最后一部分要记住这一点。）

然后由 (1) 得

$$\frac{1}{v}=1+\frac{4X-9}{10}=\frac{4X+1}{10},\qquad \text{所以}\qquad v=\frac{10}{4X+1}.$$

求 X

兔子在 $1+\dfrac{X}{V}$ 离开菜园，再用 $\dfrac{X}{V}$ 小时回到家，所以牠在 $1+\dfrac{2X}{V}$ 完成全程。令这个时间等于 $\frac{3}{2}$，得 $\dfrac{2X}{V}=\frac{1}{2}$，所以 $V=4X$。于是

$$\begin{aligned} 4X &= \frac{10}{4X-9} \\ 16X^2-36X-10 &= 0 \\ 8X^2-18X-5 &= 0 \\ (2X-5)(4X+1) &= 0. \end{aligned}$$

根 $X=-\frac{1}{4}$ 不可能是距离（况且我们需要 $X>\frac{9}{4}$），所以

$$X=\tfrac{5}{2}\ \text{km}.$$

取这个值时，兔子的速率是 $V=10\,\text{km/h}$，乌龟的速率是 $v=\frac{10}{11}\,\text{km/h}$。

验算

把 $X=\frac{5}{2}$、$V=10$、$v=\frac{10}{11}$ 代回故事之中。乌龟在 $t=0.55$ 到达 $\frac{1}{2}\,\text{km}$ 处，而兔子在 $t=0.5$ 起步，需要 0.05 h 才到达该处：牠们相遇。兔子在 $t=0.75$ 到达菜园，并在 $t=1.25$ 离开。牠在 $t=1.375$ 到达距离菜园 1.25 km 的位置（亦即距离起点 1.25 km），而乌龟到达 1.25 km 处的时间是 $1.25\times 1.1=1.375$：牠们再次相遇。兔子回到家的时间是 $1.25+0.25=1.5$。把任意选取的 $X>\frac{9}{4}$ 的值代入 V 和 v 的公式，再重演整场比赛，同样会得到相遇位置完全正确的结果。

常见错误

- 写兔子的时钟时间时，漏掉了牠其中一次半小时的睡眠，尤其是在菜园的那一次。
- 把第二个相遇点当成距离起点 $\frac{5}{4}\,\text{km}$，而不是距离菜园。
- 把二次方程（quadratic equation）的两个根都保留：负的距离必须舍去，并要说明理由。

STEP 之外

像上面那样的距离—时间图，把一道文字题转化为直线在何处相交的问题，这正是任何力学课程中运动学（kinematics）的起点。这里改用速率的倒数（配速，pace）来运算，

使方程变成线性；选取能把问题线性化（linearise）的变量，是应用数学中反复出现的技巧。若想看看由这些想法发展出来的大学一年级程度运动理论，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

详细解答

STEP I 1999，第 10 题

力学 • 简谐运动

STEP I 1999，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q10

关键思路

质点把弹簧分成两条弹簧 AP 和 PB，两者的弹性模量（modulus of elasticity）都与整条弹簧相同，同为 λ（模量是物料本身的性质），但自然长度（natural length）分别是 a 和 b。只用一个坐标，即质点与上端的距离，对每一段写出虎克定律（Hooke's law），便会发现运动方程（equation of motion）对这个坐标而言是线性的。这个坐标的系数决定了周期（period），我们只需看看它取决于甚么、不取决于甚么。

解答

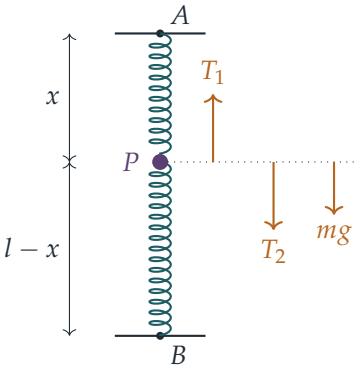
模型

设质点的质量为 m。弹簧是轻的，所以每一段上各处的张力（tension）都相同，而且它在伸长和压缩时都服从虎克定律（它是弹簧而不是弹性绳，所以既能拉也能推）。先假设 A 是上端。设在时间 t 时质点位于 A 下方距离 x 处，于是 $AP = x$，$PB = l - x$。

由于 AP 的自然长度是 a，PB 的自然长度是 b，由虎克定律得

$$T_1 = \frac{\lambda(x-a)}{a}, \qquad T_2 = \frac{\lambda(l-x-b)}{b},$$

其中 T_1 是 AP 的张力，T_2 是 PB 的张力。张力为正时，该段把质点拉向它的固定端；数值为负则表示该段受压缩，把质点推开。无论哪种情况，这些公式都给出正确的带符号的力，所以我们根本不必事先知道哪一段被拉长。



简谐运动

对质点沿向下方向分解力，作用于它的力有重量 mg、向上的张力 T_1 和向下的张力 T_2：

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{\lambda(x-a)}{a} + \frac{\lambda(l-x-b)}{b} \\ &= mg + \lambda - \frac{\lambda x}{a} + \frac{\lambda l}{b} - \frac{\lambda x}{b} - \lambda \\ &= mg + \frac{\lambda l}{b} - \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)x. \end{aligned}$$

常数 $\pm\lambda$ 互相抵消，右边是 x 的线性函数，斜率为负。记

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\lambda(a+b)}{mab}, \qquad x_0 = \frac{mg + \lambda l/b}{\lambda(a+b)/(ab)} = \frac{a(mgb+\lambda l)}{\lambda(a+b)}.$$

于是运动方程变成

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_0),$$

所以，设 $X = x - x_0$（即相对于平衡位置（equilibrium position）x_0 的位移），便有 $\ddot{X} = -\omega^2 X$。这正是以 $x = x_0$ 为中心的简谐运动（simple harmonic motion）的方程，周期为

$$\boxed{\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mab}{\lambda(a+b)}}}$$

这就证明了第一个结果。

? **想一想** 一旦其中一段受到压缩，运动不就不再是简谐运动了吗?

如果是弹性绳，确实如此，因为它的张力公式只在绳被拉长时才成立。弹簧在受压缩时仍服从同一条虎克定律公式，所以上面那一条方程在整个运动过程中都成立（只要弹簧圈没有压至互相紧贴），因此无须限制 l 或振幅（amplitude）。

与 l 及摆放方向无关

长度 l 只在 x_0 中出现：改变 l 会移动振动的中心，但 ω 不变，因而周期也不变。

如果改为 B 在最上方，同样的推导仍然适用，只是两段的角色互换：上面一段的自然长度现在是 b，下面一段是 a。这只不过是把 a 和 b 全部对调。周期只通过 ab 和 $a+b$ 取决于 a 和 b，而这两个式子都是对称的，所以周期不变。（平衡位置则确实会改变，因为重力现在拉长的是自然长度为 b 的那一段，而不是自然长度为 a 的那一段。）

所以，无论 l 取甚么值，也无论哪一端在最上方，周期都是 $2\pi\sqrt{mab/(\lambda(a+b))}$，这正是所要证明的。

验算

- 质量两侧的两条弹簧相当于*并联*（in parallel）：劲度（stiffness）λ/a 和 λ/b 相加得 $\lambda(a+b)/(ab)$，与上面的 ω^2 一致。
- 极限情况 $b\to\infty$：下面一段变得非常弱，我们便回到一个质量挂在一条自然长度为 a 的弹簧上的情形，周期为 $2\pi\sqrt{ma/\lambda}$。
- 单位：λ 是力，所以 ma/λ 的单位是 $\mathrm{kg\,m/N}=\mathrm{s}^2$。
- 数值上，取 $m=1$、$\lambda=50$、$a=1$、$b=2$，公式给出周期 0.72552。对 $l=2$、3 和 4.5（包括两段都受压缩的一种情况），并分别以两端为最上方，用数值方法逐步求解完整的运动方程，所得周期在五位有效数字内相同；另外随机选取多组常数，结果的相差也都在 10^{-5} 以内。

常见错误

- 对各段使用 $\lambda a/(a+b)$ 或类似的模量。每一段的模量仍然是 λ；改变的是劲度 $\lambda/$(自然长度)。
- 弄错下方张力的符号。被拉长的 PB 把质点向下拉，即拉向 B。
- 忘记论证摆放方向的部分：你需要说明两端对调就是把 a 和 b 对调，而周期对于它们是对称的。

STEP 之外

把一个系统拆成若干条弹簧再把劲度相加，是迈向耦合振子（coupled oscillators）的第一步：若弹簧上有多个质量，运动方程便组成一个线性方程组，而可能出现的频率就是某个矩阵的特征值（eigenvalues），即所谓“简正模式”（normal modes）。当质量数目极多

而每个都极小时，取极限便得到弹簧或杆中纵波的波动方程（wave equation）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）讨论了振动和简正模式。

详细解答

STEP I 1999，第 11 题

力学 • 引力作用下的圆周运动

STEP I 1999，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s1-q11

本题在 *Beyond STEP* 第 10.8 节排成三角形的三颗恒星中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/three-stars.html

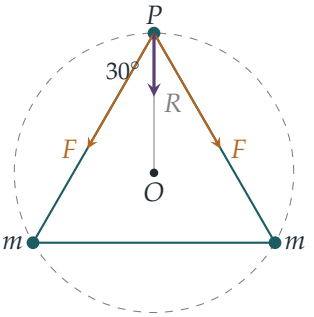
关键思路

先猜出运动的形式，再加以检验。如果三角形绕着中心作刚性转动（rigid rotation），每颗星都沿圆周运动，因此它所受的净力（net force）必须恰好是 $m\omega^2 R$，并且指向中心。根据对称性，其余各星对每颗星的引力（gravitational pull）正好指向中心。所以我们只需令这个引力的大小等于 $m\omega^2 R$，便可读出 ω。在中心放置一颗星，只是多加一个大小已知、指向中心的引力。

解答

我们把各星看成质点（particles），它们只在彼此的引力作用下运动。设 O 为质心（centre of mass）。对三个相等的质量而言，质心就是三角形的形心（centroid），它与每个顶点的距离是

$$R = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



三颗星

考虑位于顶部顶点的星 P。其余两颗星各以大小为

$$F = \frac{\gamma m^2}{a^2},$$

的力吸引它，方向沿着三角形的一条边。经过 P 的每条边都与 PO 成 30° 角，因为 PO 平分位于 P 的 60° 角。沿 PO 方向及垂直于 PO 方向分解：

- 在垂直于 PO 的方向，两个分量大小相等、方向相反，因此互相抵消；
- 在沿 PO 的方向，合力（resultant）为 $2F\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\dfrac{\gamma m^2}{a^2}$，指向 O。

根据对称性，其余两颗星的情况相同。

现在假设三角形以角速度（angular velocity）ω 绕 O 作刚性转动。于是每颗星都沿半径为 R 的圆周以恒定速率 $R\omega$ 运动，因此它需要一个指向 O 的加速度 $R\omega^2$。在指向 O 的方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

想一想 为甚么这样就证明了这种运动是可能的，而不仅仅是各力在某一瞬间恰好平衡？

让各星从顶点出发，速度大小为 $R\omega$，方向垂直于 OP，并且全部朝同一方向转动。只要整个排列仍然是边长为 a、中心在 O 的等边三角形，每颗星所受的力，其大小和方向都恰好符合以角速度 ω 作圆周运动的要求。所以这个刚性转动的三角形，在每一刻都满足每颗星的运动方程（equation of motion）。因此它是这个系统的一个真正的运动：它就是由这些初始条件（initial conditions）所决定的解。总动量（momentum）为零，所以 O 保持不动，正如所料。因此每颗星都可以以角速度 $(3\gamma m/a^3)^{1/2}$ 绕质心公转。

在中心加上第四颗星

在 O 放置一颗质量为 λm 的星。质心仍然是 O。外围三颗星对中心星的引力大小相等，彼此成 120° 角，所以合力为零。因此，只要外围三颗星保持对称的排列，中心星便会在 O 保持静止。

现在每颗外围星都多受一个指向 O 的引力，大小为

$$\frac{\gamma(\lambda m)m}{R^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2},$$

这是因为 $R^2 = a^2/3$。这个额外的力沿 PO 作用，所以它只是加在向内的合力之上。指向 O 方向的运动方程变成

$$m\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,\omega^2 = \sqrt{3}\,\frac{\gamma m^2}{a^2} + 3\lambda\,\frac{\gamma m^2}{a^2}$$

$$\omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3} + \frac{3\sqrt{3}\,\lambda\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}\left(1+\sqrt{3}\,\lambda\right).$$

用与先前相同的论证，可知这个刚性转动是一个真正的运动。所以，当第四颗星静止于中心时，外围三颗星可以绕着它公转，角速度为

$$\omega = \left(\frac{3\gamma m\,(1+\sqrt{3}\,\lambda)}{a^3}\right)^{1/2}.$$

验算

- 代入 $\lambda = 0$ 便得回第一个答案，这是必然的。
- 量纲（dimensions）：$\gamma m/r^2$ 是加速度，所以 $\gamma m/a^3$ 的单位是 时间$^{-2}$，正好与 ω^2 相符。
- 如果 λ 非常大，外围各星几乎感受不到彼此的引力。这时它们只绕着中心的质量运行，有 $\omega^2 \approx \gamma\lambda m/R^3 = 3\sqrt{3}\,\gamma\lambda m/a^3$，与主导项吻合。
- 我们以数值方法对完整的运动方程进行积分（取 $\gamma = m = a = 1$）。从预测的圆周运动速度出发，各星在公转三周后回到起始位置，相对误差小于 10^{-7}，对 $\lambda = 0$、1 和 2.5 皆然。例如，$\lambda = 1$ 给出 $\omega^2 = 3(1+\sqrt{3}) \approx 8.196$。

常见错误

- 以 a 而不是 $R = a/\sqrt{3}$ 作为圆的半径，或作为与中心星的距离。
- 把两个大小为 F 的引力直接相加成 $2F$，忘记了它们与 PO 成 30° 角。
- 忘记说明中心星为何保持不动：作用于它的三个引力互相抵消。

STEP 之外

这是拉格朗日（Lagrange）三体问题（three-body problem）等边三角形解的一个特殊情况；该解对位于旋转等边三角形顶点的任意三个质量都成立。同样的想法可以得出拉格朗日点（Lagrange points）L_4 和 L_5，特洛伊小行星（Trojan asteroids）就在那里与木星共用同一轨道。这类排列是否稳定（stable），是一个更深入的问题，要把运动方程在旋转解附近线性化（linearising）才能解答。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）在这个程度上对有心力（central forces）和轨道有严谨的论述。

详细解答

STEP I 1999，第 12 题

概率与统计 · 灌铅骰子的不等式

> **STEP I 1999，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 9.13 节做了手脚的骰子中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/loaded-dice.html

关键思路

第一行的不等式（inequality）是整道题的原动力。假如每个总和出现的机会均等，那么 2 和 12 这两个“角落”总和各自会迫使某个概率乘积等于 $\frac{1}{11}$，而总和 7 就会包含两个交叉项，其和的形式为 $c\,(x + x^{-1})$。该不等式令这个和变得太大。第 (ii) 部分是同一个想法换了另一副面貌：当所有项都相等时，平方和最小。

解答

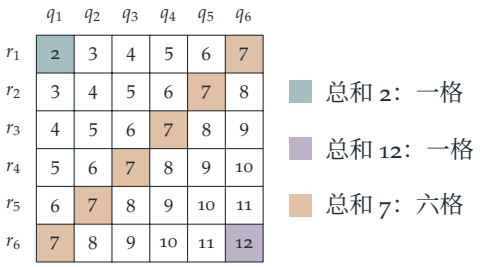
第 (i) 部分

不等式。当 $x > 0$ 时可以取平方根，而

$$x + x^{-1} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $x + x^{-1} \geq 2$，而且只有当 $\sqrt{x} = 1/\sqrt{x}$，即 $x = 1$ 时等号才成立。（等价的做法是：把 $(x-1)^2 \geq 0$ 乘以正数 x^{-1}。）

骰子。设 p_s 为总和等于 s 的概率（probability），其中 $2 \leq s \leq 12$。由于两颗骰子互相独立（independent），出现数对（第一颗掷得 i，第二颗掷得 j）的概率是 $q_i r_j$。下面的方格表显示哪些数对给出我们所需的总和。



总和 2 只能来自 $(1,1)$，总和 12 只能来自 $(6,6)$，所以

$$p_2 = q_1 r_1, \qquad p_{12} = q_6 r_6.$$

总和 7 来自六个数对，当中包括 $(1,6)$ 和 $(6,1)$。这六项全部非负，所以

$$p_7 = q_1 r_6 + q_2 r_5 + \cdots + q_6 r_1 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1.$$

现在用反证法（proof by contradiction），假设全部十一个总和出现的机会均等。它们已穷尽所有可能，所以每个总和的概率都是 $\frac{1}{11}$。于是 $q_1 r_1 = \frac{1}{11}$ 及 $q_6 r_6 = \frac{1}{11}$。特别地，q_1, r_1, q_6, r_6 均不为零，所以可以写成 $r_1 = \dfrac{1}{11 q_1}$ 及 $r_6 = \dfrac{1}{11 q_6}$。代入后，

$$\begin{aligned} p_7 \;\geq\; q_1 r_6 + q_6 r_1 &= \frac{q_1}{11 q_6} + \frac{q_6}{11 q_1} = \frac{1}{11}\left(x + x^{-1}\right), \qquad \text{其中} x = \frac{q_1}{q_6} > 0, \\ &\geq \frac{2}{11} \end{aligned}$$

这是根据刚才证明的不等式。但 $p_7 = \frac{1}{11} < \frac{2}{11}$，矛盾。因此，无论两颗骰子怎样灌铅，总和 $2, 3, \ldots, 12$ 都不可能全部机会均等。

> **想一想** 为甚么必须指出 q_1 和 q_6 不为零?

我们曾除以 q_1 和 q_6，而不等式 $x + x^{-1} \geq 2$ 需要 $x > 0$。这两点都有保证，因为乘积 $q_1 r_1$ 和 $q_6 r_6$ 各自等于 $\frac{1}{11} \neq 0$。少了这一步，论证就会有漏洞：一般而言，一颗永远掷不出 1 的骰子是完全容许的。

第 (ii) 部分

设 S 为第一颗骰子两次掷得相同点数的事件（event）。两次投掷互相独立，所以两次都掷得 j 的概率是 q_j^2，而这六个事件互不相交（disjoint）。因此

$$\mathrm{P}(S) = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_6^2.$$

已知 $q_j \geq 0$ 及 $\sum q_j = 1$，我们要求这个值最小可以是多少。把一个量度骰子偏离公平程度的平方和展开：

$$0 \leq \sum_{j=1}^{6} \left(q_j - \tfrac{1}{6}\right)^2 = \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} q_j + 6 \cdot \tfrac{1}{36}$$
$$= \sum_{j=1}^{6} q_j^2 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \mathrm{P}(S) - \tfrac{1}{6}.$$

所以 $\mathrm{P}(S) \geq \frac{1}{6}$，而且等号恰好在每个 $q_j = \frac{1}{6}$，即骰子公平时成立。

想一想 1/36 从何而来？为甚么说它是个烟幕？

$\frac{1}{36}$ 是用公平骰子掷出某一个特定数对（例如一对六）的概率。“两个点数相同”涵盖六个这样的数对，所以对公平骰子来说，其概率是 $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$，而把骰子灌铅只会令它增加。

所以答案是**不可能**：无论 q_j 取甚么值，两个点数相同的概率至少是 $\frac{1}{6}$，远大于 $\frac{1}{36}$。

验算

- 公平骰子：$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36}$，但 $p_7 = \frac{6}{36}$，明显不相等，与结果所预测的一致。
- 以数值方法搜索 20,000 对随机灌铅的骰子，从未出现全部十一个总和的概率与 $\frac{1}{11}$ 相差都在 0.05 以内的情况；用分数作精确检查，亦证实每次都有 $p_7 \geq q_1 r_6 + q_6 r_1$。
- 对于 $(q_1, \ldots, q_6) = (0.1, 0.2, 0.3, 0.15, 0.15, 0.1)$ 的骰子，我们得到 $\mathrm{P}(S) = 0.195 \geq \frac{1}{6}$；模拟 200,000 次双掷的结果是 0.194。

常见错误

- 假设两颗骰子完全相同（$q_i = r_i$）。题目容许两颗骰子的灌铅方式不同，而上面的论证并不需要两者一致。
- 写成 $p_7 = q_1 r_6 + q_6 r_1$。其实还有另外四项；我们只需要一个不等式，所以可以把它们舍去，但要说明原因（$q_i r_j \geq 0$）。
- 在第 (ii) 部分，以 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{36}$ 作答，或者忘记“相同”是指六个结果中的任何一个。

STEP 之外

第 (ii) 部分所说的就是 $\sum q_j^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum q_j\right)^2$，这是柯西－施瓦兹不等式（Cauchy–Schwarz inequality）的特殊情况；$\sum q_j^2$ 这个量称为*碰撞概率*（collision probability），在信息论

（information theory）和杂凑（hashing）的分析中都会出现。第 (i) 部分是关于生成函数（generating function）的经典结果：两颗骰子总和的概率生成函数（probability generating function）是 $Q(t)R(t)$，而有一个巧妙的另证指出，若总和均匀分布，$1+t+\cdots+t^{10}$ 就必须等于一个常数乘以两个 5 次实系数多项式的积，而这两个多项式各有一个实根，然而 $1+t+\cdots+t^{10}=(t^{11}-1)/(t-1)$ 却没有实根。这类生成函数的理论可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）。

详细解答

STEP I 1999，第 13 题

概率与统计 · 指示变量

> **STEP I 1999，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q13

关键思路

不要直接数单元的数目，改为数间隙：单元的数目等于相邻磁铁彼此分开的位置数目再加一。某处会否出现间隙，只取决于相邻两块磁铁的指向是否相同，而这 $N-1$ 个事件原来是互相独立（independent）的公平掷币。因此间隙的数目服从二项分布（binomial distribution），期望值（expectation）和方差（variance）便可立即得出。

解答

建立模型

我们把“随机摆放”理解为：每块磁铁指向任何一方的可能性均等，且各磁铁互相独立。若一块磁铁的北极在右边（SN），称它为 A 型；若北极在左边（NS），称它为 B 型。设 $X_1, \ldots, X_N$ 为由左至右各磁铁的类型。

考虑相邻的两块磁铁。互相面对的两端，是第一块磁铁的右端和第二块磁铁的左端。

- 类型相同（先 A 后 A）：相对的两端是 N 和 S，属异极，所以它们会**相连**。（先 B 后 B 的情况相同，只是换成 S 和 N。）
- 类型不同（先 A 后 B）：相对的两端是 N 和 N，所以它们会**分开**。（先 B 后 A 则是 S 和 S。）



因此，第 i 块与第 $i+1$ 块磁铁之间出现间隙，当且仅当 $X_i \neq X_{i+1}$。对 $i = 1, \ldots, N-1$，定义

$$G_i = \begin{cases} 1 & \text{若} X_i \neq X_{i+1}\text{（有间隙）}, \\ 0 & \text{若} X_i = X_{i+1}\text{（相连）}. \end{cases}$$

每一个间隙都把整列磁铁多分出一段，所以独立单元的数目是

$$U = 1 + G_1 + G_2 + \cdots + G_{N-1}.$$

间隙的分布

每个 G_i 取值 1 的概率都是 $\frac{1}{2}$：不论 X_i 是甚么，X_{i+1} 与它不同的概率都是 $\frac{1}{2}$。

> **想一想** “在 i 处有间隙”和“在 $i+1$ 处有间隙”这两个事件都牵涉第 $i+1$ 块磁铁。各个 G_i 真的互相独立吗?

