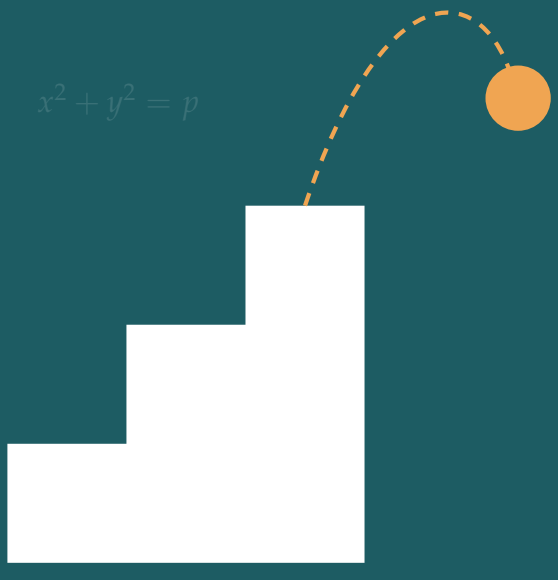
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

1996 年详细解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

STEP I, II 及 III

1996 年详细解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

1996 年详细解答

1996 年 STEP 试卷（STEP I, II 及 III）全部 42 题的详细解答。自样本试卷以来每一道 STEP 题目的详细解答、*Beyond STEP* 全书以及各章的单行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

阅读解答之前，请先认真尝试解题。每个答案均已用数值方法核对，但解答数量如此之多，难免会有疏漏：如果发现有可疑之处，请相信自己的演算，并仔细检查。

由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目录

STEP I

第 1 题 圆柱的最优化 纯数学 . . . 3

第 2 题 Beta 积分 纯数学 . . . 7

第 3 题 整数的整除性 纯数学 . . . 10

第 4 题 以配方法积分 纯数学 . . . 13

第 5 题 复数的平方根 纯数学 . . . 16

第 6 题 三角函数求和与积分 纯数学 . . . 20

第 7 题 一阶微分方程 纯数学 . . . 23

第 8 题 循环小数 纯数学 . . . 27

第 9 题 弹性绳与能量 力学 . . . 30

第 10 题 动量守恒 力学 . . . 33

第 11 题 抛体运动 力学 . . . 36

第 12 题 随机样本的最大值 概率与统计 . . . 39

第 13 题 离散分布与期望值 概率与统计 . . . 42

第 14 题 赌徒与条件概率 概率与统计 . . . 45

STEP II

第 1 题 二项式级数的系数 纯数学 . . . 48

第 2 题 非线性联立方程 纯数学 . . . 51

第 3 题 以数学归纳法证明斐波那契恒等式 纯数学 . . . 54

第 4 题 代换积分法 纯数学 . . . 57

第 5 题 单位根 纯数学 . . . 60

第 6 题 因数的计数 纯数学 . . . 63

第 7 题 坐标几何中的轨迹 纯数学 . . . 66

第 8 题 二阶微分方程 纯数学 . . . 69

第 9 题 稳定性与质心 力学 72
第 10 题 旋转轮抛出的抛体 力学 76
第 11 题 简谐运动 力学 80
第 12 题 最大值与最小值的分布 概率与统计 84
第 13 题 网格上的随机漫步 概率与统计 87
第 14 题 矩与中心极限定理 概率与统计 91

STEP III

第 1 题 双曲函数的幂 纯数学 95
第 2 题 联立线性方程 纯数学 99
第 3 题 半角代换 纯数学 102
第 4 题 最大乘积分拆 纯数学 106
第 5 题 倍角公式 纯数学 109
第 6 题 矩阵群 纯数学 112
第 7 题 根的对称函数 纯数学 116
第 8 题 莫比乌斯变换 纯数学 120
第 9 题 圆周运动 力学 125
第 10 题 梯及摩擦力的平衡 力学 129
第 11 题 微小振动 力学 134
第 12 题 马可夫链 概率与统计 138
第 13 题 切比雪夫不等式 概率与统计 142
第 14 题 隐状态马可夫过程 概率与统计 146