是的，尽管相邻的 G 共用同一块磁铁。先固定第一块磁铁的类型 X_1。这样，数列 $G_1, \ldots, G_{N-1}$ 便逐一决定了 $X_2, X_3, \ldots, X_N$（若 $G_i = 0$，X_{i+1} 等于 X_i；若 $G_i = 1$，则为另一类型）；反过来，各磁铁的类型也决定了所有的 G。所以，不论 X_1 取哪一个值，$(X_2, \ldots, X_N)$ 的 2^{N-1} 种等可能的选择，与 $(G_1, \ldots, G_{N-1})$ 的 2^{N-1} 个可能数列一一对应（one-to-one）。因此每一个间隙数列出现的概率都是 $1/2^{N-1}$，这正好表示各个 G_i 互相独立，并且各以概率 $\frac{1}{2}$ 取值 0 或 1。

由此可得 $G_1 + \cdots + G_{N-1} \sim \mathrm{B}\left(N-1, \frac{1}{2}\right)$。

期望值与方差

服从 $\mathrm{B}(n, p)$ 的变量，其平均值为 np，方差为 $np(1-p)$。取 $n = N-1$、$p = \frac{1}{2}$，并留意加上常数 1 只会令平均值平移，不会改变方差，于是

$$\mathrm{E}(U) = 1 + \tfrac{1}{2}(N-1) = \frac{N+1}{2},$$
$$\mathrm{Var}(U) = (N-1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{N-1}{4}.$$

如果你不想直接引用二项分布的结果：$\mathrm{E}(G_i) = \frac{1}{2}$，而且由于 $G_i^2 = G_i$，可得 $\mathrm{Var}(G_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$。由期望值的线性性质（linearity）可得平均值，而独立性则让我们可以把 $N-1$ 个方差相加。

验算

► $N = 1$：一块磁铁必定是一个单元，而公式给出平均值 1 和方差 0。

- $N = 2$: 两块磁铁组成 1 个或 2 个单元, 概率各为 $\frac{1}{2}$, 所以平均值是 $\frac{3}{2}$, 方差是 $\frac{5}{2} - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$, 与公式相符。
- 对所有 2^N 种排列逐一穷举，在 $N \leq 12$ 的情况下所得结果与 $\frac{N+1}{2}$ 和 $\frac{N-1}{4}$ 完全一致；另外以 $N = 20$ 进行模拟，得到的平均值约为 10.5，方差约为 4.73（预测值为 10.5 和 4.75）。

常见错误

- 以为两块指向相同的磁铁会互相排斥。其实它们相对的是异极（N 对 S），所以会互相吸引并相连。
- 没有说明独立性的理由便把方差相加。这里的独立性确实成立，但并不明显，因为相邻的间隙共用同一块磁铁。
- 把间隙数目当作 N 个而非 $N - 1$ 个，因而写出 $\mathrm{Var}(U) = \frac{N}{4}$；又或者在平均值中漏掉额外的 1。

STEP 之外

借着数单元之间的边界来数单元，这种方法就是指示变量（indicator variables）法，是概率论中最有用的工具之一：把一个计数写成若干个 0–1 变量之和，然后运用期望值的线性性质，而这完全不需要独立性。这里的 U 所数的，是由两种符号组成的随机序列中的游程（runs）数目。游程数目是统计学中 Wald–Wolfowitz 游程检验（runs test）的基础，这个检验用来判断一个序列看来是否随机。关于指示变量及其方差的更多内容，可参阅 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门）。

详细解答

STEP I 1999，第 14 题

概率与统计 · 条件概率

> **STEP I 1999，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s1-q14

关键思路

这个连续随机变量（continuous random variable）只是用来引出一个离散（discrete）随机变量。只要把密度函数（density）化成得 4、3、2、1 分的四个概率，第 (i) 部分就只是一行的期望值（expectation）计算。第 (ii) 部分是条件概率（conditional probability）；由于总分必须刚好等于 3，获胜的方式寥寥可数，我们可以把它们全部列出。

解答

第 (i) 部分

对于 $0 \le a \le b \le 1$，

$$\mathrm{P}(a \le X < b) = \int_a^b 2x \,\mathrm{d}x = b^2 - a^2.$$

（对连续随机变量而言，包括或不包括端点并无分别。）设 S 为掷一支飞镖所得的分数，则

$$\mathrm{P}(S=4) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - 0 = \tfrac{1}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{3}{16},$$

$$\mathrm{P}(S=2) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{5}{16}, \qquad \mathrm{P}(S=1) = 1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{16}.$$

这四个概率之和为 1，正如所料。留意外围的环较容易掷中：密度 $2x$ 随 x 增大，因为离中心愈远，面积愈大。

所以

$$\mathrm{E}(S) = 4 \cdot \tfrac{1}{16} + 3 \cdot \tfrac{3}{16} + 2 \cdot \tfrac{5}{16} + 1 \cdot \tfrac{7}{16} = \frac{4+9+10+7}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8},$$

即为所求。

第 (ii) 部分

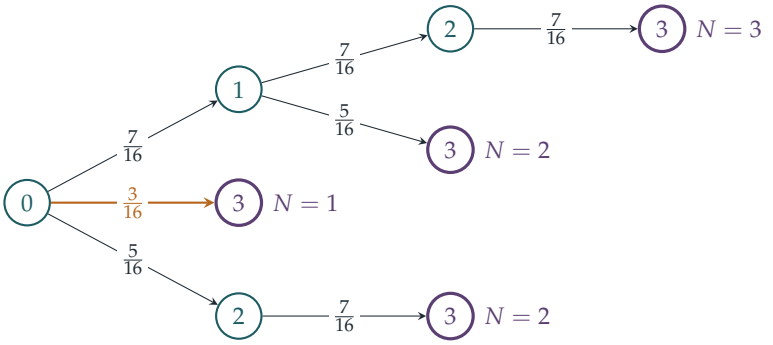
假设各次投掷互相独立（independent），每次的分数都依从上述 S 的分布。设 W 为我获胜的事件，N 为这局游戏的投掷次数。

> **想一想** 哪些得分序列会导致获胜?

我获胜，当且仅当累积总分达到 3 而之前没有超过它。每次得分至少为 1，所以总分每次至少增加 1，游戏最多只会掷三次。一局获胜的游戏，就是一个由正数得分组成、总和刚好为 3 的序列。（只有当总分低于 3 时我才会再掷，所以每个这样的序列确实是一局完整的游戏。）这样的序列只有四个:

$$(3), \qquad (1,2), \qquad (2,1), \qquad (1,1,1).$$

得分 4 永远不会出现，因为它会令总分立即超过 3。



树形图显示每条以获胜告终的路线上的累积总分（获胜状态以紫色圆圈标示），箭头上标示每次投掷的概率。

根据独立性，每个序列的概率等于其中各个得分的概率之积:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(W \cap N = 1) = \mathrm{P}(3) = \tfrac{3}{16} = \tfrac{768}{4096},\\
&\mathrm{P}(W \cap N = 2) = \mathrm{P}(1,2) + \mathrm{P}(2,1) = 2 \cdot \tfrac{7}{16} \cdot \tfrac{5}{16} = \tfrac{70}{256} = \tfrac{1120}{4096},\\
&\mathrm{P}(W \cap N = 3) = \mathrm{P}(1,1,1) = \left(\tfrac{7}{16}\right)^3 = \tfrac{343}{4096}.
\end{aligned}$$

这三个事件互斥（disjoint），合起来就是 W，所以

$$\mathrm{P}(W) = \frac{768 + 1120 + 343}{4096} = \frac{2231}{4096}.$$

因此

$$\mathrm{P}(N = 3 \mid W) = \frac{\mathrm{P}(W \cap N = 3)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{343/4096}{2231/4096} = \frac{343}{2231},$$

即为所求。

验算

- 四个得分概率 $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$ 之和为 1。它们都是奇数除以 16，因为 $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$。
- 目标答案中的 $343 = 7^3$ 一看便知，掷三次而获胜的情况必定是 $(1,1,1)$，这印证了我们的设置。
- 以电脑模拟 10^6 局游戏，得出 $\mathrm{P}(W) \approx 0.5452$（准确值为 0.5447）及 $\mathrm{P}(N=3 \mid W) \approx 0.1535$（准确值为 $343/2231 \approx 0.1537$）。

常见错误

- 把各个得分区当作等可能。概率来自对密度函数求积分，而不是来自区间的阔度。
- 计算了 $(1,2)$ 却忘记 $(2,1)$，结果得出 $\mathrm{P}(W) = \frac{1671}{4096}$。
- 答案写成 $\mathrm{P}(N=3 \text{ 及} W) = \frac{343}{4096}$，而没有除以 $\mathrm{P}(W)$。

STEP 之外

第 (ii) 部分其实是一条小型的马可夫链（Markov chain）：状态就是累积总分，而 3 和“爆分”是吸收态（absorbing states）。目标分数较大时，逐一列出路线便不再可行。这时我们改为以 w_t 表示由总分 t 出发而获胜的概率，从而得到递推关系（recurrence）$w_t = \sum_s \mathrm{P}(S=s)\, w_{t+s}$。这种首步分析（first-step analysis）是大学一年级概率论的重要工具。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教科书）在讨论随机漫步（random walks）和马可夫链的部分对此有所讲解。

详细解答

STEP II 1999，第 1 题

纯数学 · 大数的比较

> **STEP II 1999，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q1

关键思路

这些数大得根本无法直接比较，就连它们的对数（logarithm）也大得无从入手。突破口是取 $\log_{10}$ 两次。由于 x、y 和 z 各自都是 10 的幂，每个双重对数（double logarithm）都会化为 100、x 和 y 的简短的和，而这些和很容易比较。因为 $\log_{10}$ 是递增的，比较双重对数就等于比较原来的数。

解答

全文以 log 表示 $\log_{10}$，并记

$$L(a) = \log(\log a).$$

函数 $t \mapsto \log t$ 是严格递增（strictly increasing）的，所以对于 $a, b > 10$ 的数（此时 $\log a, \log b > 1 > 0$），$a < b$ 当且仅当 $L(a) < L(b)$。我们用到的基本事实是

$$\log x = 100, \qquad \log y = x = 10^{100}, \qquad \log z = y = 10^{x}.$$

第 (i) 部分

在斯特灵近似公式（Stirling's approximation）中取 $n = x$，再取 $\log_{10}$，得

$$\begin{aligned}\log a_1 &\approx \log\sqrt{2\pi} + \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\log x - x\log \mathrm{e} \\ &= 100x - x\log \mathrm{e} + 50 + \log\sqrt{2\pi} \\ &= x\,(100 - \log \mathrm{e}) + 50.4\ldots.\end{aligned}$$

现在 $\log \mathrm{e} \approx 0.434$，而常数 $50.4\ldots$ 与 $x = 10^{100}$ 相比完全可以忽略。所以

$$\log a_1 \approx 99.566 \times 10^{100}, \qquad L(a_1) \approx 100 + \log 99.566 \approx 100 + 1.998 = 101.998\ldots \approx 102,$$

正如所求。

第 (ii) 部分

我们对每个数先计算 $\log a_i$，再计算 $L(a_i)$。

- $a_2 = x^y$：　$\log a_2 = y \log x = 100y$，所以 $L(a_2) = 2 + \log y = x + 2$。
- $a_3 = y^x$：　$\log a_3 = x \log y = x^2 = 10^{200}$，所以 $L(a_3) = 200$。
- $a_4 = z^x$：　$\log a_4 = x \log z = xy$，所以 $L(a_4) = \log x + \log y = x + 100$。
- $a_5 = \mathrm{e}^{xyz}$：　$\log a_5 = xyz \log \mathrm{e}$，所以

$$L(a_5) = 100 + x + y + \log(\log \mathrm{e}) \approx y + x + 99.64,$$

  因为 $\log(\log \mathrm{e}) = \log 0.434\ldots \approx -0.36$。
- $a_6 = z^{1/y}$：　$\log a_6 = \frac{1}{y} \log z = 1$，所以 $a_6 = 10$，这是精确值。
- $a_7 = y^{z/x}$：　$\log a_7 = \frac{z}{x} \log y = \frac{z}{x} \cdot x = z$，所以 $L(a_7) = \log z = y$。

连同第 (i) 部分得到的 $L(a_1) \approx 102$，各个双重对数为

$$\underbrace{0}_{a_6},\ \underbrace{102}_{a_1},\ \underbrace{200}_{a_3},\ \underbrace{x+2}_{a_2},\ \underbrace{x+100}_{a_4},\ \underbrace{y}_{a_7},\ \underbrace{y+x+99.6}_{a_5}.$$

? **想一想** 第 (i) 部分只给出了 a_1 的近似值。这样足以确定它的位置吗?

足够，而且我们甚至不需要用到斯特灵公式。$x!$ 的 x 个因子每个都不超过 x，所以 $x! \le x^x$，并且 $\log a_1 \le x \log x = 10^{102}$，由此得 $L(a_1) \le 102 < 200 = L(a_3)$。另外，$a_1 = x! > 10 = a_6$ 是显然的。所以 $a_6 < a_1 < a_3$ 严格成立。

现在我们逐一说明余下的比较。

- $a_3 < a_2$：$200 < 10^{100} + 2$。
- $a_2 < a_4$：$x + 2 < x + 100$。
- $a_4 < a_7$：我们需要 $x + 100 < y = 10^x$。这个不等式成立，而且相差极其悬殊，因为对于每个 $t \ge 3$ 都有 $10^t > t + 100$，而这里 $t = x = 10^{100}$。
- $a_7 < a_5$：$y < y + x + 99.6$，因为 $x + 99.6 > 0$。（直接来看：$\log a_5 = z \cdot xy \log \mathrm{e}$ 而 $xy \log \mathrm{e} > 1$，所以 $\log a_5 > z = \log a_7$。）

除 a_6 以外，所有数都大于 10，所以 L 的单调性（monotonicity）适用，而大小次序为

$$a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5.$$

验算

对于第 (i) 部分，我们取 $n = 10^2, 10^3, 10^5, 10^8$，把斯特灵公式与 $\log_{10} n!$ 的精确值（通过对数伽玛函数（log-gamma function）求得）作比较。a_1 的双重对数公式与精确值相差不超过 10^{-6}，而当 $n = 10^{100}$ 时，公式给出 101.998。对于第 (ii) 部分，我们取 $x = 10^k$，其中 $k = 2, 3, 4$，把整个计算重做一遍，这时 $y = 10^x$ 可以作为整数精确地储存。每次都得出相同的次序 $a_6 < a_1 < a_3 < a_2 < a_4 < a_7 < a_5$，所以这个次序并不取决于 100 这个数的大小。

常见错误

- 只比较单重对数，然后迷失方向：$\log a_7 = z$ 和 $\log a_4 = xy$ 仍然太大，无法凭肉眼比较。要再取一次对数。
- 把 e^{xyz} 转换为以 10 为底时，忘记了因子 $\log \mathrm{e}$。在这里它几乎没有影响，但确实会令 $L(a_5)$ 偏移约 0.36。
- 没有留意到 a_6 其实就是 10，是所有数中最小的。

STEP 之外

迭代对数（iterated logarithm）和指数塔在分析学和计算机科学中用来量度增长。例如，迭代对数 $\log^* n$ 出现在某些算法的运行时间中，而“塔”函数则在拉姆齐理论（Ramsey theory）中用作结果的界。斯特灵公式本身是一个渐近级数（asymptotic series）的首项，而严谨地证明它是大学一年级分析课的经典习题。想熟习当中涉及的极限和不等式，Abbott 的 *Understanding Analysis* 是很好的入门读物。

详细解答

STEP II 1999，第 2 题

纯数学 · 二次方程的判别式

STEP II 1999，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q2

关键思路

一切取决于 $(*)$ 的判别式（discriminant）。由于 x 的系数带有因子 2，四分之一判别式 $\frac{1}{4}(b^2-4ac)$ 特别简洁，而且它原来是 n 的二次式（quadratic）。于是每一部分都变成关于另一个二次式的正负号的问题，这次以 n 为变量。

解答

全篇我们都假设 $pn^2+q\geq 0$，使平方根为实数，而 $(*)$ 是一个系数为实数的普通二次方程。（在第 (i) 及第 (iii) 部分，由于 $q>0$ 或 $q\geq 0$，这个条件自动成立。）取 $a=n$、$b=2\sqrt{pn^2+q}$ 及 $c=rn+s$，方程有实根（real roots）当且仅当 $b^2-4ac\geq 0$，即 $\frac{1}{4}b^2-ac\geq 0$。现在

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}b^2-ac &= (pn^2+q)-n(rn+s)\\ &= (p-r)n^2-sn+q.\end{aligned}$$

设 $f(n)=(p-r)n^2-sn+q$。则

$$(*)\text{ 没有实根}\iff f(n)<0.$$

第 (i) 部分

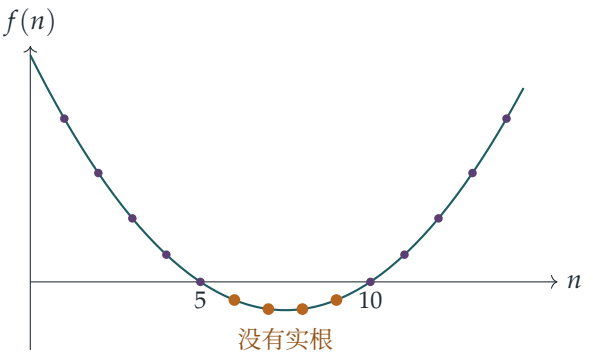
这里 $p-r=1$，所以

$$f(n)=n^2-15n+50=(n-5)(n-10).$$

它为负数当且仅当 $5<n<10$。由于 n 是正整数，$(*)$ 没有实根的情况恰好是

$$n\in\{6,7,8,9\}.$$

当 $n = 5$ 及 $n = 10$ 时，$f(n) = 0$，方程有一个实数重根（repeated root），所以这两个值不包括在内。



第 (ii) 部分

现在 $p < r$，所以 f 的首项系数（leading coefficient）$p - r$ 为负数。把 f 看成实变量 t 的二次式：

$$f(t) = (p - r)t^2 - st + q.$$

它的判别式是

$$s^2 - 4(p - r)q,$$

根据假设 $4q(p - r) > s^2$，这个判别式为负数。

想一想 为甚么 f 的判别式为负数，能告诉我们 $f(n)$ 的正负号?

判别式为负数的二次式没有实零点，所以它的图像永不穿过横轴，对所有实数 t 都保持同一个正负号。首项系数为负数时，图像是一条开口向下的抛物线（parabola），所以这个符号是负号。具体来说，用配方法（completing the square），

$$f(t) = (p - r)\Big(t - \frac{s}{2(p - r)}\Big)^2 + \frac{4q(p - r) - s^2}{4(p - r)},$$

两项都是负数或零：第一项是因为 $p - r < 0$，第二项是因为其分子为正数而分母为负数。第二项严格小于零，所以对每一个实数 t 都有 $f(t) < 0$。

特别地，对每一个正整数 n 都有 $f(n) < 0$，所以无论 n 取甚么值，$(*)$ 都没有实根，这正是所要证明的。

留意这些假设必然导致 $q < 0$：由于 $p - r < 0$ 而 $4q(p - r) > s^2 \geq 0$，q 必定是负数。因此当 n 较小时，$pn^2 + q$ 确实可以是负数，而我们一直沿用的“平方根为实数”这个假设在这里就很重要。（假如容许系数为虚数，$x = 0$ 便有可能是根：试试 $p = 1$、$r = 2$、$s = -2$、$q = -10$、$n = 1$。）

第 (iii) 部分

现在 $n=1$、$p-r=1$ 及 $q=s^2/8\geq 0$，所以 $p+q>0$，各系数均为实数。这里

$$f(1)=1-s+\frac{s^2}{8}=\frac{s^2-8s+8}{8}.$$

方程有实根当且仅当 $f(1)\geq 0$，亦即当且仅当

$$s^2-8s+8\geq 0.$$

$s^2-8s+8=0$ 的根是

$$s=\frac{8\pm\sqrt{64-32}}{2}=4\pm 2\sqrt{2},$$

所以 $s^2-8s+8=\big(s-(4-2\sqrt{2})\big)\big(s-(4+2\sqrt{2})\big)$。这个乘积非负，当且仅当 s 位于两根之间的开区间（open interval）之外。因此 $(*)$ 有实根当且仅当

$$s\leq 4-2\sqrt{2}\quad\text{或}\quad s\geq 4+2\sqrt{2},$$

这正是所要证明的。每一步都是可逆的，“当且仅当”的两个方向正是由此而来。在两个端点处，方程的根是重根。

验算

- 在 (i) 中，取 $n=7$：$\frac{1}{4}b^2=3\cdot 49+50=197$ 而 $ac=7\cdot 29=203$，所以 $\frac{1}{4}b^2-ac=-6<0$。取 $n=11$：$413-11\cdot 37=6>0$。
- 在 (iii) 中，$4-2\sqrt{2}\approx 1.1716$ 而 $4+2\sqrt{2}\approx 6.8284$。取 $s=4$，得 $f(1)=1-4+2=-1<0$，它位于两根之间的空隙内，与预期相符。
- 我们用电脑就 (i) 搜索了由 1 至 199 的 n，就 (ii) 测试了约 5 百万个随机情况，并就 (iii) 测试了 10^5 个随机的 s 值。全部结果都与上文一致。

常见错误

- 在 (i) 中把 $n=5$ 及 $n=10$ 也包括在内。这时判别式为零，所以方程有一个（重复的）实根。
- 在 (ii) 中只验证 n 很大时 $f(n)<0$。判别式条件的要点，正在于 f 处处为负数，包括 n 较小的时候。
- 忘记了 x 的系数中的因子 2，结果在判别式中把 $4(pn^2+q)$ 放错了位置。

STEP 之外

这里的做法，是把参数（parameter）当作新的变量，再考虑以它为变量的二次式的正负号；这正是研究多项式的根如何随系数变化的起点。在大学，这会引伸到高次多项式的判别式，以及这样的一个概念：二次型（quadratic form）$at^2 + bt + c$ 是负定（negative definite）的，当且仅当 $a < 0$ 且 $b^2 < 4ac$。同一个判别法用于两个变量时，可以为多元函数的驻点（stationary points）分类。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）中还有很多建基于严谨判别式论证的 STEP 题目。

详细解答

STEP II 1999，第 3 题

纯数学 · 数学归纳法

STEP II 1999，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q3

关键思路

不要一次又一次地从头对 e^{-x^3} 求导。应该把第 n 阶导数（derivative）写成 $\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x)$，然后对这个式子再求导一次。这样便得到一个把 S_{n+1} 与 S_n 及 S_n' 连系起来的递推关系（recurrence），而题目的每一部分都可由这一个关系推出：各个多项式（polynomial）的具体形式、归纳法（induction）证明、次数（degree）与首项系数（leading coefficient），以及最后的不等式。

解答

递推关系

根据定义，

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^3}\right) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n(x).$$

利用积法则（product rule）再求导一次，

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(\mathrm{e}^{-x^3}\right) = \mathrm{e}^{-x^3}S_n'(x) - 3x^2\mathrm{e}^{-x^3}S_n(x),$$

再乘以 e^{x^3}，得

$$\boxed{S_{n+1}(x) = S_n'(x) - 3x^2S_n(x).}$$

这对所有 $n \geq 0$ 都成立，其中 $S_0(x) = 1$（第零阶导数就是函数本身）。

S_2 与 S_3

由 $S_0 = 1$ 出发，递推关系给出 $S_1 = 0 - 3x^2 = -3x^2$，这也可以直接看出。然后

$$S_2 = S_1' - 3x^2 S_1 = -6x - 3x^2(-3x^2) = 9x^4 - 6x,$$

正如题目所求。再用一次递推关系，

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2' - 3x^2 S_2 = (36x^3 - 6) - 3x^2(9x^4 - 6x) \\ &= 36x^3 - 6 - 27x^6 + 18x^3, \end{aligned}$$

所以

$$S_3(x) = -27x^6 + 54x^3 - 6.$$

归纳法证明

我们证明一个更强的命题，因为这样做不用多花工夫，还能一并回答下一问：

$P(n)$：$S_n(x)$ 是一个次数为 $2n$ 的多项式，其首项系数为 $(-3)^n$。

基础情况。$S_1(x) = -3x^2$ 的次数为 2，首项系数为 $-3 = (-3)^1$，所以 $P(1)$ 成立。（$P(0)$ 亦成立，因为 $S_0 = 1$。）

归纳步骤。假设 $P(k)$ 成立，即

$$S_k(x) = (-3)^k x^{2k} + (\text{其余各项，次数均低于} 2k).$$

多项式的导数仍是多项式，$3x^2 S_k$ 也是多项式，所以 $S_{k+1} = S_k' - 3x^2 S_k$ 是多项式。至于它的次数，把两部分分开来看：

- S_k' 的次数至多为 $2k - 1$；
- $-3x^2 S_k(x) = -3(-3)^k x^{2k+2} + (\text{较低次项}) = (-3)^{k+1} x^{2k+2} + \cdots$。

> ? **想一想** S_k' 会不会把 $-3x^2 S_k$ 的最高次项抵消掉?

不会：S_k' 的次数至多为 $2k - 1$，远低于 $2k + 2$，所以它碰不到 x^{2k+2} 这一项。因此 S_{k+1} 的次数恰好是 $2k + 2 = 2(k + 1)$，首项系数为 $(-3)^{k+1}$（非零）。这正是 $P(k + 1)$。

由归纳法，$P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立。所以 $S_n(x)$ 是一个阶（即次数）为 $2n$ 的多项式，而 x^{2n} 的系数为 $(-3)^n$。这与 S_2（$9 = (-3)^2$，次数为 4）及 S_3（$-27 = (-3)^3$，次数为 6）吻合。

最后一部分

假设 $S_n'(a) = 0$。在递推关系中代入 $x = a$，导数项便消失：

$$S_{n+1}(a) = S_n'(a) - 3a^2 S_n(a) = -3a^2 S_n(a).$$

因此

$$S_n(a)\, S_{n+1}(a) = -3a^2 \big(S_n(a)\big)^2 \le 0,$$

因为 $a^2 \ge 0$ 且 $\big(S_n(a)\big)^2 \ge 0$。等号成立当且仅当 $a = 0$ 或 $S_n(a) = 0$。证明至此完成。

验算

- 首项：S_3 应以 $(-3)^3 x^6 = -27x^6$ 开首，事实确是如此。
- S_3 的常数项：在 $x = 0$ 附近，$\mathrm{e}^{-x^3} = 1 - x^3 + \cdots$，所以它在 0 处的第三阶导数是 $-3! = -6$。这与 $S_3(0) = -6$ 相符。
- 一个驻点（stationary point）：$S_3'(x) = -162x^5 + 162x^2$ 在 $x = 1$ 处为零。在该点 $S_3(1) = 21$ 而 $S_4(1) = -3 \cdot 21 = -63$，所以乘积为 $-1323 \le 0$。
- 我们亦在三十个随机有理数点 a 上，把 $S_0, \ldots, S_9$ 与 $\mathrm{e}^{-(a+h)^3}$ 的精确泰勒级数（Taylor series）作了对照，并在 $[-4, 4]$ 内 $S_1, \ldots, S_8$ 的每一个驻点上检验了该不等式。

常见错误

- 忘记说明为何次数恰好是 $2n + 2$。你需要首项系数非零，并且 S_k' 无法把它抵消，这就是为甚么值得把首项系数一并放进归纳假设之中。
- 只证明“S_n 是多项式”，然后凭规律猜出次数。题目要求你从归纳论证本身得出次数。

STEP 之外

这里的多项式是埃尔米特多项式（Hermite polynomials）的近亲，后者是用同一技巧对 e^{-x^2} 定义的（即所谓“罗德里格斯公式”（Rodrigues formula））。它们满足与我们这里相似的递推关系，并出现于概率论和量子谐振子（quantum harmonic oscillator）之中。最后的不等式让我们初次窥见，这类递推关系如何支配一整族多项式的零点和转向点（turning point）的位置。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教材）在讨论级数解的一章中会遇到埃尔米特方程。

详细解答

STEP II 1999，第 4 题

纯数学 · 二项式系数恒等式

> **STEP II 1999，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q4

关键思路

当两个多项式（polynomial）恒等时，它们各次 x 幂的系数（coefficient）都相同。因此我们选取两个二项展开式（binomial expansion）的乘积，使其 x^n 的系数正好是所求的和，然后从该乘积较简单的形式再计算同一个系数。唯一真正要决定的，是选哪两个因式相乘：把其中一个因式的 x 换成 $-x$，便得到第 (i) 部分所需的正负号；把其中一个因式求导，便得到第 (ii) 部分多出来的 t。

解答

第一个结果

根据二项式定理（binomial theorem），

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r.$$

把两个这样的展开式相乘。x^n 项是由第一个括号取 x^s、第二个括号取 x^{n-s} 而得，其中 s 满足 $0 \le s \le n$。所以 $(1+x)^n(1+x)^n$ 中 x^n 的系数是

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2,$$

这里用了对称性 $\binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}$，由阶乘（factorial）公式可清楚看出。在恒等式的另一边，$(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数是 $\binom{2n}{n}$。两个多项式恒等，所以它们 x^n 的系数相等：

$$\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}^2 = \binom{2n}{n}.$$

第 (i) 部分

我们需要正负交替的符号，所以把第一个因式换成 $(1-x)^n = \sum_r \binom{n}{r}(-1)^r x^r$，并使用恒等式（identity）

$$(1-x)^n(1+x)^n \equiv (1-x^2)^n.$$

与之前一样，左边的 x^n 项来自第一个括号的 x^s 和第二个括号的 x^{n-s}，所以 x^n 的系数是

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}\binom{n}{n-s} = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2.$$

在右边，

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2k}$$

只含 x 的偶数次幂。由于 n 是偶数，x^n 确实出现，即当 $2k=n$，亦即 $k=n/2$ 时，其系数为 $(-1)^{n/2}\binom{n}{n/2}$。比较系数，得

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\binom{n}{s}^2 = (-1)^{n/2}\binom{n}{n/2},$$

正是所求。（同样的论证显示，当 n 是奇数时这个和等于 0，因为此时 $(1-x^2)^n$ 没有 x^n 项。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 怎样才能令 $\binom{n}{t}$ 旁边出现一个因子 t?

求导（differentiation）便可做到：$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^t = t\,x^{t-1}$。把二项展开式求导，得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}x^{t-1}.$$

现在乘以 $(1+x)^n = \sum_u \binom{n}{u}x^u$，并使用恒等式

$$n(1+x)^{n-1}(1+x)^n \equiv n(1+x)^{2n-1}.$$

在左边，x^{n-1} 项来自第一个括号的 $t\binom{n}{t}x^{t-1}$ 乘以第二个括号的 $\binom{n}{n-t}x^{n-t}$，所以 x^{n-1} 的系数是

$$\sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}\binom{n}{n-t} = \sum_{t=1}^{n} t\binom{n}{t}^2.$$

在右边，$n(1+x)^{2n-1}$ 中 x^{n-1} 的系数是 $n\binom{2n-1}{n-1}$。最后，

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{2n}{n}\cdot\frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = 2\binom{2n-1}{n-1},$$

所以比较系数后乘以二，得

$$\sum_{t=1}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = 2n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n}{n}.$$

另一方法：有一个巧妙的对称论证。把 t 换成 $n-t$，并利用 $\binom{n}{n-t} = \binom{n}{t}$，可见 $\sum_{t=0}^{n} t\binom{n}{t}^2 = \sum_{t=0}^{n}(n-t)\binom{n}{t}^2$。把同一个和的这两个表达式相加，得

$$\sum_{t=0}^{n} 2t\binom{n}{t}^2 = n\sum_{t=0}^{n}\binom{n}{t}^2 = n\binom{2n}{n}$$

这是根据第一个结果，而 $t=0$ 的一项为零。

验算

取 $n=4$，此时帕斯卡三角形（Pascal's triangle）的相应一行是 $1,4,6,4,1$。于是 $1+16+36+16+1 = 70 = \binom{8}{4}$；交错和是 $1-16+36-16+1 = 6 = (-1)^2\binom{4}{2}$；而 $2(1\cdot 16 + 2\cdot 36 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = 280 = 4\times 70$。我们亦已对 39 或以下的每一个 n 精确验证过全部三个恒等式。

常见错误

- 忘记在第 (i) 部分中右边只有偶数次幂，所以正正因为 n 是偶数，x^n 才会出现。
- 在第 (ii) 部分比较了错误的幂：求导之后指数减一，所以我们需要的是 x^{n-1}，而不是 x^n。

STEP 之外

第一个恒等式是范德蒙恒等式（Vandermonde's identity）$\sum_s \binom{m}{s}\binom{n}{k-s} = \binom{m+n}{k}$ 的特殊情况，后者亦有一个计数证明：从 m 名女士和 n 名男士中选出 k 人，方法是先决定选多少名女士。用多项式作为记录数列的工具，就是*生成函数*（generating functions）的方法，它是组合数学（combinatorics）和概率论中的核心工具。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）全书都使用生成函数，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多这种类型的题目。

详细解答

STEP II 1999，第 5 题

纯数学 · 三角方程

STEP II 1999，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q5

关键思路

有两条自然的路线。一是以 $\cos\alpha$ 为未知数：先把 $\sin\alpha$ 分离出来，两边平方，再利用 $\sin^2+\cos^2=1$ 得出一条关于 $\cos\alpha$ 的二次方程（quadratic equation）。二是把 $5\cos x+12\sin x$ 写成单一余弦 $13\cos(x-\beta)$，这个写法同时说明二次方程的两个根确实都会出现。至于最后一部分，由于余弦在 $[0,\pi]$ 上递减，$\alpha<\frac{3}{4}\pi$ 其实是一个关于 $\cos\alpha$ 的命题。于是问题归结为比较两个根式（surd）的大小。

解答

$\cos\alpha$ 的两个值

设 $c=\cos\alpha$。由方程得 $12\sin\alpha=7-5c$。两边平方，并利用 $\sin^2\alpha=1-c^2$，

$$144(1-c^2)=49-70c+25c^2,$$

$$169c^2-70c-95=0.$$

由二次公式（quadratic formula）得

$$c=\frac{70\pm\sqrt{70^2+4\cdot169\cdot95}}{2\cdot169}=\frac{70\pm\sqrt{69120}}{338}.$$

由于 $69120=576\times120=24^2\times120$，故 $\sqrt{69120}=24\sqrt{120}$。因此

$$\cos\alpha=\frac{35-12\sqrt{120}}{169}\qquad\text{或}\qquad\cos\alpha=\frac{35+12\sqrt{120}}{169},$$

这就是所求的结果，而另一个值是 $\dfrac{35+12\sqrt{120}}{169}$。

想一想 平方可能会产生增根。这两个值是否真的都来自原方程的解?

是的，而单一余弦的形式正好说明原因。设 β 为满足 $\cos\beta = \frac{5}{13}$ 及 $\sin\beta = \frac{12}{13}$ 的锐角(acute angle)。则

$$5\cos x + 12\sin x = 13\cos(x-\beta),$$

所以方程即是 $\cos(x-\beta) = \frac{7}{13}$。设 γ 为满足 $\cos\gamma = \frac{7}{13}$ 的锐角，于是 $\sin\gamma = \frac{\sqrt{169-49}}{13} = \frac{\sqrt{120}}{13}$。方程的解为 $x = \beta \pm \gamma + 2k\pi$，而

$$\cos(\beta\pm\gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma = \frac{35 \mp 12\sqrt{120}}{169}.$$

所以两个符号各自给出一个真正的解：$\alpha = \beta + \gamma$ 对应负号，$\alpha = \beta - \gamma$ 对应正号。

第二象限的解

假设 $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$。则 $\cos\alpha < 0$。由于 $\sqrt{120} > 10$，可知 $35 + 12\sqrt{120} > 0$，所以这个根被排除。另外 $12\sqrt{120} > 120 > 35$，所以另一个根是负数。因此

$$\cos\alpha = \frac{35 - 12\sqrt{120}}{169}.$$

余弦在 $[0,\pi]$ 上严格递减（strictly decreasing)。α 和 $\frac{3}{4}\pi$ 都在这个区间内，所以

$$\alpha < \tfrac{3}{4}\pi \iff \cos\alpha > \cos\tfrac{3}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

因此我们须证明 $\dfrac{12\sqrt{120}-35}{169} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即 $12\sqrt{120} - 35 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$。

想一想 不用计算机，又要避免把可能是负数的量平方，我们怎样比较这些根式的大小?

我们先粗略地估计 $\sqrt{120}$ 的上界（bound)。因为 $120 < 121$，所以 $\sqrt{120} < 11$，于是

$$12\sqrt{120} - 35 < 132 - 35 = 97.$$

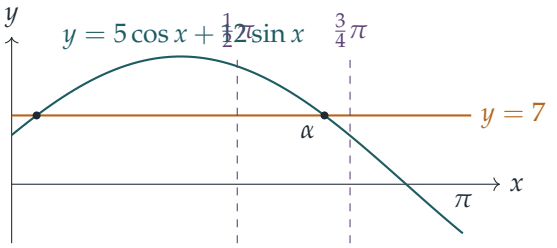
现在只需证明 $97 < \dfrac{169}{\sqrt{2}}$，即 $97\sqrt{2} < 169$。两边皆为正数，所以这等价于两边平方后的不等式（inequality)：

$$2\times 97^2 = 18\,818 < 28\,561 = 169^2,$$

而这是成立的。综合以上各步，

$$\cos\alpha = -\frac{12\sqrt{120}-35}{169} > -\frac{97}{169} > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\tfrac{3}{4}\pi,$$

又因为余弦在 $[0,\pi]$ 上递减，所以 $\alpha < \frac{3}{4}\pi$，证明完毕。



验算

- 以数值计算，在 $[0,2\pi)$ 内的根为 $x \approx 0.1738$ 和 $x \approx 2.1782$。它们的余弦值分别是 0.98493 和 -0.57073，与 $(35 \pm 12\sqrt{120})/169$ 吻合。
- 第二象限的根是 2.1782，小于 $\frac{3}{4}\pi \approx 2.3562$，正如图像所示。两者相差的余裕相当充足：$\cos\alpha \approx -0.571$，而 $-1/\sqrt{2} \approx -0.707$。这就是粗略的估计 $\sqrt{120} < 11$ 已经足够的原因。
- 作为对二次方程的合理性检查，两根之积为 $-\frac{95}{169}$，两根之和为 $\frac{70}{169}$。

常见错误

- 没有检查正负号就把不等式两边平方。这里 $12\sqrt{120} - 35$ 和 $169/\sqrt{2}$ 都是正数，但理由应当写明。
- 忘记余弦在 $[0,\pi]$ 上是递减的，因而不等号要反转：$\alpha < \frac{3}{4}\pi$ 对应的是 $\cos\alpha > -\frac{1}{\sqrt{2}}$。
- 没有解释为何在第二象限中要排除正根。

STEP 之外

最后一部分是严格估计的一个小练习。你把一个难以处理的量换成一个较简单的界，再检查余裕是否仍然足够；分析学（analysis）中许多不等式正是这样证明的。由余弦值推断角的大小这一步，用到了严格单调函数（strictly monotonic function）保持（或反转）次序这个事实，而这正是大学第一门分析课中反函数（inverse function）背后的想法。如想进一步了解如何严谨地处理不等式的证明，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）。

详细解答

STEP II 1999，第 6 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP II 1999，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q6

关键思路

分式 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 的导数（derivative）是一个常数除以 $(cx+d)^2$。因此，只要被积函数（integrand）是 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 乘以 $\frac{x+1}{x+3}$ 或 $\frac{x+2}{x+3}$ 的函数，把该分式代换为新变量，就能把 $\frac{1}{(x+3)^2}$ 完全吸收，余下的最多只是 $\int \ln y \,\mathrm{d}y$。其余两个积分则可由对数定律（laws of logarithms）推出。

解答

导数

由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

分子中含 x 的项互相抵消，只余下一个常数。整道题之所以行得通，关键正在于此。

第一个积分

设 $y = \dfrac{x+1}{x+3}$。这符合 $(*)$ 的形式，其中 $a=1$，$b=1$，$c=1$，$d=3$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3-1}{(x+3)^2} = \frac{2}{(x+3)^2}, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

当 $x=0$ 时，$y=\frac{1}{3}$；当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}$。利用 $\int \ln y\,\mathrm{d}y = y\ln y - y$（以 $u=\ln y$ 作分部积分法（integration by parts)），可得：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{1/3}^{1/2}\ln y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[y\ln y - y\Big]_{1/3}^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\ln 3 + \tfrac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{6}\ln 3 - \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{12},\end{aligned}$$

其中用到 $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ 和 $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$。这正是题目要求的结果。把这个积分记为 I_1。

一个相伴的积分

> ? **想一想** x^2+3x+2 与我们刚才用过的代换有甚么关系?

它可因式分解为 $(x+1)(x+2)$，所以

$$\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \frac{x+1}{x+3}\cdot\frac{x+2}{x+3} \qquad 及 \qquad \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+1}{x+3}\Big/\frac{x+2}{x+3}.$$

因此，最后两个积分中的所有对数，都是 $\ln\frac{x+1}{x+3}$ 与 $\ln\frac{x+2}{x+3}$ 的和与差（当 $0\le x\le 1$ 时，这些分式全部为正)。所以我们还需要多计算一个积分：

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x+3)^2}\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\mathrm{d}x.$$

设 $y=\dfrac{x+2}{x+3}$。这次 $a=1$，$b=2$，$c=1$，$d=3$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{(x+3)^2}$，而积分上下限变为 $y=\frac{2}{3}$ 和 $y=\frac{3}{4}$：

$$\begin{aligned}J &= \int_{2/3}^{3/4}\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[y\ln y - y\Big]_{2/3}^{3/4}\\ &= \tfrac{3}{4}(\ln 3 - 2\ln 2) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{3}(\ln 2 - \ln 3) + \tfrac{2}{3}\\ &= \frac{17}{12}\ln 3 - \frac{13}{6}\ln 2 - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

余下的两个积分

由于 $\ln\frac{x^2+3x+2}{(x+3)^2} = \ln\frac{x+1}{x+3} + \ln\frac{x+2}{x+3}$，第二个积分是

$$\begin{aligned}I_1 + J &= \left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{13}{6}\right)\ln 2 - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{12}\\ &= \frac{19}{12}\ln 3 - \frac{29}{12}\ln 2 - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

由于 $\ln\frac{x+1}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+3} - \ln\frac{x+2}{x+3}$，第三个积分是

$$\begin{aligned} I_1 - J &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{17}{12}\right)\ln 3 - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{13}{6}\right)\ln 2 \\ &= \frac{23}{12}\ln 2 - \frac{5}{4}\ln 3, \end{aligned}$$

其中常数项 $-\frac{1}{12}$ 已互相抵消。

验算

- 在 $[0,1]$ 上使用辛普森法则（Simpson's rule），得 $I_1 \approx -0.07352$，$J \approx -0.02878$，而第二和第三个积分分别 ≈ -0.10230 和 -0.04473，全部与精确形式吻合至小数点后十位。
- 粗略估计上下界：$\int_0^1 (x+3)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$，而 $\ln\frac{x+1}{x+2}$ 介乎 $\ln\frac{1}{2} \approx -0.69$ 与 $\ln\frac{2}{3} \approx -0.41$ 之间。所以第三个积分必定介乎约 -0.058 与 -0.034 之间，而 -0.0447 确实在此范围内。
- 每个被积函数在 $[0,1]$ 上都是负数（对数内的每个分式都小于 1），所以三个答案都应该是负数，而事实亦是如此。

常见错误

- 在第一个代换中漏掉因子 $\frac{1}{2}$：该处 $ad - bc = 2$，但在第二个代换中则是 1。
- 没有更改积分上下限，或在代换后仍沿用 x 的上下限 0 和 1。
- 为 $\frac{x+1}{x+2}$ 另作一个新的代换：这样做是可行的，但 $(x+3)^{-2}$ 以 y 表示时会变得相当繁复。把对数拆开要快得多。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 而 $ad - bc \neq 0$ 的映射，称为莫比乌斯变换（*Möbius transformations*）。把两个这样的变换复合，相当于把 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 相乘，而 $ad - bc$ 就是行列式（determinant），这正是它出现在导数中的原因。在复分析（complex analysis）中，它们恰好就是扩充复平面（extended plane）上的全部共形双射（conformal bijections），并把圆和直线映射为圆和直线。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）中有一章对此有十分精彩的论述。

详细解答

STEP II 1999，第 7 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP II 1999，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q7

关键思路

先求导，再把所有项通分到同一个公分母上：分子几乎完全消去——所有二次项互相抵消，只剩下一个一次因式，驻点（stationary point）的位置随即确定。至于描绘曲线，则把根号内的式子配方（complete the square）。这样便知道曲线在哪里有定义、当 $|x|$ 很大时有何表现，以及当 $a = 1$ 时平方根会变成绝对值（modulus），令曲线变成两段等轴双曲线（rectangular hyperbola）。

解答

设 $Q(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$。

当 $a > 1$ 时恰有一个驻点

若 $a > 1$，则对任意 x 均有 $Q(x) \geq a - 1 > 0$，所以曲线对所有实数 x 都有定义，而且可导。由 $y = xQ^{-1/2}$ 及 $Q'(x) = 2x - 2$，用乘积法则（product rule）可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= Q^{-1/2} - \tfrac{1}{2}x(2x-2)Q^{-3/2} = \frac{Q - x(x-1)}{Q^{3/2}} \\ &= \frac{x^2 - 2x + a - x^2 + x}{Q^{3/2}} = \frac{a - x}{(x^2 - 2x + a)^{3/2}}.\end{aligned}$$

对任意 x，分母都是正数而且有限，所以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 当且仅当 $x = a$。因此 C 恰有一个驻点，位于

$$x = a, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - a}} = \sqrt{\frac{a}{a-1}},$$

正如题目所求。由于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的正负号与 $a-x$ 相同，曲线在 $x<a$ 时上升，在 $x>a$ 时下降，所以这一点是极大点（maximum）。

> **想一想** 条件 $a>1$ 用在哪里?

用了两次：其一，它保证 $Q>0$ 处处成立，所以曲线没有缺口，也没有导数不存在的点；其二，它保证 $x=a$ 确实是曲线上的一点，因为 $Q(a)=a^2-a>0$。当 $a=1$ 时，原本应是驻点的 $x=a=1$ 正好是 $Q=0$ 之处，第 (ii) 部分出问题的地方就在这里。

另外有两项事实对描绘两条曲线都有帮助。当 $|x|$ 很大时，$\sqrt{Q}=|x|\sqrt{1-2/x+a/x^2}\approx|x|$，所以

$$y\to 1 \text{ 当} x\to+\infty, \qquad y\to -1 \text{ 当} x\to-\infty.$$

此外，y 的正负号与 x 相同，而且曲线通过原点，在该处的斜率（gradient）为 $a/a^{3/2}=1/\sqrt{a}$。

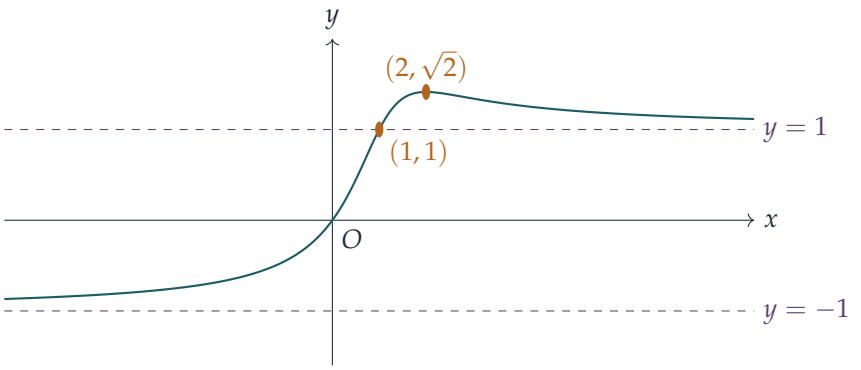
第 (i) 部分：$a=2$

这时 $y=\dfrac{x}{\sqrt{(x-1)^2+1}}$，对所有 x 都有定义，并且

- 在 $(2,\sqrt{2})$ 有极大点，在 $x<2$ 时递增，在 $x>2$ 时递减；
- 原点在曲线上，该处的斜率为 $1/\sqrt{2}$；
- 有水平渐近线（asymptote）$y=1$（当 $x\to\infty$）和 $y=-1$（当 $x\to-\infty$）。

曲线在每条渐近线的哪一侧? 设 $y=\pm1$ 并把两边平方，得 $x^2=x^2-2x+2$，所以 $x=1$，而且只有 $y=+1$ 符合（因为 y 的正负号与 x 相同）。因此曲线与 $y=1$ 只相交一次，交点为 $(1,1)$：对所有 $x>1$，曲线都在 $y=1$ 之上，过了极大点之后从上方向渐近线下降。曲线永不与 $y=-1$ 相交，所以它一直在 $y=-1$ 之上，并随着 x 由 $-\infty$ 增大而上升，逐渐离开这条渐近线。

（如果想知道更多细节：再求导一次可得 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=(2x^2-7x+4)/Q^{5/2}$，所以拐点（point of inflection）位于 $x=\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{17})$，大约是 $x\approx0.72$ 和 $x\approx2.78$。描绘草图时用不着这些，但它们可以解释曲线的形状。）



第 (ii) 部分： $a = 1$

这时 $Q = (x-1)^2$，所以要排除 $x = 1$，而且由于平方根取正值，

$$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$$

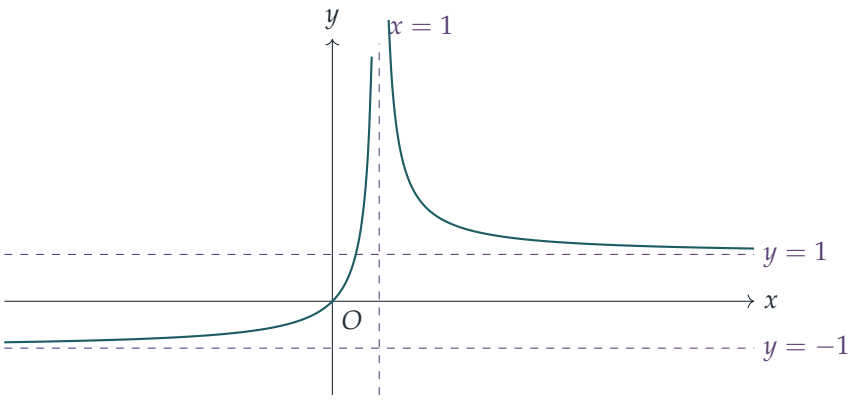
因此

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} = -1 + \dfrac{1}{1-x}, & x < 1, \\ \dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

每一支都是以 $x = 1$ 为中心的等轴双曲线的一部分。

- 当 $x < 1$：y 递增（其导数为 $1/(1-x)^2 > 0$），由 -1（当 $x \to -\infty$ 时从上方趋近）出发，以斜率 1 通过原点，再在 $x \to 1^-$ 时趋向 $+\infty$。
- 当 $x > 1$：y 递减（导数为 $-1/(x-1)^2 < 0$），由 $x \to 1^+$ 时的 $+\infty$ 下降，趋向 1（当 $x \to \infty$ 时从上方趋近）。

直线 $x = 1$ 是铅垂渐近线，而且在两侧都有 $y \to +\infty$（分子接近 1，分母是很小的正数）。曲线没有驻点：$a > 1$ 的曲线的极大点高度为 $\sqrt{a/(a-1)}$，当 $a \to 1^+$ 时，这个极大点已被推到无穷远处。一般公式亦与此吻合，因为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (1-x)/|x-1|^3$ 永不为零。



验算

- 以数值方法检验：在数千个随机点上，导数公式 $(a-x)/Q^{3/2}$ 与有限差分（finite difference）求得的导数吻合；而对若干个 $a>1$ 的值逐点检查正负号，都恰好找到一次变号。
- 当 $a=2$：$y(2)=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}\approx 1.414$，$y(1)=1$，而 $y(10^6)\approx 1.000001$，$y(-10^6)\approx -0.999999$，证实了曲线从哪一侧趋近各渐近线。
- 当 $a=1$：$y(0.999)\approx 999$ 及 $y(1.001)\approx 1001$，两者都是很大的正数，与上文所述一致。
- 当 $a\to\infty$ 时，极大点的高度 $\sqrt{a/(a-1)}$ 趋向 1，这是合理的：当 a 极大时，曲线在原点附近近似于 $x/\sqrt{a}$，隆起的部分随之变得平坦。

常见错误

- 在第 (ii) 部分写成 $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$。这样会处处得到 $y=x/(x-1)$，左边的一支因而出错：它会在 $x\to-\infty$ 时趋向 $+1$，并在 $x\to 1^-$ 时趋向 $-\infty$。
- 把曲线两端的渐近线都当作 $y=1$：由于 $\sqrt{x^2}=|x|$，当 $x\to-\infty$ 时极限是 -1。
- 忘记说明当 $a>1$ 时分母永不为零；缺少这一步，“分子只在 $x=a$ 处为零”尚不足以证明恰有一个驻点。

STEP 之外

这个曲线族的性质在 $a=1$ 处突然改变：一条只有一个极大点的光滑曲线，变成了两支分离的曲线，并带有一条铅垂渐近线。研究一个曲线族的定性形状如何随参数而变，正

是分歧理论（bifurcation theory）的起点；而处理 $\sqrt{x^2} = |x|$ 以及 $x \to \pm\infty$ 时的极限所需的那份谨慎，正是大学一年级分析课要严格阐明的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 平易近人，很适合用来了解极限与连续性的严谨处理方法。

详细解答

STEP II 1999，第 8 题

纯数学 · 三角级数

> **STEP II 1999，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q8

关键思路

把 $\sin k\theta$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$，利用积化和差公式（product-to-sum formula）便可将它化成两个余弦之*差*，于是整个和式可以裂项相消（telescope）。之后两部分的关键都在于选取合适的 θ：取 $\theta=\pi/n$ 时，那个难缠的余弦 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$ 会变成 $\cos\frac{1}{2}\theta$ 的简单倍数。至于 (ii)，半角公式（half-angle formula）可把 $\sin^2$ 化为余弦，而和式 $\sum k\cos k\theta$ 正好就是对 $(*)$ 求导所得的结果。

解答

证明 $(*)$

假设 $\sin\frac{1}{2}\theta\neq 0$, 使右边有意义。在恒等式（identity）$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ 中取 $A=k\theta$ 及 $B=\frac{1}{2}\theta$，得

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\sin k\theta=\cos\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\theta.$$

由 $k=0$ 加至 n，第 k 行所减去的 $\cos(k+\frac{1}{2})\theta$ 会在第 $k+1$ 行加回来，因此只剩下首项和末项：

$$2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sum_{k=0}^{n}\sin k\theta=\cos\left(-\tfrac{1}{2}\theta\right)-\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta=\cos\tfrac{1}{2}\theta-\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta,$$

因为余弦是偶函数（even function）。两边除以 $2\sin\frac{1}{2}\theta$ 即得 $(*)$。

第 (i) 部分

取 $\theta = \pi/n$（其中 $n \geq 1$），则 $\sin\frac{1}{2}\theta = \sin\frac{\pi}{2n} \neq 0$。于是

$$\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta = \cos\left(\pi + \tfrac{\pi}{2n}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{2n},$$

所以 $(*)$ 的分子是 $2\cos\frac{\pi}{2n}$，而

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \cot\frac{\pi}{2n}.$$

这是精确的结果。当 n 很大时，$\frac{\pi}{2n}$ 很小，故 $\cos\frac{\pi}{2n} \approx 1$ 而 $\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$，由此得

$$\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \approx \frac{1}{\pi/(2n)} = \frac{2n}{\pi}.$$

第 (ii) 部分

由倍角公式（double-angle formula），$\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{k\pi}{n}\right)$，所以取 $\theta = \pi/n$ 时

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta. \qquad (1)$$

要求出 $\sum k\cos k\theta$，我们把 $(*)$ 对 θ 求导；左边正好变成这个和式。先把右边拆成

$$\frac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

记 $S = \sin\frac{1}{2}\theta$ 及 $c = \cos\frac{1}{2}\theta$。第一部分求导后得 $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{4S^2}$。根据商法则（quotient rule），第二部分求导后得

$$\frac{(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})\theta \cdot 2S + \cos(n+\frac{1}{2})\theta \cdot c}{4S^2}.$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos k\theta = \frac{-1 + (2n+1)S\sin(n+\frac{1}{2})\theta + c\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{4S^2}.$$

想一想 为甚么要在求导之后才代入 $\theta = \pi/n$，而不是之前?