详细解答

STEP I 1996，第 1 题

纯数学 · 圆柱的最优化

> **STEP I 1996，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

关键思路

描述这个罐子需要两个量：半径 r 和高 h。体积的约束条件让我们可以消去其中一个，于是 S 变成只含 r 的函数，用普通的微分法（differentiation）就可以求出它的最小值。最优的罐子原来有一个非常整齐的形状。一旦看出这个形状，两条关于球体的问题都归结为观察一个通过轴的截面（cross-section）。

解答

求表面积的最小值

设罐子的半径为 $r > 0$，高为 $h > 0$。则

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

其中 $2\pi r^2$ 来自两个底面，$2\pi rh$ 来自曲面侧面。对于固定的 V，我们有 $h = V/(\pi r^2)$，所以 $2\pi rh = 2V/r$，而

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

求导得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

当 $r^3 < V/(2\pi)$ 时它是负的，当 $r^3 > V/(2\pi)$ 时它是正的。所以 S 先递减后递增，它在 $r > 0$ 上的最小值出现在

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

这是全局最小值（global minimum），而不仅是局部最小值，因为它是唯一的驻点（stationary point），而且导数在该处由 $-$ 变为 $+$。（从公式也可以看出这一点：当 $r \to 0^+$ 和

当 $r \to \infty$ 时，都有 $S \to \infty$。）

在这个半径下 $V = 2\pi r^3$，所以

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

最好的罐子，高度与阔度恰好相等。这时 $2V/r = 4\pi r^2$，所以

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

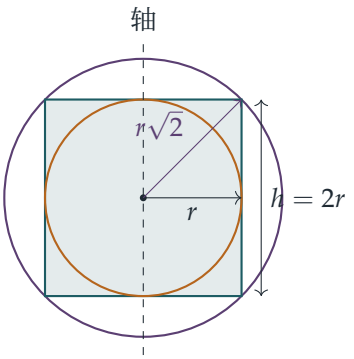
这就是所要求的最小值。

想一想 为甚么用 r 而不用 h 来计算?

两个变量都可行。不过消去 h 比较容易，因为 h 在两条公式中都只以一次项出现，所以代入 $h = V/(\pi r^2)$ 便得到一个简单的 r 的函数。消去 r 则会引入 $\sqrt{V/(\pi h)}$，代数运算会变得较为繁复。

罐内最大的球

从现在起，罐子满足 $h = 2r$。用一个通过其轴的平面把它切开：截面是一个 $2r \times 2r$ 的正方形。



罐内任何一个球的半径都满足 $\rho \le r$。要看出这一点，可把球投影到底面所在的平面上：得到一个半径为 ρ 的圆盘，它位于半径为 r 的底面圆盘之内。另外 $2\rho \le h = 2r$，这给出相同的上界。以罐子中心为球心、半径为 r 的球（截面图中的琥珀色圆）与两个底面及曲面侧面都相切，所以它放得进去。利用 $r^3 = V/(2\pi)$，最大的球的体积因此是

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

正如所求。

包含罐子的最小的球

在顶面的边缘上取一点，再在底面的边缘上取与它沿直径方向相对的一点。这两点是正方形截面的一对对角顶点，所以它们之间的距离是

$$\sqrt{(2r)^2+h^2}=\sqrt{8r^2}=2\sqrt{2}\,r.$$

任何包含罐子的球都包含这两点，所以它的直径至少是 $2\sqrt{2}\,r$，半径至少是 $\sqrt{2}\,r$。

> ? **想一想** 我们怎样知道半径为 $\sqrt{2}\,r$ 的球真的够大?