恒等式 $(*)$ 对所有 θ（只要 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$）都成立，所以我们可以对它求导。假如先固定 $\theta = \pi/n$，得到的只是一个数，根本无从求导。一旦得到以 θ 表示的导数恒等式，我们便可以代入任何想要的值。

现在取 $\theta = \pi/n$。与 (i) 一样，$(n+\frac{1}{2})\theta = \pi + \frac{1}{2}\theta$，所以 $\sin(n+\frac{1}{2})\theta = -S$ 而 $\cos(n+\frac{1}{2})\theta = -c$。因此

$$\sum_{k=0}^{n} k\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{-1-(2n+1)S^2 - c^2}{4S^2} = \frac{-2-2nS^2}{4S^2} = -\frac{1}{2S^2} - \frac{n}{2},$$

其中用了 $c^2 = 1 - S^2$。代入 (1)：

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{4} + \frac{1}{4S^2} = \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2n}}.$$

这是精确的结果。当 n 很大时，$\sin\frac{\pi}{2n} \approx \frac{\pi}{2n}$，故 $\frac{1}{4\sin^2(\pi/2n)} \approx \frac{n^2}{\pi^2}$；而 $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2}$，其中第二项与 n^2 相比可以忽略。所以

$$\sum_{k=0}^{n} k\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \approx \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}\right) n^2,$$

正如题目所求。

验算

- 在 (ii) 中取 $n = 1$：和为 $0 + 1\cdot\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$，而精确公式给出 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$。
- 在 (i) 中取 $n = 2$：和为 $0 + 1 + 0 = 1$，而 $\cot\frac{\pi}{4} = 1$。
- 数值上，当 $n = 1000$ 时，(i) 的和是 636.6192…，而 $2n/\pi = 636.6198\ldots$；(ii) 的和是 351 821.3，与 $(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2})n^2$ 相差不超过 0.15%。(ii) 的相对误差（relative error）以 $1/n$ 的速度缩小，原因是略去了 $\frac{n}{2}$ 这一项。

常见错误

- 写成 $\cos(\pi + x) = \cos x$：正确的值是 $-\cos x$，而正是这个负号令 (i) 的分子变成两倍。
- 在 (ii) 中漏掉 $\frac{1}{2}\sum k = \frac{n(n+1)}{4}$ 这一项，而 $\frac{1}{4}n^2$ 正是由它而来。

STEP 之外

第 (i) 部分其实是乔装了的黎曼和（Riemann sum）：$\frac{\pi}{n}\sum\sin\frac{k\pi}{n} \to \int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2$，这正正就是 $\sum \approx 2n/\pi$ 的意思。同样地，(ii) 所说的是 $\frac{1}{n^2}\sum k\sin^2\frac{k\pi}{2n} \to \int_0^1 x\sin^2\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2}$。把同一个裂项技巧用于 $\sum\cos k\theta$，便会得到傅里叶分析（Fourier analysis）中的狄利克雷核（Dirichlet kernel）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）对黎曼和与傅里叶级数（Fourier series）有严谨的讨论。

详细解答

STEP II 1999，第 9 题

力学 • 变力作用下的运动

STEP II 1999，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q9

关键思路

加速度（acceleration）只取决于距离 x，与时间无关，所以最合适的工具是 $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。这样一来，运动方程（equation of motion）就变成一条可以直接积分的方程，从而得出 v^2 作为 x 的函数（其实就是一条乔装了的能量方程（energy equation））。余下的工作，都是在问 v^2 在哪里降至零：碎片就是在那里停下，然后掉头返回。

解答

我们把每块碎片看成一个质点（particle），沿着一条通过定点 G 的直线运动，以 x 表示它与 G 的距离，$v = \dot{x}$ 表示它的速度，并规定远离 G 的方向为正。起初 $x = 0$ 而 $v = u > 0$。由于加速度指向 G，在这个规定下它是负的。

第 (i) 部分

当 $x < R$ 时，$\ddot{x} = -k_1 x^3$，写成 $\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 便得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_1 x^3.$$

分离变量，并由起点（$x = 0$，$v = u$）开始积分：

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}u^2 = -\tfrac{1}{4}k_1 x^4, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4 \quad (x < R).$$

只要碎片仍在向外运动，便有 $v = \sqrt{u^2 - \tfrac{1}{2}k_1 x^4}$。

第 (ii) 部分

由于 $2a^2 = k_1R^4$，(i) 的公式可写成 $v^2 = u^2 - a^2(x/R)^4$。当 x 由 0 开始增加时，v^2 随之递减，并在

$$x_0 = \left(\frac{2u^2}{k_1}\right)^{1/4}.$$

处降至零。若 $u < a$，则 $2u^2 < 2a^2 = k_1R^4$，所以 $x_0 < R$。

> **想一想** 在 x_0 处速率为零，但为甚么这就表示碎片不会走得更远?

在 x_0 处，碎片瞬间静止，但它在该处的加速度是 $-k_1x_0^3 \neq 0$，方向指向 G。所以它并非处于平衡（equilibrium）状态：它会开始向 G 往回运动。事实上，x 根本不可能超过 x_0，因为那样的话 (i) 的公式便会给出 $v^2 < 0$。碎片最远只能到达 $x_0 < R$，所以它永远不会到达与 G 相距 R 之处，这正是所要证明的。

第 (iii) 部分

首先，$u \geq b$ 的碎片必定能到达 R。根据定义，

$$b^2 = \tfrac{1}{2}k_1R^4 + \frac{2k_2}{3R^3} = a^2 + \frac{2k_2}{3R^3} > a^2,$$

所以当 $x \leq R$ 时，由第 (i) 部分得

$$v^2 = u^2 - \tfrac{1}{2}k_1x^4 \geq u^2 - a^2 \geq b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3} > 0.$$

特别地，碎片到达 $x = R$ 时，$v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4 = u^2 - a^2$。

当 $x \geq R$ 时，运动方程是 $v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -k_2x^{-4}$。由 $x = R$ 开始积分：

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_R^2 = \frac{k_2}{3}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

所以

$$\begin{aligned} v^2 &= u^2 - \tfrac{1}{2}k_1R^4 - \frac{2k_2}{3R^3} + \frac{2k_2}{3x^3} \\ &= u^2 - b^2 + \frac{2k_2}{3x^3} \qquad (x \geq R). \end{aligned}$$

这个组合正好说明了 b 为何要这样定义：b^2 就是由 G 逃逸到无穷远处，以 $\frac{1}{2}v^2$ 计算所须付出的总“代价”。

若 $u \geq b$，则 $u^2 - b^2 \geq 0$ 而 $\frac{2k_2}{3x^3} > 0$，所以对每一个 $x \geq R$ 都有 $v^2 > 0$（这包括临界情况 $u = b$）。连同 $x \leq R$ 时的下界，可知在碎片可能到达的每一个距离上，v^2 都严格为正。

速度 v 对时间连续，而且起初为 $u > 0$。它要变成负数，就必须经过 0，即在某个位置上有 $v^2 = 0$，而我们刚刚证明了这不会发生。所以自始至终 $v > 0$：由爆炸的一刻起，碎片一直在远离 G。（由于 $v^2 \geq 2k_2/(3x^3)$，它会一直走下去，且 $x \to \infty$。）

第 (iv) 部分

现在 $a < u < b$。由于 $u > a$，(iii) 的论证表明在 $[0, R]$ 上 $v^2 \geq u^2 - a^2 > 0$，所以碎片到达 R 时仍在向外运动。越过 R 之后，

$$v^2 = \frac{2k_2}{3x^3} - (b^2 - u^2),$$

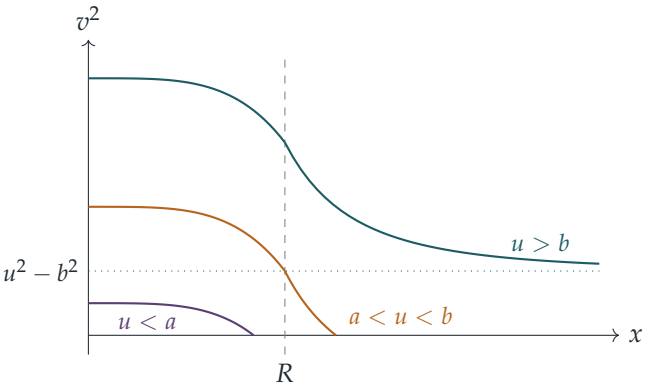
而此时 $b^2 - u^2 > 0$。这个式子随 x 增加而递减，并在

$$x^3 = \frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}.$$

时等于零。这一点确实位于 $x \geq R$ 的区域内：由于 $u > a$，$b^2 - u^2 < b^2 - a^2 = \frac{2k_2}{3R^3}$，所以 $x^3 > R^3$。与 (ii) 一样，碎片在该处停下，但仍有指向 G 的非零加速度 $-k_2 x^{-4}$，而且它不可能走得更远，否则 v^2 便会是负数。与 G 的最大距离是

$$\boxed{x_{\max} = \left(\frac{2k_2}{3(b^2 - u^2)}\right)^{1/3}}$$

下图显示当 $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$（因此 $a^2 = 1$、$b^2 = 3$）时，三类初速率下 v^2 对 x 的图像。每块碎片都会一直前进，直至它的曲线与横轴相交为止。



验算

- 取 $k_1 = 2$、$k_2 = 3$、$R = 1$，得 $a = 1$、$b = \sqrt{3}$；当 $u = \sqrt{2}$ 时，公式给出 $x_{\max} = (2 \cdot 3/(3 \cdot 1))^{1/3} = 2^{1/3} \approx 1.26$，刚好超过 R，与预期相符。
- 当 $u \to a^+$ 时，$b^2 - u^2 \to 2k_2/(3R^3)$ 而 $x_{\max} \to R$；当 $u \to b^-$ 时，$x_{\max} \to \infty$。两者在边界上都与第 (ii) 和第 (iii) 部分吻合。
- 以数值方法逐步计算这个运动（龙格—库塔法（Runge–Kutta），随机选取十二组 k_1、k_2、R），结果重现了 v^2 的公式、$u < a$ 时的折返点 $(2u^2/k_1)^{1/4}$、(iv) 中 $x_{\max}$ 的值（误差在 0.1% 以内），以及 $u \geq b$ 时完全没有折返。

常见错误

- 第二阶段由 $x = 0$ 开始积分，而不是由 $x = R$ 并以 $v_R^2 = u^2 - \frac{1}{2}k_1R^4$ 开始：力的规律在 R 处改变，所以积分常数也随之改变。
- 弄丢正负号：加速度指向 G，所以 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 是 *负的* k_1x^3 或 k_2x^{-4}。
- 在 (iii) 中只检查 $x \geq R$，却忘记在 R 以内 v 也必须保持为正。

STEP 之外

设 $V'(x)$ 等于加速度的相反数，则对任何只取决于位置的力，$\frac{1}{2}v^2 + V(x)$ 这个量都是守恒的。画出 V 的图像（一个“势阱”（potential well）），便可一眼看出哪些运动是有界的、哪些会逃逸，而 b 不过是这个势阱的逃逸速率（escape speed）。同样的推理可得出真实重力下的逃逸速度，也是对非线性振子（nonlinear oscillator）作相平面分析（phase-plane analysis）的起点。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics* 详细阐述了这类能量图。

详细解答

STEP II 1999，第 10 题

力学 · 连续碰撞

STEP II 1999，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q10

关键思路

这条链上的每一次碰撞（impact）都是同一个模样：一个质量为 μ、以速率 u 运动的粒子（particle），撞上一个质量为 $q\mu$ 的静止粒子。因此，只要把第一次碰撞的计算按比例缩放，就能描述每一次碰撞。一旦知道每个粒子的最终速度，会否出现额外碰撞的问题，就归结为比较相邻粒子的最终速度；而当 $q = e$ 时，各个速度变得非常简单，能量损失不过是一个等比级数（geometric series）。

解答

第一次碰撞

把各粒子视为沿直线运动的质点（point mass），并取由 P_1 指向 P_2 的方向为正。设 v_1 和 v_2 分别为 P_1 和 P_2 刚碰撞后的速度。由动量守恒（conservation of momentum）及牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）得

$$\begin{aligned} mV &= mv_1 + qm\,v_2, \\ v_2 - v_1 &= eV. \end{aligned}$$

把 $v_2 = v_1 + eV$ 代入第一条方程，得 $V = v_1 + qv_1 + qeV$，所以

$$v_1 = \left(\frac{1-eq}{1+q}\right)V, \qquad v_2 = v_1 + eV = \frac{1-eq+e+eq}{1+q}\,V = \left(\frac{1+e}{1+q}\right)V,$$

正如所求。

每一次碰撞都是同一个模样

记

$$\alpha = \frac{1-eq}{1+q}, \qquad \beta = \frac{1+e}{1+q}.$$

上面的计算完全没有用到 m 的实际数值：一个质量为 μ、以速度 u 运动的粒子，撞上一个质量为 $q\mu$ 的静止粒子后，自己以速度 αu 离开，并使对方以速度 βu 弹出。由于每个 P_{k+1} 的质量都是 P_k 的 q 倍，所以只要 P_k 撞上 P_{k+1} 时 P_{k+1} 仍然静止，这个结果便适用。

当 $q \le e$ 时恰好有 $N-1$ 次碰撞

假设 $q \le e$。那么 $eq \le e^2 < 1$，所以 $\alpha > 0$；另外亦有 $\beta > 0$。

沿着这条链逐一追踪。P_1 撞上 P_2，碰撞后 P_1 的速度为 αV，P_2 的速度为 βV。由于 $\beta V > 0$，P_2 朝着静止的 P_3 运动并撞上它；碰撞后 P_2 的速度为 $\alpha\beta V$，P_3 的速度为 $\beta^2 V$。如此类推，P_k 以速度 $u_k = \beta^{k-1}V > 0$ 到达静止的 P_{k+1}，所以每一对相邻粒子之间都有一次碰撞：即最少有 $N-1$ 次碰撞。这些碰撞之后，各粒子的速度为

$$w_k = \alpha\beta^{k-1}V \quad (1 \le k \le N-1), \qquad w_N = \beta^{N-1}V.$$

这些速度全部为正，所以所有粒子都朝同一方向运动。

> **想一想** 我们怎样知道 P_k 永远不会再追上 P_{k+1}?

两者碰撞之后，P_k 从此以恒定速度 w_k 运动，因为它往后唯一可能接触到的只有 P_{k+1} 或 P_{k-1}。与此同时，P_{k+1} 在撞上 P_{k+2} 之前以 $u_{k+1} = \beta^k V$ 运动，之后则以 w_{k+1} 运动（若 $k+1 = N$，则永远保持前者）。P_k 与 P_{k+1} 之间的距离只有在 P_k 运动得较快时才会缩小，而：

- $u_{k+1} > w_k$，因为 $\beta^k V > \alpha\beta^{k-1}V$ 等价于 $\beta > \alpha$，即 $1+e > 1-eq$，而这是成立的；
- 对于 $k \le N-2$，有 $w_{k+1} \ge w_k$，因为 $w_{k+1}/w_k = \beta = \dfrac{1+e}{1+q} \ge 1$，而这正正是因为 $q \le e$；
- 对于 $k = N-1$，有 $w_N > w_{N-1}$，因为 $w_N/w_{N-1} = \beta/\alpha > 1$。

所以在两者碰撞之后，P_{k+1} 永远不会比 P_k 慢，两者之间的距离永不缩小。（当 $q = e$ 时我们得到 $w_{k+1} = w_k$：距离保持不变，但不会缩小至零。）这对每一对相邻粒子都成立，所以不会再有其他碰撞，碰撞次数恰好是 $N-1$ 次。

这就是 $q \le e$ 这个条件发挥作用的地方。假如 $q > e$，则 $\beta < 1$，每个粒子最终都比它后面的那个慢，这条链便会自己追上自己，产生更多碰撞。

当 $q = e$ 时损失的动能

现在 $q = e$，所以

$$\beta = \frac{1+e}{1+e} = 1, \qquad \alpha = \frac{1-e^2}{1+e} = 1-e.$$

每个粒子都是被速率为 V 的粒子撞上；碰撞之后 $P_1, \dots, P_{N-1}$ 以 $(1-e)V$ 运动，而 P_N 以 V 运动。由于 P_k 的质量为 $e^{k-1}m$，最终的动能（kinetic energy）为

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{N-1} \tfrac{1}{2} e^{k-1} m (1-e)^2 V^2 + \tfrac{1}{2} e^{N-1} m V^2 \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)^2 \cdot \frac{1-e^{N-1}}{1-e} + e^{N-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e)(1-e^{N-1}) + e^{N-1} \right], \end{aligned}$$

当中用了等比级数求和 $1 + e + \cdots + e^{N-2} = \dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$。最初的动能为 $\frac{1}{2}mV^2$，所以损失为

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} m V^2 - T &= \tfrac{1}{2} m V^2 \left[(1-e^{N-1}) - (1-e)(1-e^{N-1}) \right] \\ &= \tfrac{1}{2} m e \left(1 - e^{N-1} \right) V^2, \end{aligned}$$

这就是所求的结果。

验算

- 逐次碰撞计算。当 $q = e$ 时，P_k 撞上 P_{k+1} 这次碰撞使 P_k 的速度由 V 变为 $(1-e)V$，使 P_{k+1} 的速度由 0 变为 V，损失的动能为 $\frac{1}{2}e^{k-1}mV^2\left[1-(1-e)^2-e\right] = \frac{1}{2}m(1-e)e^kV^2$。对 $k = 1, \dots, N-1$ 求和，得 $\frac{1}{2}m(1-e)V^2 \cdot e\,\dfrac{1-e^{N-1}}{1-e}$，答案相同。
- 极限情况。当 $e \to 0$ 时，损失趋向 0；事实上，当 $q = e \to 0$ 时，后面各粒子的质量小得可以忽略。取 $N = 2$，公式给出 $\frac{1}{2}me(1-e)V^2$，与直接计算单一次碰撞的结果吻合。
- 数值检验。我们随机选取 $N \le 12$、随机的间距和随机的 $q \le e$，逐个事件地模拟整个运动，每次都恰好得到 $N-1$ 次碰撞。当 $N = 5$、$q = e = \frac{1}{2}$、$m = V = 1$ 时，模拟得出的损失为 $0.234375 = \frac{15}{64}$，与 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{16}\right)$ 一致。

常见错误

- 只检查了首 $N-1$ 次碰撞确实发生。“恰好”二字还需要论证：往后没有任何粒子会追上它前面的那一个。

- 把 P_k 的最终速度与 P_{k+1} 刚碰撞后的速度（βu_k）比较，而不是与它撞上 P_{k+2} 并减慢之后的最终速度比较。
- 弄错恢复定律中的正负号：等于 e 乘以接近速率的，是分离速率 $v_2 - v_1$。

STEP 之外

一串质量逐个把动量传递下去的粒子链，是冲击波（shock）在颗粒物料中传播的一维模型。质量稳定递减的链，例如本题中 $q < 1$ 的情况，是物理学家研究的对象，用来分散和吸收冲击。要重新整理能量的计算，有一个漂亮的方法，就是利用约化质量（reduced mass）$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$：一次碰撞损失 $\frac{1}{2}\mu(1 - e^2)w^2$，其中 w 是接近速率。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）在质心参考系（centre-of-mass frame）中讨论碰撞，在那里这类结果变得一目了然。

详细解答

STEP II 1999，第 11 题

力学 · 抛体与移动目标

STEP II 1999，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q11

关键思路

目标始终留在圆上，所以炮弹必须落在水平面上与 O 相距恰好 R 之处；而炮总可以转向，对准目标届时所在的位置。因此一切归结为同一个抛体（projectile）的两项事实：它的射程（range）和飞行时间（time of flight）。转过的角为 $\beta = \omega T$，再利用 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 消去 α，便得到那个四次方程（quartic）。最后一部分则是韦达定理（Vieta's formulas）加上圆的一条弦（chord）。

解答

我们把炮弹视为只受重力作用的质点（particle）（不计空气阻力），从圆所在水平面上的 O 点发射，其中 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$。

第 1 部分：当 $V^2 < gR$

取坐标轴分别沿地面（在发射所在的平面内）及铅垂向上。在时间 t，

$$x = Vt\cos\alpha, \qquad y = Vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

炮弹回到水平面（$y = 0$，$t > 0$）的时间为

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad \text{此时水平距离为} \qquad x(T) = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{V^2\sin 2\alpha}{g}.$$

由于 $\sin 2\alpha \le 1$，无论在哪一个铅垂面内发射，炮弹的落点与 O 的距离都不超过 V^2/g。目标始终在水平面上与 O 相距 R 之处，所以要命中就必须有 $R \le V^2/g$，即 $V^2 \ge gR$。因此若 $V^2 < gR$，炮弹永远不能击中目标，这正是所要证明的。

第 2 部分：β 所满足的方程

现设 $V^2 > gR$。炮弹在时间 T、距离 R 处击中目标，所以

$$T = \frac{2V\sin\alpha}{g}, \qquad R = \frac{2V^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

目标以恒定角速率 ω 转动，所以 $\beta = \omega T$，由此得

$$\sin\alpha = \frac{g\beta}{2V\omega}.$$

把它代入射程的方程，

$$\cos\alpha = \frac{gR}{2V^2\sin\alpha} = \frac{gR}{2V^2}\cdot\frac{2V\omega}{g\beta} = \frac{R\omega}{V\beta}.$$

于是由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 得

$$\frac{g^2\beta^2}{4V^2\omega^2} + \frac{R^2\omega^2}{V^2\beta^2} = 1,$$

全式乘以 $4V^2\omega^2\beta^2$，得

$$g^2\beta^4 - 4\omega^2V^2\beta^2 + 4R^2\omega^4 = 0,$$

这就是所求的方程。

? **想一想** 为甚么恰好有两个值，而不是最多四个，或者一个也没有?

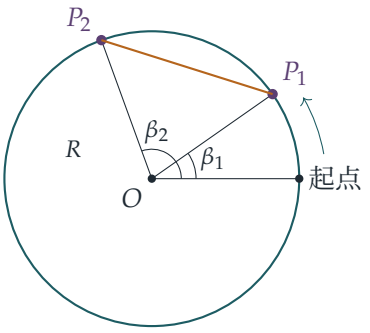
把它看成 β^2 的二次方程，其判别式（discriminant）为

$$16\omega^4V^4 - 16g^2R^2\omega^4 = 16\omega^4\left(V^4 - g^2R^2\right) > 0,$$

因为 $V^2 > gR$。所以 β^2 有两个相异的实数值。它们的和 $4\omega^2V^2/g^2$ 与积 $4R^2\omega^4/g^2$ 都是正数，所以 β^2 的两个值都是正数。角 $\beta = \omega T$ 是正数，所以 β^2 的每个值恰好对应一个 β，于是我们恰好有两个候选值 $\beta_1 < \beta_2$。

每一个候选值都确实对应一次命中。对任何一个根，$g\beta/(2V\omega)$ 和 $R\omega/(V\beta)$ 这两个数都是正数，而且（根据该方程）它们的平方和为 1，所以存在 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$，以这两个数分别作为其正弦和余弦。以这个仰角（elevation），在通过目标转过 β 后所到达之点的铅垂面内发射，飞行时间便是 β/ω，射程便是 R，所以炮弹与目标相遇。因此 β 恰好有两个可能的值。（它们对应于射程同为 R 的两个互余仰角 α 和 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$。）

第 3 部分：距离 P_1P_2



两个弹着点都在圆上，从发射一刻目标所在的位置起按逆时针方向量度，所对的角分别为 β_1 和 β_2。所以角 P_1OP_2 为 $\beta_2-\beta_1$（如有需要可按模 2π 化简，这不影响弦长），而由等腰三角形 OP_1P_2 得

$$P_1P_2 = 2R\left|\sin\frac{\beta_2-\beta_1}{2}\right|.$$

由 β^2 的二次方程，

$$\beta_1^2+\beta_2^2 = \frac{4\omega^2V^2}{g^2}, \qquad \beta_1^2\beta_2^2 = \frac{4R^2\omega^4}{g^2},$$

又因为 $\beta_1,\beta_2>0$，可以取正平方根：$\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$。因此

$$\begin{aligned}(\beta_2-\beta_1)^2 &= \beta_1^2+\beta_2^2-2\beta_1\beta_2\\ &= \frac{4\omega^2V^2}{g^2}-\frac{4R\omega^2}{g} = \frac{4\omega^2}{g^2}\left(V^2-Rg\right),\end{aligned}$$

所以 $\beta_2-\beta_1 = \dfrac{2\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}$。故此

$$P_1P_2 = 2R\sin\left(\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\right),$$

这正是所要证明的。（严格来说，这需要该正弦值非负，即 $\frac{\omega}{g}\sqrt{V^2-Rg}\le\pi$；否则距离是这个式子的绝对值。）

验算

- 当 $V^2\to gR^+$ 时，两个仰角都趋向 45°，所以 P_1 和 P_2 应该重合：公式的值确实趋向 0。
- 直接验证 $\beta_1\beta_2 = 2R\omega^2/g$：$\beta_1\beta_2 = (2V\omega/g)^2\sin\alpha_1\sin\alpha_2$，而代入 $\alpha_2 = \frac{1}{2}\pi-\alpha_1$ 后，这等于 $(2V\omega/g)^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = (4V^2\omega^2/g^2)(gR/2V^2)$，与预期相符。
- 数值上，取 $g=9.8$、$R=10$、$V=14$、$\omega=0.3$（国际单位制），逐步计算两条轨迹，得出弦长约为 5.97 m，与 $20\sin\left(0.3\sqrt{98}/9.8\right)\approx 5.969$ 吻合。

常见错误

- 忘记了炮可以对准任何一个铅垂面：第一部分只关乎射程，与目标碰巧身在何处无关。
- 对 $\beta_1^2\beta_2^2$ 开平方，却没有说明为甚么 $\beta_1\beta_2$ 是正数。
- 写成 $P_1P_2 = R(\beta_2 - \beta_1)$，这是弧长，而不是直线距离。

STEP 之外

击中移动中的目标，是一个小型的追踪（pursuit）或拦截（interception）问题：先求出命中的时间，再求出瞄准的方向。在两条方程之间消去一个参数而得到一个多项式，然后不必解它，直接从系数读出所需的资料，这种技巧你在大学里会经常用到。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种严谨的态度处理抛体和转动运动。

详细解答

STEP II 1999，第 12 题

概率与统计 · 贝叶斯定理

> **STEP II 1999，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s2-q12

关键思路

这是一道保留了参数的贝叶斯定理（Bayes' theorem）题目。只要用全概率公式（law of total probability）求出 $\mathrm{P}(S)$，两个条件概率（conditional probability）都是 p 的简单有理函数（rational function），而且各自在容许的区间上都是单调（monotonic）的。因此，每位检查员的做法中所谓的“最大值”，都落在区间 $0 \le p \le \frac{1}{3}$ 的端点上；而真正有趣的地方，在于这对单凭一次观察作估计有甚么启示。

解答

条件概率

设 A、B、C 分别为随机抽出的一块晶片由 A、B、C 制造的事件，并设 S 为该晶片完好的事件。这三个事件构成样本空间（sample space）的一个分割（partition），其中

$$\mathrm{P}(A) = 2p, \quad \mathrm{P}(B) = p, \quad \mathrm{P}(C) = 1 - 3p,$$
$$\mathrm{P}(S \mid A) = \tfrac{7}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid B) = \tfrac{8}{10}, \quad \mathrm{P}(S \mid C) = \tfrac{9}{10}.$$

根据全概率公式，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(S) &= 2p \cdot \tfrac{7}{10} + p \cdot \tfrac{8}{10} + (1 - 3p) \cdot \tfrac{9}{10} \\ &= \tfrac{1}{10}\left(14p + 8p + 9 - 27p\right) = \tfrac{1}{10}(9 - 5p).\end{aligned}$$

留意在整个 $0 \le p \le \frac{1}{3}$ 的范围内都有 $9 - 5p > 0$，所以可以用它作除数。根据贝叶斯定理，

$$\mathrm{P}(A \mid S) = \frac{\mathrm{P}(S \mid A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(S)} = \frac{\frac{14p}{10}}{\frac{9-5p}{10}} = \frac{14p}{9 - 5p},$$

同理

$$\mathrm{P}(C \mid S) = \frac{\frac{9}{10}(1-3p)}{\frac{1}{10}(9-5p)} = \frac{9(1-3p)}{9-5p} = \frac{9-27p}{9-5p}.$$

第一位检查员的估计

当 p 由 0 增加至 $\frac{1}{3}$ 时，分子 $14p$ 递增，而正的分母 $9-5p$ 递减，所以 $\mathrm{P}(A \mid S)$ 严格递增（strictly increasing）。（等价地说，它的导数是 $126/(9-5p)^2 > 0$。）因此它的最大值出现在右端点 $p = \frac{1}{3}$，其值为

$$\frac{14/3}{9-5/3} = \frac{14/3}{22/3} = \frac{7}{11}.$$

所以第一位检查员的估计是 $\hat{p} = \frac{1}{3}$。

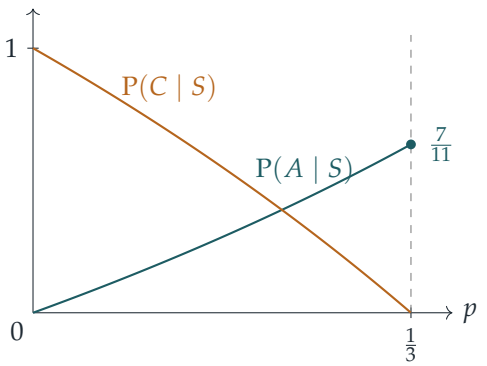
第二位检查员的估计

> ? **想一想** $\mathrm{P}(C \mid S)$ 是递增还是递减？随着 p 增大，它的分子和分母都在减小。

当分子和分母朝同一方向变化时，我们不能一眼看出答案，所以要用商法则（quotient rule）求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{9-27p}{9-5p} = \frac{-27(9-5p)+5(9-27p)}{(9-5p)^2} = \frac{-243+135p+45-135p}{(9-5p)^2} = \frac{-198}{(9-5p)^2} < 0.$$

所以 $\mathrm{P}(C \mid S)$ 在 $[0, \frac{1}{3}]$ 上严格递减，它的最大值出现在 $p = 0$，其值为 1。第二位检查员的估计是 $\hat{p} = 0$。



评论

两位检查员用的是同一个方法，各自依据的单次观察也同样有效，却得出容许范围内两个相反的极端：$\hat{p} = \frac{1}{3}$（完全没有晶片来自 C）和 $\hat{p} = 0$（所有晶片都来自 C）。每个估计其实只是“令我这块晶片的制造商尽可能常见的 p 值”，而只有一个样本时，必然会得出

这样的结果。第二个估计甚至与第一位检查员手上的晶片互相矛盾，因为 $p = 0$ 表示 A 根本不制造晶片。两个估计都不可信：一次观察所含的信息实在太少，不足以估计 p，我们需要更大的样本（连同来自每个制造商的晶片数目）。

还有一点值得留意：晶片是否完好，几乎不起任何作用。“完好且来自 A”的似然（likelihood）是 $\frac{7}{10} \cdot 2p$，它取得最大值的位置与 $2p$ 本身相同；因子 $\frac{7}{10}$ 与 p 无关。

验算

- 当 $p = 0$ 时，所有晶片都来自 C，所以 $\mathrm{P}(C \mid S)$ 应为 1，而 $\mathrm{P}(A \mid S)$ 应为 0；两条公式都与此吻合。
- 同理可得 $\mathrm{P}(B \mid S) = 8p/(9 - 5p)$，而三个条件概率之和为

$$\frac{14p + 8p + 9 - 27p}{9 - 5p} = 1.$$

- 当 $p = 0.2$ 时，公式给出 $\mathrm{P}(A \mid S) = 0.35$ 和 $\mathrm{P}(C \mid S) = 0.45$；以 400 000 块晶片进行模拟，得出 0.3505 和 0.4505。

常见错误

- 令导数等于零，然后寻找转向点（turning point）。这里根本没有转向点：两个最大值都在 $[0, \frac{1}{3}]$ 的端点上。
- 忘记 $\mathrm{P}(C \mid S)$ 需要仔细论证：分子和分母都在减小，所以单说“分子变小了”并不足够。

STEP 之外

两位检查员所做的，实际上就是最大似然估计（maximum likelihood estimation）：选出令他们所见的结果概率最大的参数值。只有一次观察时，最大似然估计值往往落在参数空间（parameter space）的边界上，这提醒我们：它需要大量数据才会表现良好。贝叶斯学派（Bayesian）的做法则是先为 p 设置一个先验分布（prior distribution），然后每观察一块晶片就更新一次，这样便不会单凭一次观察而得出如此极端的结论。Blitzstein 与 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（概率论入门教材）对这两种观点都有讨论。

详细解答

STEP II 1999，第 13 题

概率与统计 · 连续随机变量

STEP II 1999，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q13

关键思路

这道题虽然归入力学（mechanics）一类，其实是一道关于连续随机变量（continuous random variable）的题目。只要留意到较短的一段有简单的分布，一切便迎刃而解：若折断点在棒上均匀分布（uniform），则较短的一段在棒长的 $[0, \frac{1}{2}]$ 上均匀分布。比值 R 是较短一段的递增函数，所以“$R < r$”可化为只涉及较短一段的命题。由此得出分布函数（distribution function），再求导便得到密度（density）。

解答

R 的分布

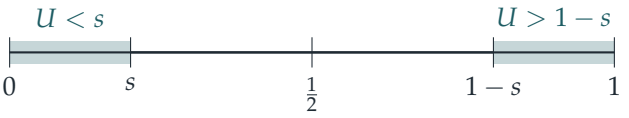
设棒长为 1；比值与所用单位无关。设折断点与其中一端的距离为 U，其中 U 在 $[0,1]$ 上均匀分布。两段的长度分别为 U 和 $1-U$，所以较短一段的长度为

$$S = \min(U, 1-U),$$

而较长一段的长度为 $1-S$。于是 $0 \le S \le \frac{1}{2}$，并且

$$R = \frac{S}{1-S}.$$

对于 $0 \le s \le \frac{1}{2}$，事件 $S < s$ 恰好在 $U < s$ 或 $U > 1-s$ 时发生。这是两个互不相交（disjoint）的区间，总长度为 $2s$，所以 $\mathrm{P}(S < s) = 2s$。换句话说，S 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上均匀分布。



现设 $0 \le r \le 1$。函数 $s \mapsto \dfrac{s}{1-s}$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上严格递增（strictly increasing）（其导数为 $1/(1-s)^2 > 0$），所以我们可以把不等式反解出来：

$$R < r \iff \frac{S}{1-S} < r \iff S < r(1-S) \iff S < \frac{r}{1+r},$$

其中两边同乘 $1-S$ 是稳妥的，因为 $1-S \ge \frac{1}{2} > 0$。当 $0 \le r \le 1$ 时，$\dfrac{r}{1+r}$ 的值落在 $[0, \frac{1}{2}]$ 之内，所以

$$\boxed{\mathrm{P}(R < r) = \frac{2r}{1+r} \qquad (0 \le r \le 1).}$$

由于较短的一段永远不会比较长的一段长，R 必定落在 $[0,1]$ 之内。所以当 $r \le 0$ 时 $\mathrm{P}(R < r) = 0$，当 $r \ge 1$ 时 $\mathrm{P}(R < r) = 1$，这与公式在 $r = 1$ 处取值 1 吻合。

想一想 为甚么不直接用 U 来做，即取 $R = U/(1-U)$?

这只在 $U \le \frac{1}{2}$ 时才正确。当 $U > \frac{1}{2}$ 时，较短的一段是 $1-U$，而 $R = (1-U)/U$。你可以分成这两种情况来处理，根据对称性，每种情况各贡献 $\frac{r}{1+r}$。改用 S 则一次过把这些细节处理妥当。

密度、平均值与方差

在 $(0,1)$ 上对分布函数 $F(r) = \dfrac{2r}{1+r} = 2 - \dfrac{2}{1+r}$ 求导，得到概率密度函数（probability density function）

$$f(r) = \frac{2}{(1+r)^2} \quad (0 \le r \le 1), \qquad f(r) = 0 \text{ 其他情况.}$$

验算一下：$\int_0^1 f(r)\,\mathrm{d}r = F(1) - F(0) = 1$。

求平均值（mean）时，写成 $r = (1+r) - 1$：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(R) &= \int_0^1 \frac{2r}{(1+r)^2}\,\mathrm{d}r = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^2}\right)\mathrm{d}r \\
&= 2\Big[\ln(1+r) + \frac{1}{1+r}\Big]_0^1 = 2\left(\ln 2 + \tfrac{1}{2} - 1\right) \\
&= 2\ln 2 - 1 \approx 0.386.
\end{aligned}$$

求二阶矩（second moment）时，写成 $r^2 = (1+r)^2 - 2(1+r) + 1$，于是

$$\frac{r^2}{(1+r)^2} = 1 - \frac{2}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}.$$

那么

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R^2) &= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2}\right) \mathrm{d}r = 2\Big[r - 2\ln(1+r) - \frac{1}{1+r}\Big]_0^1 \\ &= 2\left(1 - 2\ln 2 - \tfrac{1}{2} + 1\right) = 3 - 4\ln 2.\end{aligned}$$

因此方差（variance）为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R) &= \mathrm{E}(R^2) - \big(\mathrm{E}(R)\big)^2 = 3 - 4\ln 2 - \big(4(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 1\big) \\ &= 2 - 4(\ln 2)^2 \approx 0.0782.\end{aligned}$$

含 $\ln 2$ 的项互相抵消，剩下这个简洁的形式。

验算

- 在 $r = 1$ 处概率为 1，理应如此。在 $r = \frac{1}{2}$ 处概率为 $\frac{2}{3}$：较长一段超过较短一段的两倍，恰好是折断点落在棒两端各三分之一的范围内，而这两部分的总长度为 $\frac{2}{3}$。
- 平均值 0.386 介乎 0 与 1 之间，并且小于 $\frac{1}{2}$，这与密度由 $r = 0$ 处的 2 递减至 $r = 1$ 处的 $\frac{1}{2}$ 相符。
- 模拟 10^6 次随机折断，得到样本平均值 0.3862 及样本方差 0.0783，相比之下理论值为 $2\ln 2 - 1 = 0.38629$ 及 $2 - 4(\ln 2)^2 = 0.07819$。

常见错误

- 对所有 U 都取 $R = U/(1-U)$。这个量可以大于 1，所以它并不是较短一段与较长一段之比。
- 忘记折断点可以靠近任何一端，因而得出 $\mathrm{P}(R < r) = \frac{r}{1+r}$。
- 用较短一段的平均值 $\frac{1}{4}$ 来得出 $\mathrm{E}(R) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$。一般而言 $\mathrm{E}\big(g(S)\big) \neq g\big(\mathrm{E}(S)\big)$。

STEP 之外

这里用的是变换随机变量的标准方法，即“分布函数法”。若 $Y = g(X)$ 而 g 为递增函数，则 $F_Y(y) = F_X\big(g^{-1}(y)\big)$，求导后便得到变量代换公式（change-of-variables formula）$f_Y(y) = f_X\big(g^{-1}(y)\big)\,\big|\mathrm{d}g^{-1}/\mathrm{d}y\big|$。同一想法可以引申到顺序统计量（order statistics），以及经典的折棒问题，例如三段能构成三角形的概率。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）是研读连续随机变量变换的好去处。

详细解答

STEP II 1999，第 14 题

概率与统计 · 最优停止

STEP II 1999，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s2-q14

关键思路

骰子没有记忆。每当你决定再掷一次，你就回到同一个游戏的最开端，所以从那一刻起你所能期望的最好结果仍是同一个数 V，即整个游戏的最佳期望得分。这样一来，每次掷骰后的决定就变成一个简单的比较：如果手上的点数胜过 V 就保留，否则再掷。把这一点写下来，便得到一条关于 V 的方程，解出它就同时知道这个值和应采用的策略。

解答

设置

把掷出 1 的一掷称为强制的：游戏就此结束，得分为 1。掷出其他任何点数 $x \in \{2,3,4,5,6\}$ 之后，我们可选择停止（得分为 x）或继续。每个得分都介乎 1 与 6 之间，所以每个策略的期望得分（expected score）都在 $[1,6]$ 之内。设

$$V = \text{任何策略所能达到的最大期望得分}$$

（严格来说，是对所有策略取的最小上界（least upper bound）；我们稍后会看到它确实可以达到）。

一个得分为 4 的策略

考虑以下策略：一掷出 4、5 或 6 就停止（当然，掷出 1 时也要停止）。设 E 为其期望得分。以第一掷的结果为条件（condition）。掷出 $1,4,5,6$ 的概率（probability）各为 $\frac{1}{6}$，此时游戏结束，得分就是该点数。掷出 2 或 3 的概率为 $\frac{2}{6}$；这时我们再掷，而由于骰子没有

记忆，从那里开始的期望得分仍然是 E。所以

$$E = \tfrac{1}{6}(1+4+5+6) + \tfrac{2}{6}E \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{4}{6}E = \tfrac{16}{6} \quad\Longrightarrow\quad E = 4.$$

（游戏以概率 1 结束，因为连掷 n 次而仍未停止的机会是 $(\tfrac{1}{3})^n \to 0$。）因此 $V \geq 4$。

没有策略能胜过 4

任取一个策略；它甚至可以取决于之前所有掷骰结果的整段历史。看看它的第一掷 x。

- 若 $x = 1$，得分为 1。
- 若 $x \geq 2$ 而该策略停止，得分为 x。
- 若 $x \geq 2$ 而该策略继续，那么它此后的做法只不过是对一个全新的同样游戏所用的某个策略（先前的掷骰结果不能影响之后的结果）。所以它从这里开始的期望得分至多为 V。

在每一种情况下，已知 $x \geq 2$ 时的期望得分都至多为 $\max(x, V)$。因此每个策略的期望得分至多为

$$g(V) = \tfrac{1}{6}\Big(1 + \sum_{x=2}^{6} \max(x, V)\Big),$$

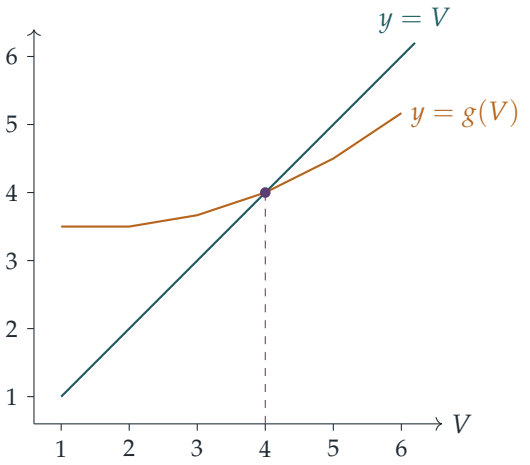
再对所有策略取最小上界，便得 $V \leq g(V)$。

? **想一想** 不等式 $V \leq g(V)$ 怎样把 V 确定下来?

考虑 $h(V) = g(V) - V$。当 V 增加时，每一项 $\max(x, V)$ 的增长率是 0 或 1，而这样的项只有五个，所以 g 的增长率至多为 $\frac{5}{6}$。因此 h 是严格递减（strictly decreasing）的。在 $V = 4$ 时，

$$g(4) = \tfrac{1}{6}(1+4+4+4+4+5+6) = \tfrac{24}{6} = 4,$$

所以 $h(4) = 0$，而对每个 $V > 4$ 都有 $h(V) < 0$。由于 $h(V) \geq 0$，必定有 $V \leq 4$。



结论

综合以上两部分，$V=4$：最佳的期望得分是 4，而做法是掷出 4、5 或 6 时停止，掷出 2 或 3 时再掷。这正是“若掷出的点数不小于 V 就停止”这条规则：2 或 3 比继续下去所期望的 4 差，而 5 或 6 则较好。

掷出 4 是打和的情况。掷出 4 时停止得 4 分，继续下去的期望得分也是 4。所以“只在 5 或 6 时停止”同样好：用同样的条件论证，

$$E' = \tfrac{1}{6}(1+5+6) + \tfrac{3}{6}E' \quad \Longrightarrow \quad E' = 4.$$

其他任何规则都严格地较差；例如掷出 3 或以上就停止，得 $\frac{1+3+4+5+6}{5} = \frac{19}{5}$，而只在 6 时停止，得 $\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$。

验算

对于任何形如“掷出 1 及集合 S 内的点数时停止”的规则，有一条巧妙的捷径：每一掷令游戏结束的概率都相同，而结束时的点数等可能地是 $\{1\} \cup S$ 中的任何一个，所以期望得分就是这些点数的平均值。对 $S=\{4,5,6\}$，它是 $\frac{16}{4}=4$；对 $S=\{5,6\}$，它是 $\frac{12}{3}=4$。我们精确地检查了全部 32 条这样的规则：只有这两条得出 4，次佳的是 $\frac{19}{5}$。模拟 400 000 局游戏，采用掷出 4 或以上就停止的规则，所得平均值为 3.998。

常见错误

- 把一掷的平均值 3.5 当作继续下去的价值。继续的价值高于 3.5，因为你保留了再掷的选择权，所以“掷出 4 或以上就停止”不能靠与 3.5 比较来证明。

- 忘记了掷出 1 是强制的，于是把继续的价值写成仿佛可以毫无风险地一直掷下去。
- 只检查阈值策略（threshold strategy），却没有解释为何更巧妙、取决于历史的规则不能做得更好。上面的无记忆性（memorylessness）论证涵盖了所有策略。

STEP 之外

这是最优停止（optimal stopping）的一个小例子，而方程 $V = g(V)$ 是一条贝尔曼方程（Bellman equation），它是动态规划（dynamic programming）和马可夫决策过程（Markov decision process）的基本工具。同样的推理可用来为金融中的美式期权（American option）定价，也可解决著名的秘书问题（secretary problem）。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction* 涵盖了这里所用的条件论证，而 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability* 则有许多同类型的题目。

详细解答

STEP III 1999，第 1 题

纯数学 · 三次方程的根

STEP III 1999，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q1

关键思路

这里的一切都源自韦达定理（Vieta's formulas）：对于三次方程（cubic）$x^3 - px^2 + qx - r = 0$，设其根（roots）为 α, β, γ，则

$$\alpha + \beta + \gamma = p, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \qquad \alpha\beta\gamma = r.$$

等比数列（geometric progression）是以*乘法*的方式围绕中间项对称的，所以根之积 r 和比值 q/p 能把中间的根找出来。等差数列（arithmetic progression）则是以*加法*的方式围绕中间项对称的，所以改由根之和 p 把中间的根找出来。

解答

第 (i) 部分

设三个根为 a/k、a 和 ak。要使 a/k 有意义，必须有 $k \neq 0$；又因为根之积为 $r \neq 0$，所以亦有 $a \neq 0$。由韦达定理得

$$\begin{aligned} p &= \frac{a}{k} + a + ak = a\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ q &= \frac{a}{k} \cdot a + a \cdot ak + \frac{a}{k} \cdot ak = a^2\left(\frac{1}{k} + 1 + k\right), \\ r &= \frac{a}{k} \cdot a \cdot ak = a^3. \end{aligned}$$

p 和 q 中出现了同一个括号。由于 $p \neq 0$，这个括号不等于零，所以可以相除：

$$\frac{q}{p} = a.$$

因此 q/p 是其中一个根（即中间的那个）。于是 $q = ap$，从而

$$q^3 = a^3p^3 = rp^3, \qquad \text{即} \qquad q^3 - rp^3 = 0,$$

这正是所要证明的。

第 (ii) 部分

现在假设 $r = q^3/p^3$，并记 $a = q/p$，于是 $r = a^3$。把 $x = a$ 代入三次方程，并利用 $p\,a^2 = q^2/p = q\,a$，得

$$a^3 - pa^2 + qa - r = a^3 - qa + qa - a^3 = 0,$$

所以 q/p 是一个根。

由于 $r \neq 0$，可知 $q \neq 0$，因此 $a \neq 0$。把另外两个根称为 β 和 γ。三个根之积为 r，所以

$$a\beta\gamma = r = a^3 \quad \Longrightarrow \quad \beta\gamma = a^2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2,$$

这里两边除以了 $a \neq 0$。

> **想一想** 怎样把 $\beta\gamma = a^2$ 化成 a/k、a、ak 的形式?

我们需要选定 k。由于 $\beta\gamma = a^2 \neq 0$，β 和 γ 都不是零。定义 $k = \gamma/a$，于是 $\gamma = ak$ 且 $k \neq 0$。那么

$$\beta = \frac{a^2}{\gamma} = \frac{a^2}{ak} = \frac{a}{k}.$$

所以三个根是 a/k、a 和 ak，每一个都是由前一个乘以 k 而得。它们成等比数列。（当 β 和 γ 不是实数时，公比 k 可能是复数。这个论证并不要求它们是实数。）

综合第 (i) 和第 (ii) 部分可知：当 $p \neq 0$ 且 $r \neq 0$ 时，三个根成等比数列，当且仅当（if and only if）$q^3 = rp^3$。

第 (iii) 部分

必要性。设三个根为 $b - d$、b 和 $b + d$。它们的和是 $3b = p$，所以中间的根是 $b = p/3$。把 $x = p/3$ 代入三次方程，再乘以 27：

$$p^3 - 3p^3 + 9pq - 27r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2p^3 - 9pq + 27r = 0.$$

充分性。反过来，假设 $2p^3 - 9pq + 27r = 0$。把上面的步骤倒过来，可知 $p/3$ 是一个根。于是另外两个根之和为 $p - p/3 = 2p/3$，所以可以把它们写成 $p/3 - d$ 和 $p/3 + d$，其中 d 是某个数（可能是复数）。三个根 $p/3 - d$、$p/3$、$p/3 + d$ 成等差数列。

因此，充分必要条件（necessary and sufficient condition）是

$$\boxed{2p^3 - 9pq + 27r = 0}.$$

验算

- 根为 $1, 2, 4$（等比数列）时，$p = 7$，$q = 14$，$r = 8$。这时 $q/p = 2$ 正是中间的根，而且 $q^3 = 2744 = 8 \cdot 343 = rp^3$。
- 根为 $1, 2, 3$（等差数列）时，$p = 6$，$q = 11$，$r = 6$，而 $2 \cdot 216 - 9 \cdot 66 + 27 \cdot 6 = 432 - 594 + 162 = 0$。等比数列 $1, 2, 4$ 则给出 $686 - 882 + 216 = 20 \neq 0$，这也合乎预期。
- 我们亦用数千个随机三次方程（包括有复数根的）对全部三个部分作了数值检验。所有结果都在 10^{-11} 的误差范围内吻合。

常见错误

- 除以 $1/k + 1 + k$ 却没有说明它为何不等于零。它不等于零，是因为它等于 p/a，而 $p \neq 0$。
- 在第 (ii) 部分，只证明了 q/p 是一个根以及 $\beta\gamma = (q/p)^2$，然后没有具体写出公比（common ratio），就断言三个根成等比数列。
- 在第 (iii) 部分，只证明了一个方向。“充分必要”需要两个方向都证明。

STEP 之外

韦达定理说明，多项式的系数就是其根的*基本对称函数*（elementary symmetric functions）。有一个经典定理指出，根的每一个对称多项式（symmetric polynomial）都可以用这些基本对称函数表示出来。这正是伽罗瓦理论（Galois theory）的起点，该理论解释了多项式的根在甚么情况下可以用根式（radicals）求出。顺带一提，代换 $x = y + p/3$ 可以消去三次方程中的 x^2 项，而所得的缺项三次方程（depressed cubic）的常数项是 $2p^3 - 9pq + 27r$ 的倍数。想知道这些想法会通往何处，Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是个很好的入门读物。

详细解答

STEP III 1999，第 2 题

纯数学 · 实根的计数

STEP III 1999，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q2

关键思路

在第 (i) 部分，导数（derivative）可以分解为一个完全平方（perfect square）乘以 e^x，所以函数永不递减，而事实上它是严格递增（strictly increasing）的。在第 (ii) 部分，新函数的导数恰好在 $(1+x^2)e^x = k$ 时为零，而这正是第 (i) 部分的方程。由此可知，新函数只有一个转向点（turning point），而且是极小点（minimum）。之后，一切都取决于 $x \to -\infty$ 时的情况，此时 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$。$2/\pi$ 这个数就是由此而来。

解答

第 (i) 部分

由积法则（product rule），

$$f'(x) = 2x\,e^x + (1+x^2)e^x = e^x\left(x^2+2x+1\right) = e^x(1+x)^2.$$

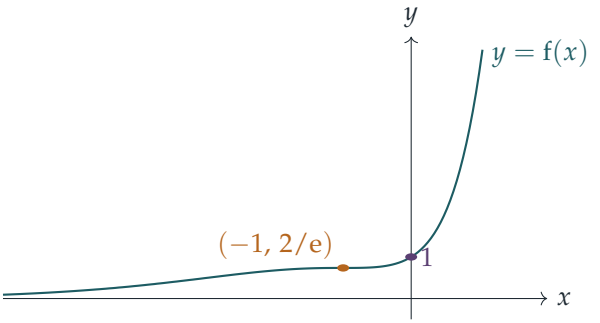
由于 $e^x > 0$ 且 $(1+x)^2 \geq 0$，对所有 x 都有 $f'(x) \geq 0$，正如所求。等号只在 $x = -1$ 时成立。

想一想 $f'(-1) = 0$，那么 f 真的是严格递增吗?