把球心放在罐子的中心 O。罐子上任何一点与轴的距离为 $\rho\le r$，并位于 O 之上或之下高度 z 处，其中 $|z|\le r$。因此它与 O 的距离是 $\sqrt{\rho^2+z^2}\le\sqrt{r^2+r^2}=\sqrt{2}\,r$。所以整个罐子都位于这个球之内（梅紫色的圆通过正方形的全部四个顶点）。

因此，能容纳罐子的最小的球半径为 $\sqrt{2}\,r$，体积为

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3=\tfrac{4}{3}\pi\cdot 2\sqrt{2}\,r^3=\tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi\cdot\frac{V}{2\pi}=\frac{4\sqrt{2}}{3}V.$$

验算

- 取 $V=1$，在一个细密的 r 值网格上以穷举方式求 $2\pi r^2+2/r$ 的最小值，得 $S\approx 5.5358$，与 $3(2\pi)^{1/3}\approx 5.5358$ 吻合。
- 两个球的体积之比应为 $(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$，即半径之比的立方。果然 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V\big/\frac{2}{3}V=2\sqrt{2}$。
- 大小次序合理：$\frac{2}{3}V<V<\frac{4\sqrt{2}}{3}V\approx 1.886\,V$，所以内球比罐子小，外球比罐子大。

常见错误

- 漏掉一个或两个底面，写成 $S=\pi r^2+2\pi rh$ 或 $S=2\pi rh$。这样会得出不同的最优形状。
- 只证明 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r=0$，却没有说明为甚么该驻点是最小值。
- 把外球的半径取为 r 或 h，而不是罐子空间对角线的一半。

STEP 之外

这是约束优化（constrained optimisation）：在 $V(r,h)$ 固定的条件下，求 $S(r,h)$ 的最小值。在大学你会学到拉格朗日乘数（Lagrange multipliers），它不必消去变量就能处理这类问题。条件 $\nabla S=\lambda\nabla V$ 几乎立刻就给出 $h=2r$。这两个球也说明了凸体（convex

body）的“内切”球（inscribed ball）和“外接”球（circumscribed ball），它们是凸几何（convex geometry）的核心概念。想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学问题集）。

详细解答

STEP I 1996，第 2 题

纯数学 • Beta 积分

> **STEP I 1996，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q2

关键思路

(i) 和 (ii) 的被积函数（integrand）其实是同一个函数的两种写法：$\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$。因此，同一个积分用两种方法计算，便得到同一个关于 α 的多项式（polynomial）的两种描述。第 (i) 部分给出闭合形式（closed form），第 (ii) 部分把各项系数写成积分，余下的工作只需比较系数（comparing coefficients）便可完成，完全不需要用分部积分法（integration by parts）。

解答

第 (i) 部分

作代换（substitution）$u = 1 + (\alpha - 1)x$，则 $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$；当 $x = 0$ 时 $u = 1$，当 $x = 1$ 时 $u = \alpha$。由于 $\alpha \neq 1$，我们可以除以 $\alpha - 1$：

$$\int_0^1 \big(1 + (\alpha - 1)x\big)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)},$$

这正是所求。（即使 $\alpha < 1$ 或 $\alpha < 0$，这个代换仍然成立：它是线性的，而且无论上下限的次序如何，公式 $\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$ 都成立。换个做法，直接对 $\big(1 + (\alpha - 1)x\big)^{n+1} / \big((n+1)(\alpha - 1)\big)$ 求导亦可。）

第 (ii) 部分

把 αx 和 $1 - x$ 视为两项，用二项式定理（binomial theorem）展开被积函数：

$$\big(\alpha x + (1 - x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha x)^k (1 - x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}.$$

这是有限和，所以可以逐项积分；对 x 积分时，α 是常数：

$$\int_0^1 \big(\alpha x + (1-x)\big)^n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \left[\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x \right].$$

每个方括号内都是一个与 α 无关的数，所以这是一个关于 α 的多项式，次数至多为 n，而对于 $0 \le k \le n$，α^k 的系数是 $\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$，这正是所求。