是的。若 $a < b$，则 $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$，而被积函数（integrand）连续（continuous）、非负，并且在 $[a,b]$ 上最多只有一点为零，所以这个积分严格为正。单单一个驻点（stationary point）并不能阻止函数递增。这里 $x = -1$ 是一个驻拐点（stationary point of inflection）：f' 在它的两侧都是正的。

要画出略图，我们需要：

- 对所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) > 0$，因为两个因子都是正的；
- $\mathrm{f}(0) = 1$，而拐点是 $(-1, 2/\mathrm{e}) \approx (-1, 0.74)$；
- 当 $x \to \infty$ 时，$\mathrm{f}(x) \to \infty$；
- 当 $x \to -\infty$ 时，$\mathrm{f}(x) \to 0$，因为 e^x 衰减的速度比任何多项式增长的速度都快（$x^2\mathrm{e}^x \to 0$）。所以负 x 轴是一条渐近线（asymptote）。



现在 f 连续且严格递增，并且当 $x \to -\infty$ 时 $\mathrm{f}(x) \to 0$，当 $x \to \infty$ 时 $\mathrm{f}(x) \to \infty$。所以它取遍 $(0, \infty)$ 内的每一个值（介值定理（intermediate value theorem）），而且每个值恰好取一次（严格递增）。它永远不会取 ≤ 0 的值，因为 $\mathrm{f} > 0$。因此 $(1 + x^2)\mathrm{e}^x = k$ 在 $k > 0$ 时恰有一个实根（real root），在 $k \leq 0$ 时没有实根。 ■

第 (ii) 部分

设

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{e}^x - 1 - k \tan^{-1} x.$$

立即可见 $\mathrm{g}(0) = 1 - 1 - 0 = 0$，所以 $x = 0$ 永远是一个根。其次，

$$\mathrm{g}'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{k}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)\mathrm{e}^x - k}{1 + x^2} = \frac{\mathrm{f}(x) - k}{1 + x^2}.$$

两种情况下都有 $k > 0$，所以由第 (i) 部分，恰有一个数 a 满足 $\mathrm{f}(a) = k$。因为 f 严格递增，当 $x < a$ 时 $\mathrm{f}(x) < k$，当 $x > a$ 时 $\mathrm{f}(x) > k$。因此

$$\mathrm{g}'(x) < 0 \text{ 对于} x < a, \qquad \mathrm{g}'(x) > 0 \text{ 对于} x > a.$$

所以 g 在 $(-\infty, a]$ 上严格递减（strictly decreasing），在 $[a, \infty)$ 上严格递增，并在 $x = a$ 处有唯一的极小点。特别地，g 在 a 的每一侧最多只有一个根，所以总共最多有两个根。

a 在哪里？ 两种情况下都有 $k < 1 = \mathrm{f}(0)$，所以 $\mathrm{f}(a) = k < \mathrm{f}(0)$，由此得 $a < 0$。于是 $x = 0$ 位于递增的一段 $[a, \infty)$ 内。它是该处唯一的根，并且

$$\mathrm{g}(a) < \mathrm{g}(0) = 0.$$

余下要判断的，是 g 在 $(-\infty, a)$ 内是否还有一个根。

$x \to -\infty$ 时的表现。 由于 $\mathrm{e}^x \to 0$ 且 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$，

$$\mathrm{g}(x) \to -1 + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\left(k - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{当} x \to -\infty.$$

把这个极限（limit）记作 L。因为 g 在 $(-\infty, a]$ 上严格递减，g 在该处的每一个值都严格小于 L。要看出这一点，取 $x \le a$ 和任意 $x' < x$。每一个 $y < x'$ 都满足 $\mathrm{g}(y) > \mathrm{g}(x')$，所以令 $y \to -\infty$ 可得 $L \ge \mathrm{g}(x')$。因此 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x') \le L$。

(a) $0 < k \le 2/\pi$。这时 $L \le 0$，所以对每一个 $x \le a$ 都有 $\mathrm{g}(x) < L \le 0$。在 a 的左方没有根，故方程**恰有一个实根**，就是 $x = 0$。

(b) $2/\pi < k < 1$。这时 $L > 0$，所以对所有足够负的 x 都有 $\mathrm{g}(x) > 0$，而 $\mathrm{g}(a) < 0$。由介值定理，在 $(-\infty, a)$ 内有一个根，而且因为 g 严格递减，它是该处唯一的根。连同 $x = 0$，方程**恰有两个实根**：一个负根（小于 a）和 $x = 0$。

> ? **想一想** 为甚么边界情况 $k = 2/\pi$ 归入 (a)?

当 $k = 2/\pi$ 时，左方的极限恰好是 $L = 0$。递减的一支从下方趋近 0，但永远不会到达，所以不会出现第二个根。这一点正是靠严格单调性（strict monotonicity）来决定的。

验算

- 在随机选取的点上以数值方法对 f 求导，结果与 $\mathrm{e}^x(1+x)^2$ 吻合，而且 $\mathrm{f}(-1) = 2/\mathrm{e} \approx 0.736$。
- 我们在 $[-200, 10]$ 上用细密的格点数算 g 的变号次数。当 $k = 0.05, 0.3, 0.5, 0.6$ 和 $2/\pi \approx 0.6366$ 时有一个根，当 $k = 0.65, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ 时有两个根。当 $k = 0.65$ 时，负根离得很远（在 $x \approx -31$ 附近），因为 $L = 0.65 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.021$ 非常小。
- 当 $k = 0.7$ 时，极小点是 $a \approx -1.81$，而当 $k \to 1^-$ 时 $a \to 0^-$。这是吻合的：在 $k = 1$ 时，$\mathrm{g}'(0) = 0$，$x = 0$ 成为二重根（double root）。

常见错误

- 忘记了 $x = 0$ 永远是一个根，于是只数算由 $-\infty$ 处变号而来的根。
- 以为当 $x \to -\infty$ 时 $\tan^{-1} x \to -\infty$。其实它是有界（bounded）的，趋向 $-\frac{\pi}{2}$。

► 由 $\mathrm{f}'(-1) = 0$ 断定 f 在 $x = -1$ 处有转向点。

STEP 之外

这里的论证是实分析（real analysis）中一种标准技巧的典范：在某区间上严格单调的连续函数在该区间内最多只有一个零点（zero），而介值定理（配合无穷远处的极限使用）则告诉我们它何时确有一个零点。先找出函数的转向点，再检查函数在转向点和两端的正负号，从而数算根的数目，这正是罗尔定理（Rolle's theorem）及其推论背后的想法。Abbott 的 *Understanding Analysis* 严谨地阐述了连续性、介值定理和均值定理（mean value theorem）。

详细解答

STEP III 1999，第 3 题

纯数学 · 黎曼和与极限

> **STEP III 1999，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q3

关键思路

算式 $\frac{1}{n}\sum f(1+m/n)$ 是竖立在 $[1,2]$ 上的 n 个阔度为 $\frac{1}{n}$ 的幼长矩形的总面积；矩形愈来愈幼时，它们便恰好填满曲线下的面积。另外两个极限（limit）其实是同一幅图画的变相：要做的就是抽出因子 $\frac{1}{n}$，再把每一项写成只含 m/n 的函数。

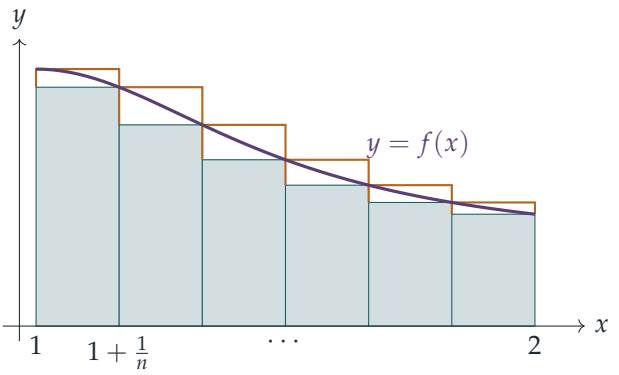
解答

极限公式

把 $[1,2]$ 分成 n 条阔度为 $\frac{1}{n}$ 的长条；第 m 条是 $\left[1+\frac{m-1}{n},\,1+\frac{m}{n}\right]$。在这长条上竖立一个矩形，其高度取 f 在长条右端的值 $f(1+m/n)$。它的面积是 $\frac{1}{n}f(1+m/n)$，所以

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n)$$

就是这些矩形的总面积。



草图所示的是一个递减的 f。着色（蓝绿色）的矩形以右端的函数值为高，因此位于曲线之下；顶上的琥珀色梯级则显示改用左端的函数值为高时所得的矩形，它们位于曲线之上。因此

$$S_n \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; S_n + (\text{琥珀色部分的总面积}).$$

现在把所有琥珀色部分横向平移，叠成阔度为 $\frac{1}{n}$ 的单独一列：由于各段高度逐项相消（telescope），它们叠起来的总高度是 $f(1)-f(2)$。所以

$$0 \;\le\; \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - S_n \;\le\; \frac{f(1)-f(2)}{n} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{当} n\to\infty,$$

于是 $S_n \to \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$。递增的 f 可用同样方法处理，只是不等号的方向相反；而任何合理的函数（例如连续而且分段单调（piecewise monotonic）的函数）都可以切成有限多个单调的部分，每部分所带来的误差都是 $\frac{1}{n}$ 的量级。这就说明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(1+m/n) = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

极限 $\ln 2$

? **想一想** 怎样才能令 $\dfrac{1}{n+m}$ 看起来像 $\dfrac{1}{n}f(1+m/n)$?

从分母抽出因子 n：

$$\frac{1}{n+m} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+m/n} = \frac{1}{n}f(1+m/n) \qquad \text{其中} f(x)=\frac{1}{x}.$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{1+m/n}\\ &= \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2-\ln 1 = \ln 2,\end{aligned}$$

正如所求。（这里 f 是递减的，所以草图的论证完全适用；它甚至告诉我们，这个和介乎 $\ln 2 - \frac{1}{2n}$ 与 $\ln 2$ 之间。）

最后一个极限

第 m 项是 $\dfrac{n}{n^2+m^2}$，其中 $m = 1, \ldots, n$。把分子和分母同时除以 n^2：

$$\frac{n}{n^2+m^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+(m/n)^2}.$$

公式是在 $x = 1 + m/n$ 处计算 f 的值，要与它吻合，便需要 $f(x) = \dfrac{1}{1+(x-1)^2}$，因为这样就有 $f(1+m/n) = \dfrac{1}{1+(m/n)^2}$。这个 f 在 $[1,2]$ 上是递减的。因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{n}{n^2+m^2} &= \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+(x-1)^2} = \Big[\tan^{-1}(x-1)\Big]_1^2 \\ &= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

（另一个等价的做法是代入 $u = x - 1$，得出 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$。）

验算

这些和可以直接计算。取 $n = 1000$，第二个和是 0.69290，而 $\ln 2 \approx 0.69315$；第三个和是 0.78515，而 $\pi/4 \approx 0.78540$。两者的差距都约为 $\frac{1}{4000}$，在草图所给出的界 $\frac{f(1)-f(2)}{n} = \frac{1}{2000}$ 之内。两个和也都略低于极限；对于递减的 f 并以右端的函数值为高，结果正应如此。

常见错误

- 把第三个极限写成 $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$：公式是在 $1 + m/n$ 处而不是在 m/n 处计算 f 的值，所以那个 1 的平移必须放进 f 里面。
- 忘记最后一项（$m = n$）是 $\frac{n}{2n^2}$，它对应 $\frac{1}{n} f(2)$：求和的范围是全部 n 个右端点，而不是 $n+1$ 个点。

STEP 之外

这些都是黎曼和（Riemann sum），而草图的论证正是黎曼积分（Riemann integral）定义的雏形：当上和（upper sum）与下和（lower sum）可以夹迫到一起时，函数便是可积（integrable）的，而闭区间上的每个连续函数都具有这个性质。同一个想法也可以倒

过来用，把和化为积分来估算，例如用于证明 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本数学分析入门书）中有一章讲黎曼积分，写得十分易读。

详细解答

STEP III 1999，第 4 题

纯数学 · 欧拉公式与多面体

> **STEP III 1999，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 7.9 节只有五种柏拉图立体中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/platonic-solids.html

关键思路

用两种不同的方法数棱（edge）：一次逐个面（face）去数，一次逐个顶点（vertex）去数。每种数法都把 E 用 F（或 V）表示出来，代入欧拉公式（Euler's formula）后，便只剩下一条关于 F 的方程。之后整个分类只取决于一项观察：F 是正数，所以 h 必须是正数，于是只剩下寥寥几组整数对 (m, n)。

解答

推导 F 的公式

每个面都是 m 边形，所以有 m 条棱。逐个面去数它的棱，总数是 mF。但每条棱恰好是两个面之间的边界，所以这样数会把每条棱数了两次：

$$mF = 2E.$$

同样地，每个顶点有 n 条棱相交，所以逐个顶点去数棱，总数是 nV。每条棱恰好有两个端点，所以这样数也把每条棱数了两次：

$$nV = 2E.$$

因此 $E = \frac{1}{2}mF$，而 $V = \frac{2E}{n} = \frac{mF}{n}$。代入 $V - E + F = 2$ 得

$$\frac{mF}{n} - \frac{mF}{2} + F = 2$$
$$F(2m - mn + 2n) = 4n \qquad \text{（两边乘以 } 2n\text{）.}$$

现在把题目给出的 h 展开：

$$4 - (n-2)(m-2) = 4 - (mn - 2m - 2n + 4) = 2m + 2n - mn,$$

这正好就是括号内的式子。所以 $Fh = 4n$。这里 F 和 n 都是正数，所以 $h \neq 0$，可以相除：

$$F = \frac{4n}{h}, \qquad h = 4 - (n-2)(m-2),$$

这就是所要证明的结果。

只有五种正多面体

> **想一想** 有哪些对 m 和 n 的限制是来自几何，而不是来自公式?

多边形最少有三条边，所以 $m \geq 3$。在立体的一个顶点处，最少要有三个面相交：只有两个面在一个角上相交，得到的只是一块扁平的折片，而不是立体的一个角。所以同样有 $n \geq 3$。于是 $m - 2 \geq 1$ 及 $n - 2 \geq 1$。

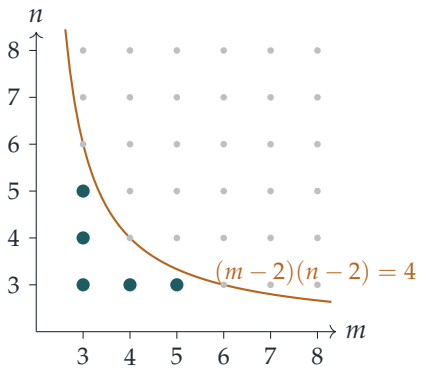
由于 $F > 0$ 及 $4n > 0$，公式迫使 $h > 0$，即

$$(m-2)(n-2) < 4.$$

因此两个正整数 $m-2$ 与 $n-2$ 的积是 1、2 或 3，所以 $h = 3$、2 或 1。仅有的因数分解（factorisation）是

- $(m-2)(n-2) = 1$：$m = n = 3$，所以 $h = 3$；
- $(m-2)(n-2) = 2$：$(m,n) = (3,4)$ 或 $(4,3)$，所以 $h = 2$；
- $(m-2)(n-2) = 3$：$(m,n) = (3,5)$ 或 $(5,3)$，所以 $h = 1$。

下图显示的是同一回事：满足 $m, n \geq 3$ 并严格位于双曲线（hyperbola）$(m-2)(n-2) = 4$ 以内的格点（lattice point）。



对每一组数对，$F = 4n/h$、$E = \frac{1}{2}mF$ 及 $V = mF/n$：

	m	n	h	V	E	F
正四面体（tetrahedron）	3	3	3	4	6	4
正八面体（octahedron）	3	4	2	6	12	8
正方体（cube）	4	3	2	8	12	6
正二十面体（icosahedron）	3	5	1	12	30	20
正十二面体（dodecahedron）	5	3	1	20	30	12

例如，对正二十面体，$F = 4 \cdot 5/1 = 20$、$E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 20 = 30$ 及 $V = 3 \cdot 20/5 = 12$。

所以 (m, n) 最多只有五种可能的组合。每一种都确实存在，表中列出的五种为人熟悉的柏拉图立体（Platonic solid）就是例证。所以正多面体（regular polyhedron）恰好有五种。

验算

- 每一行都满足 $V - E + F = 2$。对正十二面体，$20 - 30 + 12 = 2$。
- 正方体给出 $V = 8$、$E = 12$、$F = 6$，你可以拿一粒骰子来数一数。
- 把 m 和 n 对调，V 和 F 便会对调，而 E 保持不变（正方体与正八面体、正十二面体与正二十面体）。这就是对偶性（duality）：在每个面的中心放一个顶点。
- 一项独立的验算：每个顶点的角亏（angle deficit）$2\pi - n\pi(m-2)/m$ 必须是正数，而全部 V 个顶点的角亏总和是 4π（笛卡儿定理，Descartes' theorem）。五种立体全都符合，而用电脑搜索 $3 \le m, n < 200$ 的范围，也找不到其他满足 $h > 0$ 的数对。

常见错误

- 数棱时忘记了因子 2：每条棱属于两个面，并有两个端点。
- 没有说明为甚么 $n \geq 3$。少了这个条件，$n = 2$ 时对每个 m 都有 $h = 4$，于是会出现无限多个“解”。
- 单凭数算就下结论说“恰好五种”。这个论证只说明最多有五种；你还需要实际的立体，才能说明每种情况都存在。

STEP 之外

欧拉公式是拓扑学（topology）的起点。无论用哪种方法把一个曲面分割成面，$V - E + F$ 这个数（即欧拉示性数（Euler characteristic））都是一样的，所以球面是 2，环面（torus）是 0，如此类推。在环面上重复这个论证，会得到无限多种“正则”的铺砌（tiling），例如正方形网格。这五种立体的对称群（symmetry group），也是群论（group theory）入门课程中的核心例子。想读一本生动有趣的介绍，可看 Richeson 的 *Euler's Gem*；Armstrong 的 *Basic Topology* 则把这些想法再推进一步。

详细解答

STEP III 1999，第 5 题

纯数学 · 斐波那契恒等式与数学归纳法

> **STEP III 1999，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q5

关键思路

这其实是斐波那契数列（Fibonacci sequence），只是下标移了一位，使得 $u_n = F_{n+1}$。要证第一个恒等式（identity），可把 u_{n+2} 和 u_{n-1} 都用中间的一对 u_{n+1}、u_n 表示：交叉项随即互相抵消。至于倍增公式（doubling formulae），应以归纳法（induction）把两个命题一并证明，因为两者通过递推关系（recurrence）互相支援。第一个恒等式正是完成奇数情况所需的工具。

解答

第一个恒等式

固定 $n \geq 1$，使得 u_{n-1}、u_n、u_{n+1}、u_{n+2} 全部有定义。由递推关系可得

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad 及 \qquad u_{n-1} = u_{n+1} - u_n,$$

其中第二式来自 $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$。两式分别平方后相加，

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 + u_{n-1}^2 &= \left(u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}u_n + u_n^2\right) + \left(u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}u_n + u_n^2\right) \\ &= 2\left(u_{n+1}^2 + u_n^2\right), \end{aligned}$$

这就是所求的恒等式。

倍增公式

以 $P(n)$ 表示以下两式同时成立的命题：

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \qquad 及 \qquad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

数列的首几项为 $u_0, u_1, \cdots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$。

基础情况。当 $n = 1$ 时：$u_2 = 2 = 1^2 + 1^2 = u_1^2 + u_0^2$，而 $u_3 = 3 = 2^2 - 1^2 = u_2^2 - u_0^2$。所以 $P(1)$ 成立。

> **想一想** 为甚么要把两条公式一并证明，而不是逐条证明?

要由递推关系求得 u_{2n+2}，我们需要 u_{2n+1} 和 u_{2n}，所以 $n+1$ 时的偶数项公式需要用到 n 时的两条公式。其后 $n+1$ 时的奇数项公式又需要用到 $n+1$ 时的偶数项公式。两个命题都无法单独向前推进。

归纳步骤。假设 $P(n)$ 对某个 $n \geq 1$ 成立。

偶数项。先用递推关系，再用 $P(n)$，

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n+1} + u_{2n} \\ &= (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) \\ &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \end{aligned}$$

这就是把 n 换成 $n+1$ 后的偶数项公式。

奇数项。利用递推关系、刚证得的一式以及 $P(n)$，

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) \\ &= 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

我们希望这等于 $u_{n+2}^2 - u_n^2$，而第一个恒等式正好在这里派上用场。由于 $n \geq 1$，该恒等式给出 $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 2u_n^2 - u_{n-1}^2$，所以

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n+3}.$$

这就是把 n 换成 $n+1$ 后的奇数项公式，因为 $2(n+1)+1 = 2n+3$，而 $(n+1) \pm 1 = n+2,\ n$。

因此 $P(n)$ 蕴涵 $P(n+1)$。连同基础情况，由归纳法可知 $P(n)$ 对所有正整数 n 成立。

验算

试取 $n = 5$: $u_{10} = 89$, 而 $u_5^2 + u_4^2 = 64 + 25 = 89$; $u_{11} = 144$, 而 $u_6^2 - u_4^2 = 169 - 25 = 144$。我们以精确的整数运算,对所有 $n \leq 299$ 验证了第一个恒等式,并对所有 $n \leq 189$ 验证了两条倍增公式。另外留意 $u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_{n+1} + u_{n-1})$, 这是奇数项另一个方便好用的形式。

常见错误

- 只对偶数项公式作归纳：归纳步骤需要 u_{2n+1}，于是无法继续。
- 在 $n = 0$ 时使用第一个恒等式，但此时 u_{-1} 并无定义。在归纳步骤中，我们只在 $n \geq 1$ 时使用它。
- 忘记这里的下标与惯常的斐波那契数相比移了一位（$u_0 = u_1 = 1$），以致用错误的数值验证基础情况。

STEP 之外

倍增公式让你只需大约 $\log_2 N$ 步便可算出 u_N，方法是把 N 反复减半：这就是“快速倍增”（fast doubling）法，与快速幂（fast exponentiation）算法一脉相承。它背后是矩阵恒等式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$，把这个矩阵平方，便可一次过得出两条公式。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）通过这个矩阵的幂和特征值（eigenvalues）来处理斐波那契数；而在 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（数论入门）中，讲连分数（continued fractions）的一章会再次遇上相邻斐波那契数之比，它们正是黄金比（golden ratio）的渐近分数（convergents）。

详细解答

STEP III 1999，第 6 题

纯数学 · 参数曲线与面积

STEP III 1999，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q6

关键思路

方程其实是说 $\left(x^{1/n}\right)^2+\left(y^{1/n}\right)^2=\left(a^{1/n}\right)^2$，这是一个乔装了的圆。所以，像处理圆那样，设 $x^{1/n}=a^{1/n}\cos t$ 及 $y^{1/n}=a^{1/n}\sin t$，然后取 n 次方。正因为 n 是奇数，我们才可以取负数的实 n 次方根，所以曲线遍布全部四个象限。

解答

参数化

因为 n 是奇数，每个实数 x 都恰好有一个实 n 次方根 $x^{1/n}$，其正负号与 x 相同，而 $x^{2/n}$ 的意思就是 $\left(x^{1/n}\right)^2$。设 $X=x^{1/n}$、$Y=y^{1/n}$ 及 $R=a^{1/n}>0$，方程 $(*)$ 变成

$$X^2+Y^2=R^2,$$

这是一个半径为 R 的圆，我们以 $X=R\cos t$、$Y=R\sin t$ 把它参数化（parametrise）。取 n 次方（由于 n 是奇数，这是 $\mathbb{R}$ 上的一个双射（bijection））便得

$$\boxed{x=a\cos^n t,\qquad y=a\sin^n t,\qquad 0\le t\le 2\pi.}$$

曲线上每一点都可以这样得出，因为圆上每一点 (X,Y) 都可以这样得出。

? **想一想** 为甚么这是逆时针方向，而不仅仅是“某种”绕行曲线的方式?