第 (iii) 部分

把 (ii) 中的多项式记作 $P(\alpha)$。由于 $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha-1)x$，第 (i) 部分表明，对每一个 $\alpha \neq 1$，

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}-1}{(n+1)(\alpha-1)} = \frac{1}{n+1}\big(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n\big),$$

这里用了等比级数（geometric series）的因式分解 $\alpha^{n+1}-1 = (\alpha-1)(1+\alpha+\cdots+\alpha^n)$。

> **想一想** 我们只知道这两个多项式在 $\alpha \neq 1$ 时相等。为甚么可以比较系数?

两边之差是一个次数至多为 n 的多项式，而且在每一个 $\alpha \neq 1$ 处都等于零，所以它有无限多个根。一个次数至多为 n 的非零多项式最多只有 n 个根，因此这个差是零多项式：每一项系数都相同。（另一个说法是：两边都是连续的，所以在 $\alpha = 1$ 处也相等。）

在右边，每个 α^k（$0 \le k \le n$）的系数都等于 $\frac{1}{n+1}$。与 (ii) 比较，得

$$\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

因此

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

这就是所求的结果。

验算

- $k=0$：$\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$，而公式给出 $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$。
- $n=2$，$k=1$：$\int_0^1 (x-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$。
- 数值上，$\int_0^1 x^2(1-x)^3\,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!\,3!}{6!}$；我们随机选取 α 和 n，用辛普森法则（Simpson's rule）验证了 (i)，并对所有 $0 \le k \le n \le 12$ 精确地验证了 (iii)。
- 一个赏心悦目的推论：P 的各项系数全部相等，所以 $\int_0^1 \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$ 与 k 无关。

常见错误

- 比较系数时没有指出 (i) 只在 $\alpha \neq 1$ 的情况下得证；只要补上一句关于多项式（或连续性）的说明，便可填补这个漏洞。
- 在 (ii) 中把 $(1+(\alpha-1)x)^n$ 按 $(\alpha-1)$ 的幂展开：这样得到的多项式是对的，却不是按 α 的幂排列。应改为展开 $\big(\alpha x+(1-x)\big)^n$。

STEP 之外

积分 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ 就是欧拉（Euler）的贝塔函数（beta function）$B(a,b)$，而本题的结果正是 $B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ 在整数情况下的特例。在概率论中，它的意思是：若在 $[0,1]$ 上均匀地选取 p，然后掷 n 枚出现正面的概率为 p 的硬币，则正面的数目由 0 到 n 每一个都同样可能出现，概率各为 $\frac{1}{n+1}$（这正是“所有系数相等”的含义），而这亦是贝叶斯（Bayes）本人那篇著名论文的出发点。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）详细阐述了这背后的贝塔分布和伽玛分布（beta and gamma distributions）。

详细解答

STEP I 1996，第 3 题

纯数学 · 整数的整除性

> **STEP I 1996，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q3

关键思路

要处理被合成数（composite number）如 24 整除（divisibility）的问题，最简单的做法是逐个质数幂（prime power）处理：$24 = 3 \times 8$，而 3 与 8 互质（coprime），所以我们分别证明可被 3 整除和可被 8 整除。因式分解（factorise）之后会得到连续整数之积，而任意 k 个连续整数之中，必有一个是 k 的倍数。其余两部分也可用同一习惯解决：因式分解，或者把 n 写成能显示其余数的形式。

解答

第 (i) 部分

抽出公因式，再运用平方差公式（difference of two squares），

$$n^5 - n^3 = n^3(n^2 - 1) = n^3(n-1)(n+1) = n^2\,(n-1)\,n\,(n+1).$$

可被 3 整除。$n-1$、n、$n+1$ 是三个连续整数，所以其中恰好有一个是 3 的倍数。因此 $3 \mid (n-1)n(n+1)$，从而 $3 \mid n^5 - n^3$。

可被 8 整除。我们按 n 的奇偶性（parity）分情况讨论。

- 若 n 是偶数，设 $n = 2m$，则 $n^3 = 8m^3$，是 8 的倍数。
- 若 n 是奇数，则 $n-1$ 和 $n+1$ 是连续偶数。任意两个连续偶数之中，一个是 4 的倍数，另一个是 2 的倍数，所以 $8 \mid (n-1)(n+1)$。

无论哪种情况，都有 $8 \mid n^3(n-1)(n+1) = n^5 - n^3$。

想一想 为甚么知道 $3 \mid N$ 和 $8 \mid N$ 就可以推出 $24 \mid N$？换成 $4 \mid N$ 和 $6 \mid N$，结论还成立吗？

由于 3 和 8 没有公因数，$8 \mid N$ 表示 $N = 8a$，于是 $3 \mid 8a$ 迫使 $3 \mid a$（因为 3 是质数，而且不整除 8）。所以 $N = 24b$。这个论证对 4 和 6 并不成立，因为两者有公因数 2：12 可同时被两者整除，却不能被 24 整除。

因此，对每个正整数 n，$n^5 - n^3$ 都可被 24 整除，证毕。

第 (ii) 部分

写成 $2^{2n} = 4^n$。运用因式分解 $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$，取 $x = 4$，

$$2^{2n} - 1 = 4^n - 1 = (4-1)\left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4 + 1\right) = 3\left(4^{n-1} + \cdots + 1\right).$$

括号内是整数，所以 $2^{2n} - 1$ 可被 3 整除。

用模算术（modular arithmetic）来说，这等价于：$4 \equiv 1 \pmod 3$，所以 $4^n \equiv 1^n = 1 \pmod 3$。用归纳法(induction)证明也可以：若 $4^k - 1 = 3a$，则 $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3 = 3(4a + 1)$。

第 (iii) 部分

由于 $3 \mid n - 1$，可写 $n = 3k + 1$，其中 $k \geq 0$ 为某个整数。因式分解得

$$n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1).$$

第一个因式是 $n - 1 = 3k$。至于第二个，

$$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (9k^2 + 6k + 1) + (3k + 1) + 1 \\ &= 9k^2 + 9k + 3 \\ &= 3(3k^2 + 3k + 1). \end{aligned}$$

所以每个因式各提供一个 3：

$$n^3 - 1 = 3k \cdot 3(3k^2 + 3k + 1) = 9k(3k^2 + 3k + 1),$$

它可被 9 整除，证毕。（当 $n = 1$ 时，$k = 0$，$n^3 - 1 = 0$，同样可被 9 整除。）

重点在于 $n - 1$ 只提供一个因数 3；第二个来自 $n^2 + n + 1$。要看出这第二个因数，有一个巧妙的方法：$n^2 + n + 1 = (n-1)^2 + 3n$，只要 $3 \mid n - 1$，这就是两个 3 的倍数之和。

验算

- 第 (i) 部分：$n = 2$ 给出 $32 - 8 = 24$，$n = 3$ 给出 $243 - 27 = 216 = 9 \times 24$。由于 $n = 2$ 时刚好得到 24，没有更大的数能整除每一个 $n^5 - n^3$，所以 24 已是最佳结果。
- 第 (ii) 部分：$n = 1, 2, 3$ 分别给出 3、15、63。
- 第 (iii) 部分：$n = 4$ 给出 $63 = 7 \times 9$，$n = 7$ 给出 $342 = 38 \times 9$，与 $9k(3k^2 + 3k + 1)$ 在 $k = 1$ 和 $k = 2$ 时的值吻合。

我们用电脑对所有小于 5000 的 n 验证了全部三个结果（第 (ii) 部分则验证了 $n < 2000$），并确认 $n^5 - n^3$ 各个值的最大公因数（highest common factor）恰好是 24。