映射 $(X,Y)\mapsto(X^n,Y^n)$ 保持每个坐标的正负号不变，所以它把每个象限映到自身。当 t 由 0 增至 2π 时，点 $(R\cos t,R\sin t)$ 沿逆时针方向绕圆一周，依次经过正 x 轴、第一象限、正 y 轴、第二象限，如此类推。它的像 (x,y) 以相同的次序经过相同的轴和象限，所

以也是沿逆时针方向绕原点一周。（例如在第一象限内，$x = a\cos^n t$ 由 a 递减至 0，而 $y = a\sin^n t$ 则由 0 递增至 a。）当 $n = 1$ 时，这就是我们熟悉的圆 $x = a\cos t$、$y = a\sin t$。

$n = 3$ 时的草图

现在 $x = a\cos^3 t$、$y = a\sin^3 t$，而曲线是 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$。

对称性。方程在 $x \mapsto -x$、$y \mapsto -y$ 以及 x 与 y 互换之下都保持不变。所以曲线对两条坐标轴以及直线 $y = \pm x$ 都对称，我们只需研究第一象限，即 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$。

截距。当 $t = 0$ 时，我们位于 $(a, 0)$；当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时，位于 $(0, a)$。根据对称性，曲线只在 $(\pm a, 0)$ 和 $(0, \pm a)$ 与坐标轴相交。在直线 $y = x$ 上（即 $t = \frac{\pi}{4}$ 时），我们位于 $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$，沿每条轴的方向只走了约 $0.35a$。

斜率。我们有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

所以当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t.$$

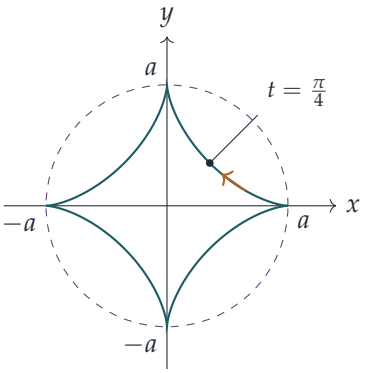
当 $t \to 0$ 时，这个值趋向 0；当 $t \to \frac{\pi}{2}$ 时，它趋向 $-\infty$。所以曲线到达 $(a, 0)$ 时与 x 轴相切，到达 $(0, a)$ 时与 y 轴相切。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 在 $t = 0$ 和 $t = \frac{\pi}{2}$ 时都等于零。第一象限的弧与由第四象限反射而来的弧在 $(a, 0)$ 相遇，而且两者在该处都与 x 轴相切，所以两段弧会合成一个尖点。曲线在 $(\pm a, 0)$、$(0, \pm a)$ 这四点有尖点（cusp）。

凹凸性。把 $-\tan t$ 对 x 求导，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t} > 0 \quad \text{当} 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

所以第一象限的弧是凸（convex）的：它向原点弯入，而不像圆那样向外弯。它位于其弦 $x + y = a$ 的下方。事实上 $\cos^3 t + \sin^3 t \le \cos^2 t + \sin^2 t = 1$，等号只在尖点成立。

综合以上各点，便得到一个四角星形（星形线（astroid））。下图画出这条曲线，并以虚线画出半径为 a 的圆作比较。



$n = 3$ 时的面积

利用上面的导数，

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t. \end{aligned}$$

由于 $\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1-\cos 4t)$，而 $\cos 4t$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的积分为零，

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

因此

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}.$$

公式给出正的面积，是因为曲线是沿逆时针方向绕行的，这正是第一部分中方向之所以重要的原因。

验算

- 星形线位于菱形 $|x| + |y| \le a$ 之内，而这个菱形的面积是 $2a^2$，所以答案必定小于 $2a^2$。果然 $\frac{3\pi}{8}a^2 \approx 1.178a^2$。
- 作为一个不用该公式的验算，取 $a = 1$，以数值方法计算 $4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x$，得 $1.178097\ldots$，与 $3\pi/8 = 1.1780972\ldots$ 吻合。
- 当 $n = 1$ 时，同样的方法给出 $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2$ 及 $A = \pi a^2$，即圆的面积，正如所料。

常见错误

- 写下 $x = a\cos^n t$ 却没有解释为甚么 x 可以是负数。正是因为 n 是奇数，$x^{2/n}$ 在 $x < 0$ 时才有意义（参数化也才是完整的）。
- 把曲线画成像压扁了的圆那样向外鼓出。二阶导数显示它是向内弯的，并在坐标轴上有尖点。
- 只在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上积分而忘记乘以 4，或在 $-y\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 一项弄错正负号（两项最终都是正的）。

STEP 之外

这条面积公式是格林定理（Green's theorem）的特殊情况；格林定理把一个区域上的积分转化为沿其边界的积分。它也是求积仪（planimeter）背后的原理，求积仪是一种沿边界描画便能量度面积的机械仪器。像 $|x|^p + |y|^p = 1$ 这类曲线，也给出 ℓ^p 范数（norm）的“单位圆”，你会在分析和线性代数中遇到它们；星形线是 $p = \frac{2}{3}$ 的情况，它不是凸的，所以并不给出一个范数。星形线也是一个圆在半径为其四倍的圆内滚动时，圆上一点所描出的轨迹。想看更多同类型的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

详细解答

STEP III 1999，第 7 题

纯数学 · 群与同构

STEP III 1999，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q7

关键思路

表达式 $x+y+axy$ 几乎就是一个乘积。乘以 a 再加上 1，可得

$$1+a(x*y)=1+ax+ay+a^2xy=(1+ax)(1+ay),$$

所以在变量代换（change of variable）$X=1+ax$ 之下，运算 $*$ 其实只是乔装了的普通乘法。群（group）的每一项性质，都可由乘法的相应性质得出，而我们必须剔除的那个数，正是对应于 $X=0$ 的那一个。

解答

以下一律记 $\phi(x)=1+ax$。由于 $a\neq 0$，ϕ 是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射（bijection），所以两个实数 u,v 相等，当且仅当 $\phi(u)=\phi(v)$。上面的恒等式可写成

$$\phi(x*y)=\phi(x)\,\phi(y)\qquad \text{对所有实数}x,y. \tag{†}$$

结合律

在等式两边各用 (†) 两次，

$$\phi\big((x*y)*z\big)=\phi(x*y)\,\phi(z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z),$$
$$\phi\big(x*(y*z)\big)=\phi(x)\,\phi(y*z)=\phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z).$$

由于实数乘法符合结合律（associativity），这两式相等；又因为 ϕ 是一对一（one-to-one）的，所以 $(x*y)*z=x*(y*z)$。因此 $*$ 符合结合律。

（如果你想直接验证：$(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 展开后都是对称的表达式 $x+y+z+a(xy+yz+zx)+a^2xyz$。）

群

想一想 要剔除的是哪一个数？为甚么不能保留整个 $\mathbb{R}$？

在 ϕ 之下，$x = -\frac{1}{a}$ 这个数对应于 $\phi(x) = 0$，而 0 没有乘法逆元（multiplicative inverse）。具体来说，对任何实数 y，

$$\left(-\tfrac{1}{a}\right) * y = -\tfrac{1}{a} + y - y = -\tfrac{1}{a},$$

所以 $-\frac{1}{a}$ 会把一切都吸收掉，无论与甚么元素结合，都不可能得出单位元（identity）。因此我们取

$$G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{1}{a}\right\},$$

这正是所有满足 $\phi(x) \neq 0$ 的 x 所组成的集合。我们逐一验证四条公理。

封闭性（*closure*）。若 $x, y \in G$，则 $\phi(x) \neq 0$ 且 $\phi(y) \neq 0$，所以由 (†) 得 $\phi(x * y) = \phi(x)\phi(y) \neq 0$。故此 $x * y \neq -\frac{1}{a}$，而 $x * y$ 当然是实数，所以 $x * y \in G$。

结合律。上面已对所有实数证明了这一点，所以对 G 的元素自然也成立。

单位元。对每个 x，都有 $x * 0 = x + 0 + 0 = x$ 及 $0 * x = x$，而且因为 $\phi(0) = 1 \neq 0$，所以 $0 \in G$。因此 0 是单位元。（这与 $\phi(0) = 1$ 吻合，即对应乘法的单位元。）

逆元（*inverse*）。给定 $x \in G$，我们要找 y 使得 $x * y = 0$，即 $x + y(1 + ax) = 0$。由于 $1 + ax \neq 0$，可以相除，得出

$$x^{-1} = \frac{-x}{1 + ax}.$$

这个数属于 G，因为

$$\phi\left(\frac{-x}{1+ax}\right) = 1 - \frac{ax}{1+ax} = \frac{1}{1+ax} \neq 0,$$

而且由于 $*$ 是可交换（commutative）的（从公式明显可见 $x * y = y * x$），所以同样有 $x^{-1} * x = 0$。

四条公理全部成立，所以 $(G, *)$ 是一个群（事实上是阿贝尔群（abelian group））；其中被剔除的数是 $-\frac{1}{a}$。

2 阶子群

非零实数的乘法群有子群（subgroup）$\{1, -1\}$。把它经 ϕ 拉回来：$\phi(x) = 1$ 给出 $x = 0$，而 $\phi(x) = -1$ 给出 $x = -\frac{2}{a}$。所以我们尝试

$$H = \left\{0, -\tfrac{2}{a}\right\}.$$

这是 G 中两个不同的元素（因为 $a \neq 0$，$-\frac{2}{a} \neq 0$ 且 $-\frac{2}{a} \neq -\frac{1}{a}$）。直接计算，

$$\left(-\tfrac{2}{a}\right) * \left(-\tfrac{2}{a}\right) = -\tfrac{4}{a} + a \cdot \tfrac{4}{a^2} = 0,$$

以及 $0*0=0$，$0*\left(-\frac{2}{a}\right)=-\frac{2}{a}$。所以 H 是封闭的，包含单位元，而且每个元素都是自己的逆元。因此 H 是 $(G,*)$ 的子群，恰好有两个元素。

事实上这是唯一的一个：阶（order）为 2 的群必是 $\{e,h\}$，其中 $h*h=e$ 且 $h\neq e$；而 $h*h=0$ 即 $h(2+ah)=0$，所以 $h=-\frac{2}{a}$。

验算

取 $a=1$。这时 $x*y=x+y+xy=(1+x)(1+y)-1$，被剔除的数是 -1，而 2 阶子群是 $\{0,-2\}$：的确 $(-2)*(-2)=-4+4=0$。此外 $2*3=11$，而 $(1+2)(1+3)=12=1+11$，与 (†) 所预期的一致。我们也用电脑以精确的有理数运算，对约 5000 组随机选取的 a,x,y,z 验证了恒等式 (†)、结合律、G 的封闭性、单位元 0、逆元公式，以及 $\{0,-\frac{2}{a}\}$ 的封闭性。

常见错误

- 忘记验证逆元 $\frac{-x}{1+ax}$ 本身属于 G，或忘记验证 $x*y$ 永远不会等于被剔除的那个数。正是封闭性这条公理，说明了为何要剔除的恰好是一个点。
- 以 $\{0\}$ 或 $\{0,-\frac{1}{a}\}$ 作为所求的子群：前者只有一个元素，而 $-\frac{1}{a}$ 根本不在 G 之中。

STEP 之外

映射 $\phi(x)=1+ax$ 是由 $(G,*)$ 到群 $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\times)$ 的同构（*isomorphism*）：即一个把其中一种运算变成另一种运算的双射。一旦找到同构，所有结构上的事实都可以不费吹灰之力地搬过去，这就是为甚么 $(G,*)$ 恰好只有一个 2 阶元素，正如 $\times$ 之下只有 -1 一样。同构，以及两个群可以外表不同却“相同”这个想法，是抽象代数（abstract algebra）入门课程的核心；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是阅读这方面内容的好选择。

详细解答

STEP III 1999，第 8 题

纯数学 · 分段微分方程

STEP III 1999，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q8

关键思路

在每个区间上，方程都是频率固定的简谐运动（simple harmonic motion），所以该区间上的通解（general solution）是 $\cos nx$ 与 $\sin nx$ 的组合。唯一要做的工夫是衔接：连续性条件（continuity conditions）把上一个区间末端的 y 和 y' 的值，交给下一个区间作为起始值。各区间的长度都是 2π，结果每次的起始值都相同，于是出现一个规律，我们可以用归纳法（induction）加以证明。

解答

第 (i) 部分

当 $0 < x < 2\pi$ 时，$n = 1$，所以 $y'' + y = 0$，其通解为

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

由于 y 和 y' 在 $x = 0$ 连续，条件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 1$ 适用于这个解：$y(0) = A = 0$ 及 $y'(0) = B = 1$。因此

$$y = \sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

在右端，$y(2\pi) = \sin 2\pi = 0$ 及 $y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1$。

第 (ii) 部分

当 $2\pi < x < 4\pi$ 时，$n = 2$，所以 $y'' + 4y = 0$，且

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

由 y 和 y' 在 $x=2\pi$ 的连续性，这个解在该处必须满足 $y=0$ 和 $y'=1$，即第 (i) 部分末尾求得的值。由于 $\cos 4\pi = 1$ 及 $\sin 4\pi = 0$，

$$y(2\pi) = A = 0, \qquad y'(2\pi) = 2B\cos 4\pi = 2B = 1,$$

所以 $B=\frac{1}{2}$，而当 $2\pi \le x \le 4\pi$ 时 $y = \frac{1}{2}\sin 2x$，正如题目所求。

留意这里同样有 $y(4\pi) = \frac{1}{2}\sin 8\pi = 0$ 及 $y'(4\pi) = \cos 8\pi = 1$：下一个区间的起始值完全一样。由此可提出以下断言。

断言。对每个正整数 n，

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \qquad \text{对于} 2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi.$$

用归纳法证明。$n=1$ 的情况就是第 (i) 部分。假设断言对 $n=k$ 成立。在 $x=2k\pi$ 处，前一段给出

$$y = \frac{1}{k}\sin(2k^2\pi) = 0, \qquad y' = \cos(2k^2\pi) = 1,$$

因为 $2k^2\pi$ 是 2π 的整数倍。在 $2k\pi < x < 2(k+1)\pi$ 上，方程为 $y'' + (k+1)^2 y = 0$，所以

$$y = A\cos(k+1)x + B\sin(k+1)x.$$

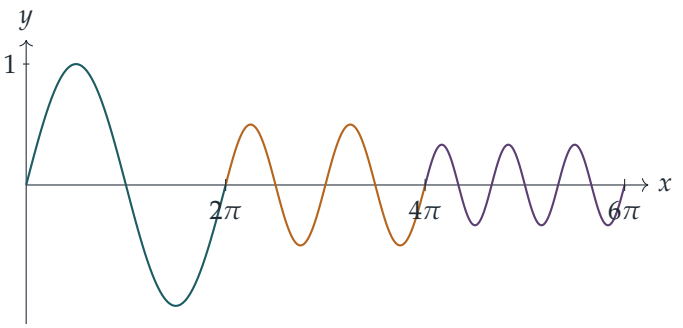
? **想一想** 在左端 $x=2k\pi$ 处，$\cos(k+1)x$ 和 $\sin(k+1)x$ 的值是多少?

在该处 $(k+1)x = 2k(k+1)\pi$，同样是 2π 的整数倍，所以余弦值是 1，正弦值是 0。因此由 y 和 y' 在 $x=2k\pi$ 的连续性可得

$$A = 0, \qquad (k+1)B = 1,$$

所以在 $2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi$ 上 $y = \frac{1}{k+1}\sin(k+1)x$。这正是 $n=k+1$ 时的断言，故由归纳法，断言对所有 $n \ge 1$ 成立。 □

所以只要 $2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi$，就有 $y(x) = \frac{1}{n}\sin nx$。（在每个接合点 $x=2n\pi$，相邻两条公式都给出 $y=0$，所以并无歧义。）



第 (iii) 部分

利用第 (ii) 部分，在第 n 个区间上

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (1-\cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{n^2},$$

因为 $\sin 2nx$ 在上下限处都等于零（每个积分限都是 π 的倍数，而 $2n$ 是整数），所以余弦项的积分为零。

把首 N 个区间加起来，

$$\int_0^{2N\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

这个无穷积分（infinite integral）就是 $\int_0^X y^2\,\mathrm{d}x$ 当 $X\to\infty$ 时的极限。由于 $y^2\ge 0$，它是 X 的递增函数；而当 $2(N-1)\pi \le X \le 2N\pi$ 时，它介乎在 $2(N-1)\pi$ 与 $2N\pi$ 处的值之间。由于级数收敛（converges），当 $N\to\infty$ 时这两个值都趋向 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。因此

$$\int_0^{\infty} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

正如题目所求。

验算

- 每一段 $\frac{1}{n}\sin nx$ 都满足 $y''=-n^2y$，起点处 $y=0$、$y'=1$，终点处亦是 $y=0$、$y'=1$，所以各段在函数值和斜率上都平滑地接合。
- 以数值方法（四阶龙格—库塔法，fourth-order Runge–Kutta）逐步求解这条微分方程（differential equation），走过首六个区间，所得结果与 $\frac{1}{n}\sin nx$ 相差不超过 10^{-10}，而 y^2 由起点至 12π 的积分算得 4.685336，与 $\pi(1+\frac14+\cdots+\frac{1}{36})$ 吻合。
- 利用欧拉（Euler）的结果 $\sum 1/n^2=\pi^2/6$，这个积分等于 $\pi^3/6\approx 5.168$。

常见错误

- 在每个区间上都把初始条件（initial conditions）用于 $x=0$，而不是用于该区间的左端 $x=2(n-1)\pi$。这样做在本题碰巧得出正确答案，只因为起点是 2π 的倍数，而这一点必须写明。
- 忘记 $y'=nB\cos nx$：正是因子 n 产生了振幅（amplitude）$\frac{1}{n}$。
- 把积分写成无穷级数之和，却没有说明极限为何存在；y^2 非负，令这一步很容易说明。

STEP 之外

这是系数为分段常数（piecewise-constant）的微分方程的一个简单例子，这类方程可用来描述一个劲度在固定时刻切换的弹簧；在每次切换时，即使 y'' 出现跳跃，解仍然连续且可微。最后的答案 $\pi^3/6$ 把一条微分方程与巴塞尔和（Basel sum）$\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 联系起来；在大学本科的傅里叶级数（Fourier series）课程中，这个和通常最先是用帕塞瓦尔定理（Parseval's theorem）证明的。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）同时涵盖二阶线性方程和傅里叶级数。

详细解答

STEP III 1999，第 9 题

力学 · 牛顿壳层定理

STEP III 1999，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q9

本题在 *Beyond STEP* 第 10.7 节球壳内的引力中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch10/shell-theorem.html

关键思路

一个有大小的物体所产生的引力（gravity），是它各个小部分的引力的向量和（vector sum）。对圆环而言，对称性（symmetry）已经完成了大部分工作：圆环上位置相对的两小段，其横向的拉力互相抵销，而且每一小段与质点（particle）的距离都相同，所以最后只剩下一个简单的分量（component）。对球壳（shell）而言，我们把它切成许多圆环，使这些圆环的轴都通过质点，再对每一片应用圆环的结果，然后用积分把各片加起来。只要选对代换（substitution），这个积分便会化为零。

解答

圆环

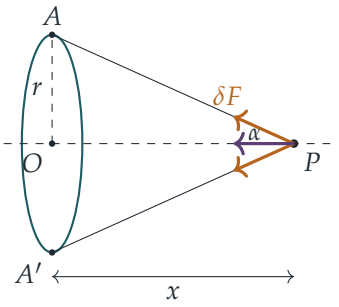
把圆环看成一个质量为 m 的均匀细圆，并把质点看成位于 P 的单位质量的点，它在轴上，与圆心 O 的距离为 x。圆环上每一点与 P 的距离都相同，同为

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

这可由 P、O 和该点所组成的直角三角形，用毕氏定理（Pythagoras' theorem）得出。

方向。把圆环上位于 A 的每一小段，与位于直径另一端 A' 的相等小段配成一对。它们与 P 的距离同为 d，所以它们分别沿 PA 和 PA' 施加大小相等的拉力。这两条直线关于轴互为反射，所以垂直于轴的分量互相抵销，而沿轴的分量则相加，两者都由 P 指向 O。

整个圆环正是由这样的一对对小段组成，所以质点所受的合力沿着轴，指向圆环的中心。



大小。质量为 δm 的一小段，以大小为 $G\,\delta m/d^2$ 的力沿 PA 拉动质点。设 α 为 PA 与轴 PO 之间的夹角，则 $\cos\alpha = x/d$，所以这个力指向 O 的分量为

$$\frac{G\,\delta m}{d^2}\cdot\frac{x}{d} = \frac{Gx\,\delta m}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

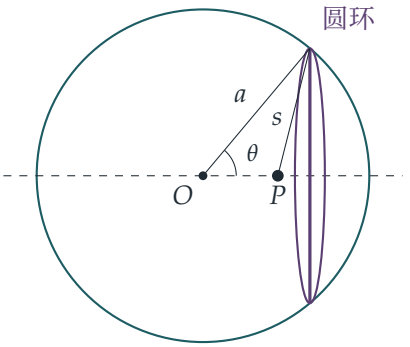
与 δm 相乘的因子对每一小段都相同，所以对整个圆环求和，只需把 δm 换成 m：

$$F = \frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

方向指向圆心，正如题目所求。如果 P 在圆环的另一侧，只要把 x 换成 $|x|$，结果仍然成立；在下一部分，我们会把 x 当作有向距离（signed distance）使用，这时代入带正负号的 x，公式便正确地给出力的有向分量。

球壳

设球壳的中心为 O，半径为 a，质量为 M，则它的面密度（surface density）为 $M/(4\pi a^2)$。把质点放在 P，其中 $OP = b < a$。若 $b = 0$，从 O 出发的每个方向都没有分别，球壳上位置相对的点的拉力互相抵销，所以力为零。以下取 $0 < b < a$，并以直线 OP 为轴，由 O 起沿指向 P 的方向量度距离。



用垂直于 OP 的平面把球壳切成许多薄圆环。位于极角（polar angle）θ 与 $\theta+\delta\theta$ 之间的圆环（极角在 O 处由 OP 方向起量度），半径为 $a\sin\theta$，圆心位于轴上 $a\cos\theta$ 的位置，宽度为 $a\,\delta\theta$。它的质量是

$$\delta M = \frac{M}{4\pi a^2}\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\,\delta\theta = \tfrac{1}{2}M\sin\theta\,\delta\theta.$$

这个圆环的圆心与 P 的有向距离为 $a\cos\theta-b$。根据圆环的结果，它对 P 的拉力沿着轴，而这个拉力在正方向（背离 O、穿过 P 的方向）上的分量为

$$\frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{\big((a\cos\theta-b)^2+a^2\sin^2\theta\big)^{3/2}} = \frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}.$$

这个正负号的约定在两种情况下都正确：当 $a\cos\theta>b$ 时，圆环在 P 的外侧，拉力指向正方向；当 $a\cos\theta<b$ 时，拉力指向相反方向。每个圆环的拉力都沿着同一条轴，所以总力沿着 OP，其分量为

$$F = \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\frac{(a\cos\theta-b)\sin\theta}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

想一想 用甚么代换可以驯服这个分母?

根据余弦定理（cosine rule），$a^2+b^2-2ab\cos\theta$ 这个量正是 s 的平方，即 P 到圆环的距离的平方（图中标示为 s 的线段）。因此我们作代换

$$s^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta, \qquad 2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

当 θ 由 0 变到 π 时，s 由 $a-b$ 递增至 $a+b$（由于 $b<a$，前者为正数）。此外，

$$a\cos\theta-b = \frac{a^2+b^2-s^2}{2b}-b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}.$$

利用 $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{ab}$，

$$\begin{aligned} F &= \frac{GM}{2}\int_{a-b}^{a+b}\frac{a^2-b^2-s^2}{2b}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{s}{ab}\,\mathrm{d}s = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{GM}{4ab^2}\left[-\frac{a^2-b^2}{s}-s\right]_{a-b}^{a+b}. \end{aligned}$$

在 $s=a+b$ 时，方括号内的值是 $-(a-b)-(a+b)=-2a$；在 $s=a-b$ 时，它是 $-(a+b)-(a-b)=-2a$。两者相等，所以

$$F = \frac{GM}{4ab^2}\big(-2a-(-2a)\big) = 0.$$

力沿着 OP，而它沿 OP 的分量为零，所以质点不受球壳的任何引力，正如题目所求。

验算

- 圆环：在 $x = 0$ 时力为零（质点位于圆心，各方的拉力互相平衡）；而当 $x \gg r$ 时，力趋向 Gm/x^2，就像全部质量都集中在 O 一样。
- 球壳，质点在外：如果改为 $b > a$，积分下限变成 $s = b - a$，方括号在该处的值是 $(a+b) - (b-a) = 2a$。于是 $F = \frac{GM}{4ab^2}(-4a) = -GM/b^2$：这是一个指向 O 的吸引力，就像全部质量都集中在中心一样。这正是牛顿（Newton）的另一条球壳定理（shell theorem），可见积分应该没有算错。
- 数值验证：把 2000 个点质量沿圆环排列再求和，结果与公式吻合至小数点后十位。对 θ 的积分使用辛普森法则（Simpson's rule），在随机选取的几个 $b < a$ 下，所得的值约为 10^{-15}；另外用蒙地卡罗方法（Monte Carlo）在球壳上随机取 2×10^5 个点，取 $a = 2$、$b = 1.3$、$GM = 1$，所得的力小于 10^{-3}，而典型的量级是 $GM/a^2 = 0.25$。

常见错误

- 把圆环的质量元素取为 $M\,\delta\theta/\pi$。靠近 $\theta = \pi/2$ 的圆环较大，所以质量与 $\sin\theta\,\delta\theta$ 成正比，而不是与 $\delta\theta$ 成正比。
- 在圆环公式中使用 $|a\cos\theta - b|$。位于 P 两侧的圆环，拉力方向相反，而这种抵销正是整个问题的关键。
- 弄错 s 的上下限：在 $\theta = 0$ 时，距离是 $a - b$ 而不是 $b - a$，因为 P 在球壳之内。

STEP 之外

这就是牛顿的球壳定理，而利用引力的高斯定律（Gauss's law），它有一个更简洁的证明：引力场穿过任何闭曲面的通量（flux），与曲面内的质量成正比，所以根据对称性，空心球壳内部的引力场必定为零。同样的数学也可以给出势（potential），而球壳内部的势是常数这一事实，正是调和函数（harmonic function）的一个早期例子；调和函数是大学一年级向量微积分（vector calculus）的研习内容。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对球壳定理和引力势有细致的论述。

详细解答

STEP III 1999，第 10 题

力学 • 下落链条的冲量

> **STEP III 1999，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q10

关键思路

链条塌落期间，仍然悬在空中的部分处于自由落体（free fall）状态：除了重力之外，没有任何力拉着它。因此每个链环只是从原来的位置直接落下，各链环之间唯一的分别就是下落的高度。桌面对每个链环各施加一个冲量（impulse），使它停下。把这些冲量加起来，得到一个平方根之和；当 n 很大时，这就是 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ 的黎曼和（Riemann sum）。

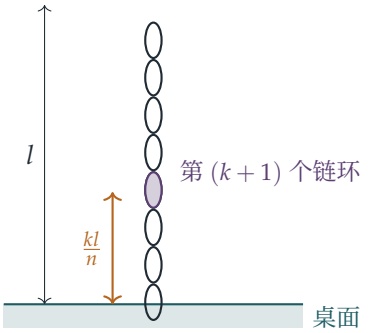
解答

模型

每个链环的质量为 $\frac{m}{n}$，长度为 $\frac{l}{n}$。链环是光滑（smooth）的，而链条完全柔软，所以它不能传递推力。我们把每个链环看作一个质点（particle），它到达桌面时会即时静止（碰撞属非弹性（inelastic））。

> ? **想一想** 下方的链环正被桌面截停，为甚么链条悬空的部分仍然是自由落体?

链条释放后，若没有张力（tension），每个链环的加速度都是 g；而张力为零的下落链条并无矛盾：所有链环一起运动，彼此保持接触而不被拉长。桌面把链环向上推，使它停下，但柔软的链条无法把这个推力传给上方的链环。由于链环光滑，它们之间也没有摩擦力。因此，仍在空中的链环除了重力之外不受任何其他力的作用，每个链环都自由下落，直至着地为止。



第 $(k+1)$ 个链环

第 $(k+1)$ 个链环下方有 k 个链环，总长度为 $\frac{kl}{n}$。由于链条底端刚好触及桌面，第 $(k+1)$ 个链环要下落 $\frac{kl}{n}$ 的距离才到达桌面。它由静止开始自由下落，到达时的速率由 $v^2 = 2gs$ 给出：

$$v_k = \sqrt{\frac{2gkl}{n}}.$$

其后它被截停，所以它的动量（momentum）变化的大小为

$$\frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt{2gl}\,\sqrt{\frac{k}{n}},$$

方向向上（链环失去了向下的动量 $\frac{m}{n}v_k$）。当 $k = 0$ 时，这个值为零：最底的链环本来就已经接触桌面。

总冲量

根据牛顿第三定律（Newton's third law），桌面从第 $(k+1)$ 个链环所受的冲量，大小等于该链环的动量变化，方向向下。链环的编号为 $k+1 = 1, 2, \ldots, n$，所以桌面因碰撞而承受的总冲量为

$$J = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m}{n}\sqrt{\frac{2gkl}{n}} = m\sqrt{2gl}\ \cdot\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}.$$

想一想 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k/n}$ 近似于哪一个积分？

把 $[0,1]$ 分成多个长条，这个和就是 n 个阔度为 $\frac{1}{n}$ 的长方形的面积之和，各长方形的高度是 $\sqrt{x}$ 在长条左端点 $x = 0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ 的值。所以当 n 很大时，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \approx \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3},$$

因此

$$J \approx \tfrac{2}{3}\,m\sqrt{2gl},$$

这正是所求的结果。

再看看这个近似有多准确：$\sqrt{x}$ 是递增函数，所以在长条 $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ 上，左端点的高度 $\sqrt{k/n}$ 位于曲线之下，而在 $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ 上则位于曲线之上。对所有长条求和，得

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \;\le\; \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{即} \quad \tfrac{2}{3}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{3/2} \le \frac{J}{m\sqrt{2gl}} \le \tfrac{2}{3}.$$

上下界都趋向 $\frac{2}{3}$，所以相对误差（relative error）最多约为 $\frac{3}{2n}$。

验算

- 单位：$m\sqrt{gl}$ 是质量 × 速率，即动量，冲量的单位正应如此。
- 数值上，取 $m = 2$、$l = 3$、$g = 9.8$：$\frac{2}{3}m\sqrt{2gl} \approx 10.224$，而精确的和在 $n = 10$ 时为 9.363，$n = 100$ 时为 10.144，$n = 1000$ 时为 10.216。两者之比趋近 1，而且始终落在上述的上下界之内。
- 最后着地的链环几乎下落了整个长度 l，速率接近 $\sqrt{2gl}$。假如全部质量都以这个速率到达，冲量便是 $m\sqrt{2gl}$。大部分链环下落的距离都较短，所以答案是这个值的某个分数，十分合理。

常见错误

- 以为第 $(k+1)$ 个链环下落的距离是 $\frac{(k+1)l}{n}$。它下方其实只有 k 个链环。
- 把已经躺在桌面上的那段链条的稳定重量也计算在内。题目只问碰撞所产生的冲量。

STEP 之外

由于所有链环在 $\sqrt{2l/g}$ 的时间内全部着地，单是碰撞便对桌面施加了 $\frac{2}{3}m\sqrt{2gl}/\sqrt{2l/g} = \frac{2}{3}mg$ 的平均力。事实上，在每一刻，撞击力都是已落在桌面上那段链条的重量的两倍，所以放在桌下的磅秤，读数会在最后一个链环着地的一刻升至 $3mg$。这类质量连续增加或减少的问题（下落的链条、火箭、雨点），要用牛顿第二定律（Newton's second law）的变质量（variable-mass）形式来处理。详细而严谨的论述可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）。

详细解答

STEP III 1999，第 11 题

力学 · 刚体转动

STEP III 1999，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q11

关键思路

圆环一旦到达桌边，便是一个绕固定点转动的刚体（rigid body），因此两条方程已足以解决整个问题：能量守恒（conservation of energy）给出任意角度时的角速率（angular speed）；对圆心应用牛顿第二定律（Newton's second law），并沿指向支点的方向分解，则给出法向反作用力（normal reaction）。当这个反作用力降至零时，圆环便失去接触。第一部分求得的转动惯量（moment of inertia），正是能量方程所需要的。

解答

转动惯量

薄圆环上每一个质点与圆心 C 的距离都是 a，所以对于通过 C 并垂直于圆环所在平面的轴，转动惯量为

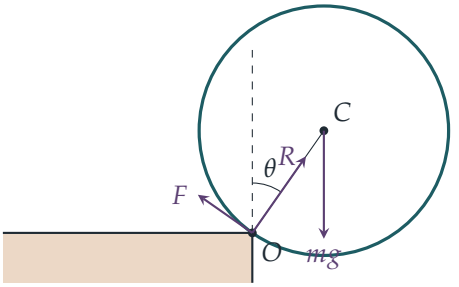
$$I_C = \sum \delta m\, a^2 = ma^2.$$

圆周上的一点 O 与 C 的距离为 a，而新的轴与原来的轴平行，故由平行轴定理（parallel axis theorem）得

$$I_O = I_C + ma^2 = 2ma^2.$$

滚过桌边

把圆环看成均匀的刚性圆环，并把桌边看成一个固定点 O。两个表面都是粗糙的，我们假设摩擦力（friction）足够大，使圆环始终不打滑：在桌面上它作滚动，越过桌边时则绕 O 转动而不滑动。设 θ 为 OC 与向上铅垂线所成的角，因此圆环到达桌边的一刻 $\theta = 0$，并记 $\omega = \dot{\theta}$。



想一想 圆环到达桌边的一瞬间，它绕 O 的角速率是多少?

以速率 v 滚动而不打滑的圆环，角速率为 v/a，而它在每一瞬间的运动都是绕接触点的转动。在到达桌边的一瞬间，接触点正是 O，圆环只是继续绕着它转动：由于圆环没有失去接触，所以不会发生碰撞。因此当 $\theta = 0$ 时 $\omega = v/a$。

能量。只要圆环仍与 O 保持接触，作用于 O 的力便不作功（施力点静止不动），所以机械能（mechanical energy）守恒。圆心下降了 $a - a\cos\theta$，故

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\left(\frac{v}{a}\right)^2 + mga(1-\cos\theta), \qquad \text{即} \qquad a\omega^2 = \frac{v^2}{a} + g(1-\cos\theta).$$

指向支点的方向。圆心 C 在以 O 为中心、半径为 a 的圆上运动，所以它的加速度有一个由 C 指向 O 的分量 $a\omega^2$。作用于圆环的力有：重量 mg、沿 OC 的法向反作用力 R（方向背离 O），以及垂直于 OC 的摩擦力 F，后者沿 OC 没有分量。沿 CO 方向分解：

$$mg\cos\theta - R = ma\omega^2.$$

代入能量方程，

$$R = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{a} - mg(1-\cos\theta) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mv^2}{a}.$$

这个量随 θ 增加而减少，而当 R 首次降至零时，圆环便与桌边失去接触，此时

$$2g\cos\theta = g + \frac{v^2}{a}, \qquad \text{即} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{v^2}{2ag},$$

这正是所要证明的结果。

想一想 这个结果对任何 v 都合理吗?

当 $\theta = 0$ 时，$R = m(g - v^2/a)$，只有在 $v^2 < ag$ 时才是正数。这就是圆环滚过桌边而不会立即失去接触的条件，也是题目所假设的；它同时正是右方小于 1 的条件，所以存在一个有效的角 θ。

为完整起见，沿垂直于 OC 的方向分解，并利用 $I_O\ddot{\theta} = mga\sin\theta$，可得 $\ddot{\theta} = g\sin\theta/(2a)$ 及 $F = \tfrac{1}{2}mg\sin\theta$。这就是桌边为防止打滑而必须提供的摩擦力，也说明了为何两个表面都必须是粗糙的。

验算

- 若 $v \to 0$，圆环只是从桌边翻倒下去，并在 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ 时失去接触，即 $\theta = 60°$。当 $v^2 \to ag$ 时，$\theta \to 0$：圆环几乎没有碰到桌边。两个极限情况都合乎情理。
- 数值上，取 $a = 0.6\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 及 $v = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，由 $\dot\theta = v/a$ 开始对 $\ddot\theta = g\sin\theta/(2a)$ 逐步计算，直至 $g\cos\theta = a\dot\theta^2$ 为止，得 $\cos\theta \approx 0.69132$，与 $\frac{1}{2} + v^2/(2ag) = 0.69133$ 吻合。

常见错误

- 在能量方程中使用 $I_C = ma^2$，或在 $\frac{1}{2}I_O\omega^2$ 之上另加一项平移动能（translational kinetic energy）。绕 O 的转动已经包含了圆心的运动。
- 忘记了初始动能，结果对任何 v 都得出 $\cos\theta = \frac{1}{2}$。

STEP 之外

从桌边滚落是典型的*单侧约束*（unilateral constraint）：桌边只能推而不能拉，所以运动方程只在它们所预测的反作用力非负时才适用。质点从球面滑落，以及汽车驶过拱桥，都受同一个想法支配。在大学一年级的课程中，你会在学习刚体动力学（rigid-body dynamics）以及平行轴定理和垂直轴定理（perpendicular axis theorem）时遇到它。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这些课题都有细致的论述。

详细解答

STEP III 1999，第 12 题

概率与统计 · 离散联合分布

STEP III 1999，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q12

关键思路

联合概率（joint probability）对 j 和 k 的依赖，主要是通过 $j+k$ 而来，所以应按总和 $n=j+k$ 把各项分组。余下的是 $\sum_j \frac{1}{j!(n-j)!}$，它其实是一个乔装了的二项式和：乘以 $n!$ 之后就变成 $\sum_j \binom{n}{j} = 2^n$。此后每一部分都是指数级数（exponential series）。

解答

第 (i) 部分

设 $n \geq 1$。事件 $\{X+Y=n\}$ 是事件 $\{X=j,\, Y=n-j\}$（$j=0,1,\ldots,n$）的不相交并集（disjoint union）。在其中每一个事件上都有 $j+k=n$，所以

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-1} \frac{n\lambda^n}{j!\,(n-j)!} = \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} \\ &= \mathrm{e}^{-1}\frac{n\lambda^n 2^n}{n!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

其中用到由二项式定理（binomial theorem）得出的 $\sum_j \binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n$，以及当 $n \geq 1$ 时 $n/n! = 1/(n-1)!$。

为完整起见，由于有因子 $j+k$，$\mathrm{P}(X+Y=0) = \mathrm{P}(X=0,\, Y=0) = 0$。

第 (ii) 部分

概率 $\mathrm{P}(X+Y=n)$ 对所有 $n \geq 0$ 求和，结果必须等于 1。$n=0$ 的一项是零，所以

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}(2\lambda)^n}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{-1}(2\lambda) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^m}{m!} = \mathrm{e}^{-1}\, 2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda},$$

这里我们设 $m = n-1$，并用了指数级数 $\sum_m t^m/m! = \mathrm{e}^t$。因此 $2\lambda\, \mathrm{e}^{2\lambda-1} = 1$，正是所要证明的结果。

第 (iii) 部分

设 $g(x) = 2x\, \mathrm{e}^{2x-1}$。由积法则（product rule），

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1} + 4x\, \mathrm{e}^{2x-1} = 2(1+2x)\, \mathrm{e}^{2x-1}.$$

当 $x > 0$ 时，$1+2x$ 和 e^{2x-1} 都是正数，所以 $g'(x) > 0$，而 g 在 $x > 0$ 上严格递增（strictly increasing）。

> ? **想一想** 为甚么“递增”可以推出“最多只有一个解”？

若 $0 < x_1 < x_2$，则 $g(x_1) < g(x_2)$，所以 g 不可能在两个不同的点上都取值 1。由于 $\lambda > 0$，第 (ii) 部分得出的方程 $g(\lambda) = 1$ 因此最多只有一个解。

现在试一试那个令指数变成零的明显候选值 $x = \frac{1}{2}$：$g(\frac{1}{2}) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1$。所以 $\frac{1}{2}$ 是一个解，而根据唯一性（uniqueness），它就是唯一的解：

$$\lambda = \tfrac{1}{2}.$$

代入这个值，第 (i) 部分的结果变成：当 $n \geq 1$ 时，$\mathrm{P}(X+Y=n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!}$。

第 (iv) 部分

由于 $X+Y$ 只取 $n \geq 1$ 的值，而其概率刚刚已经求出，

$$\mathrm{E}\left(2^{X+Y}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 2\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e},$$

这里同样设 $m = n-1$ 并使用指数级数（该级数收敛，所以期望值（expectation）是有限的）。

验算

- 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，第 (i) 部分的公式表明 $X+Y-1$ 服从平均值为 1 的泊松分布（Poisson distribution）。它的概率 $\mathrm{e}^{-1}/m!$ 之和当然是 1，与第 (ii) 部分一致。

- 以数值方法把 $j+k<60$ 范围内的联合概率加起来，总和是 1.000000；把 $2^{j+k}\,\mathrm{P}(X=j,Y=k)$ 加起来则得 5.436564，与 $2\mathrm{e}\approx 5.436564$ 吻合。
- 对第 (iv) 部分作一个简单的合理性检查：$2^{X+Y}=2\cdot 2^{N}$，其中 $N\sim\mathrm{Po}(1)$，而对泊松变量有 $\mathrm{E}(s^N)=\mathrm{e}^{s-1}$，所以答案是 $2\mathrm{e}^{1}$。

常见错误

- 忘记了 $n/n!=1/(n-1)!$，结果在第 (ii) 部分的级数里留下一个难以处理的因子 n。
- 把 $n=0$ 的一项当作非零：因子 $j+k$ 令这一项消失，这正是各个求和都由 $n=1$ 开始的原因。
- 在第 (iii) 部分只证明了 $\lambda=\frac{1}{2}$ 可行。你还需要用单调性（monotonicity）排除其他解。

STEP 之外

$\mathrm{E}(s^{X+Y})$ 这个量是 $X+Y$ 的*概率母函数*（*probability generating function*），这里是在 $s=2$ 处取值。母函数把概率的求和化为幂级数（power series），是大学第一门概率课程中用来辨认分布和求矩（moments）的标准工具。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（一本概率论入门书）对母函数和泊松分布有清晰的讲解。

详细解答

STEP III 1999，第 13 题

概率与统计 · 连续先验分布的贝叶斯定理

STEP III 1999，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q13

关键思路

这里有两层随机性：首先是我那一份的大小 X，然后是提子干落在哪里。一旦以 $X = x$ 为条件（condition），每粒提子干落在我那一份的概率都是 x，而且各粒之间互相独立，所以提子干的数目服从二项分布（binomial distribution）。之后，第 (i) 部分用的是全期望定律（law of total expectation），第 (ii) 部分用的是带有连续先验分布（continuous prior）的贝叶斯定理（Bayes' theorem）。

解答

首先求 A。概率密度函数（density）的积分必须等于 1：

$$\int_0^1 Ax\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = 2,$$

所以 X 在 $[0,1]$ 上的密度为 $\mathrm{f}(x) = 2x$。

设 N 为我那一份中提子干的数目。我们以最自然的方式为“随机放置”建立模型：每粒提子干的位置在整个蛋糕内均匀分布（uniformly distributed），并且与其他提子干的位置以及我取多少蛋糕都互相独立。因此，若我取了蛋糕的比例为 x，每粒提子干落在我那一份的概率就是 x，各粒之间互相独立，所以

$$N \mid (X = x) \sim \mathrm{B}(4, x).$$

第 (i) 部分

给定 $X = x$，二项分布的平均值为 $\mathrm{E}(N \mid X = x) = 4x$。对 X 取平均（即全期望定律），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \int_0^1 \mathrm{E}(N \mid X = x)\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 4x \cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= 8\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

等价地，$\mathrm{E}(N) = 4\,\mathrm{E}(X)$，其中 $\mathrm{E}(X) = \frac{2}{3}$。我那一份中提子干数目的期望值是 $\frac{8}{3}$。

第 (ii) 部分

我们要求 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$。给定 $X = x$，四粒提子干全部落在我那一份的概率是 x^4。

> **想一想** 当 X 是连续的，而 $\mathrm{P}(X = x) = 0$ 时，我们怎样运用贝叶斯定理?

我们把贝叶斯定理中的求和换成对密度的积分。在各种可能的份量大小之中，一小段 $[x, x + \mathrm{d}x]$ 的概率是 $2x\,\mathrm{d}x$，而在这一小段之下，四粒提子干全中的机会是 x^4。把各小段加起来，

$$\mathrm{P}(N = 4) = \int_0^1 x^4 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

同样地，只保留 $x > \frac{1}{2}$ 的那些小段，

$$\mathrm{P}\big(X > \tfrac{1}{2} \text{ 及 } N = 4\big) = \int_{1/2}^1 2x^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{64}\Big) = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}.$$

因此

$$\mathrm{P}\big(X > \tfrac{1}{2} \mid N = 4\big) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{3}} = \frac{63}{64}.$$

另一种看法：给定 $N = 4$，X 的条件密度与 $x^4 \cdot 2x$ 成正比，所以它在 $[0, 1]$ 上是 $6x^5$。它的分布函数（distribution function）是 x^6，而 $1 - (\frac{1}{2})^6 = \frac{63}{64}$。

验算

- (ii) 的答案非常接近 1，这是合理的：找到全部提子干，正是我取了一大块的有力证据。先验概率 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 被推高至 $\frac{63}{64} \approx 0.984$。
- $\frac{8}{3}$ 介乎 0 与 4 之间，而且大于 2，这正是应有的结果：密度 $2x$ 偏向较大的份量。
- 以 10^6 次试验进行蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation）（取 $X = \sqrt{U}$，其中 U 服从均匀分布，这样得出的密度就是 $2x$，然后放置四粒提子干），得到 $\mathrm{E}(N) \approx 2.667$、$\mathrm{P}(N = 4) \approx 0.333$，以及条件概率 ≈ 0.9846，对比 $\frac{63}{64} = 0.984375$。

常见错误

- 忘记求 A，或者取 $A = 1$。这样 f 就不是密度函数，(i) 的期望值也会算错（虽然 A 在 (ii) 中会约去）。
- 计算了 $\mathrm{P}(N = 4 \mid X > \frac{1}{2})$，而不是 $\mathrm{P}(X > \frac{1}{2} \mid N = 4)$。条件的方向弄反了。
- 以 $(\frac{1}{2})^4$ 代替积分：份量的大小是随机的，所以我们必须把 x^4 对密度取平均，而不是代入单一个数值。

STEP 之外

这是贝叶斯推论（Bayesian inference）的缩影：密度 $2x$ 是未知比例的*先验分布*（prior），二项分布是*似然函数*（likelihood），而 $6x^5$ 是*后验分布*（posterior）。先验分布与后验分布都是贝塔分布（beta distribution），这是二项数据的共轭先验（conjugate prior）的一个例子，而拉普拉斯（Laplace）的继起法则（rule of succession）背后也是同一个计算。Blitzstein 与 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）把贝塔–二项分布的来龙去脉，以及以连续随机变量为条件的处理方法，讲解得十分清楚。

详细解答

STEP III 1999，第 14 题

概率与统计 • 以条件化求期望值

STEP III 1999，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/99-s3-q14

关键思路

在 H1 中，奖金只取决于首次成功在何时出现，因此期望值（expectation）是一个有限的等差等比级数（arithmetico-geometric series）之和 $\sum r\,p\,q^{r-1}$。处理这类和式的标准技巧，是把和式减去它自身的 q 倍。在 H2 中，我们以回合数 N 为条件，再把 H1 的答案按泊松分布（Poisson distribution）取平均。这只需用到泊松和式 $\sum \lambda^n x^n/n!$ 与 $\sum n\lambda^n x^n/n!$，两者都可由指数级数（exponential series）得出。

解答

游戏 H1

设 W 为她的奖金（以英镑计）。各回合互相独立，每回合成功的概率为 p。她首次成功出现在第 r 回合，当且仅当首 $r-1$ 回合均失败而第 r 回合成功，所以

$$\mathrm{P}(W=r)=q^{r-1}p \qquad (1\le r\le n),$$

其余情况下 $W=0$，对期望值没有贡献。因此

$$\mathrm{E}(W)=p\,S, \qquad \text{其中} S=\sum_{r=1}^{n} r\,q^{r-1}=1+2q+3q^2+\cdots+nq^{n-1}.$$

乘以 q 后相减，并把 q 的同次幂对齐：

$$\begin{aligned} S-qS &= 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}-nq^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q}-nq^n, \end{aligned}$$

这里用了等比级数（geometric series）的求和公式；由于 $q \neq 1$，公式成立。因为 $1-q=p$，由此得 $S=\dfrac{1-q^n}{p^2}-\dfrac{nq^n}{p}$，于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W)=pS&=\frac{1-q^n-npq^n}{p}=\frac{1-q^n-n(1-q)q^n}{p}\\&=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right],\end{aligned}$$

这正是所要求的结果。

游戏 H2

设 $N\sim\mathrm{Po}(\lambda)$ 为她获准进行的回合数，则 $\mathrm{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n/n!$。记

$$g(n)=p^{-1}\left[1+nq^{n+1}-(n+1)q^n\right].$$

已知 $N=n\geq 1$ 时，她玩的是有 n 个回合的 H1，所以奖金的期望值为 $g(n)$。已知 $N=0$ 时，她一无所获。根据全期望定律（law of total expectation，即以 N 为条件），

$$\mathrm{E}(W)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(N=n)\,g(n).$$

想一想 $g(n)$ 的三个部分若写成由 $n=0$ 开始的完整泊松和式，会较易处理。我们可以让和式由 $n=0$ 开始吗？

可以：$g(0)=p^{-1}[1+0-1]=0$，与 $N=0$ 时奖金为零相符。所以

$$\mathrm{E}(W)=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\left[1+nq^{n+1}-nq^n-q^n\right].$$

第一项之和为 1，因为各概率之和为 1。至于其余各项，我们需要两个级数，两者对所有实数 x 都成立：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x},\\\sum_{n=0}^{\infty}n\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^n}{n!}&=\lambda x\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}=\lambda x\,\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}.\end{aligned}$$

取 $x=q$，并留意 $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}=\mathrm{e}^{-\lambda(1-q)}=\mathrm{e}^{-\lambda p}$。于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,q^n=\mathrm{e}^{-\lambda p},\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,nq^n=\lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p}.$$

nq^{n+1} 这一项是 nq^n 的 q 倍，所以它的贡献是 $\lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p}$。综合起来，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(W) &= \frac{1}{p}\left[1 + \lambda q^2 \mathrm{e}^{-\lambda p} - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p} - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right] \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right) + \frac{\lambda q(q-1)}{p}\,\mathrm{e}^{-\lambda p} \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda p}\right) - \lambda q\,\mathrm{e}^{-\lambda p},\end{aligned}$$

最后一步用了 $q - 1 = -p$。这就是所要求的表达式，以英镑计。

验算

- H1 取 $n = 1$：公式给出 $p^{-1}[1 + q^2 - 2q] = p^{-1}(1-q)^2 = p$。这是正确的，因为她以概率 p 赢得 £1。
- 在 H1 中当 $n \to \infty$ 时，$q^n \to 0$ 且 $nq^n \to 0$，所以期望值趋向 $1/p$，即几何分布（geometric distribution）的平均值。同样地，当 $\lambda \to \infty$ 时，H2 的结果也趋向 $1/p$。
- 当 λ 很小时，把指数函数展开，得 $\lambda - \tfrac{1}{2}\lambda^2 p - \lambda q + O(\lambda^2) = \lambda p + O(\lambda^2)$。这合乎情理：她几乎总是没有回合或只有一个回合，而 $\mathrm{P}(N = 1) \approx \lambda$。
- 数值方面，对 $n \le 14$，H1 的公式与直接求和的结果完全吻合（以分数计算）。H2 的公式与截断后的泊松和式吻合；另外，取 $\lambda = 2$、$p = 0.4$ 模拟 4×10^5 局游戏，得 0.836，而公式给出的是 0.837。

常见错误

- 弄错 $S - qS$ 的最后一项：和式 S 止于 nq^{n-1}，所以 qS 会剩下 $-nq^n$。
- 忘记 $\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda q}$ 可化简为 $\mathrm{e}^{-\lambda p}$，结果在代数运算中迷失方向。

STEP 之外

H2 中用到的和式 $\sum \mathrm{P}(N = n)\,x^n$，其实是*概率生成函数*（probability generating function）$G_N(x) = \mathrm{E}(x^N)$ 的值，而 $\sum n\,\mathrm{P}(N = n)\,x^n = xG'_N(x)$。对泊松变量而言，$G_N(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$。生成函数，加上以随机的试验次数为条件这一手法，是大学一年级概率论的核心工具，例如用于研究随机和（random sums）与分支过程（branching processes）。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对两者都有清晰的讲解。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

1999 年详细解答. 全书各章及
所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为
beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。