常见错误

- 论证时写“$(n-1)n(n+1)$ 可被 6 整除，而 n^2 是 ...”，结果弄不清因数 8 从何而来。偶数的情况需要用到 n^3，而不只是 n。
- 由可被 4 整除和可被 6 整除推断可被 24 整除；两个因数必须互质。
- 在第 (iii) 部分，写到“$n - 1$ 可被 3 整除，所以 $n^3 - 1 = (n-1)(\dots)$ 可被 3 整除”便停下来，这样只得到一个因数 3。

STEP 之外

这三部分其实都是模算术中的命题：模 m 的整数构成一个环（ring），而第 (iii) 部分说的是：若 $n \equiv 1 \pmod 3$，则 $n^3 \equiv 1 \pmod 9$。这是一个称为指数提升（*lifting the exponent*）的一般现象的第一步：若 $p \mid n - 1$，则 $p^{j+1} \mid n^{p^j} - 1$。费马小定理（Fermat's little theorem，$n^p \equiv n \pmod p$）也能解释第 (i) 部分，因为它直接给出 $3 \mid n^3 - n$。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本讲高等算术的数论入门书）是这些思想的一本优美入门读物。

详细解答

STEP I 1996，第 4 题

纯数学 · 以配方法积分

> **STEP I 1996，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q4

关键思路

每当分母是二次式，就先配方（complete the square）：$x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$。一切取决于 $1-a^2$ 的正负。若它是正数，分母是“平方和”，积分会得出反正切（inverse tangent）；若它是负数，分母是平方差（difference of squares），可拆成部分分式（partial fractions），积分会得出对数。之后真正要花工夫的，是把答案整理成题目所给的形式。

解答

以下一律以 I 表示在 $[0,1]$ 上的积分。配方得

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$ 的情况

设 $b=\sqrt{1-a^2}>0$。利用 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$，其中 $u=x+a$，得

$$I=\frac{1}{b}\left[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{其中 } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

（分母在 $[0,1]$ 上永不为零，因为它至少是 $b^2>0$，所以这个积分没有问题。）我们需要的是单独一个反正切，所以取 $\alpha-\beta$ 的正切：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{1+a}{b}-\frac{a}{b}}{1+\frac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

这里用了 $b^2+a^2=1$。最后

$$\frac{b}{1+a}=\frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a}=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

这一步成立，是因为 $1+a>0$。

想一想 由 $\tan(\alpha-\beta)=t$ 真的可以得出 $\alpha-\beta=\tan^{-1}t$ 吗?

只有当 $\alpha-\beta$ 位于 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，即 $\tan^{-1}$ 的值域（range）之内才可以，所以我们必须验证这一点。由于 $(1+a)/b>0$，有 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，而 $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$。此外 $\alpha>\beta$，因为 $\tan^{-1}$ 是递增函数，而 $(1+a)/b>a/b$。所以 $0<\alpha-\beta<\pi$。在这个区间上，tan 只在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上取正值，而我们已求得 $\tan(\alpha-\beta)>0$；因此 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，于是

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\qquad(|a|<1),$$

正是所求。

（一个更巧妙的看法：设 $a=\cos\varphi$，$0<\varphi<\pi$，可得 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ 和 $\beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$，所以 $\alpha-\beta=\frac{\varphi}{2}$，而确实有 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)}=\tan\frac{\varphi}{2}$。）

$|a|>1$ 的情况

设 $c=\sqrt{a^2-1}>0$。这时分母是两个平方之差:

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2-c^2=(x+a-c)(x+a+c),$$

拆成部分分式得

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)}=\frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c}-\frac{1}{x+a+c}\right).$$

这个二次式的根是 $-a\pm c$，两根之积为 1，两根之和为 $-2a$。

先假设 $a>1$。这时 $a>c$（因为 $a^2>a^2-1$），所以当 $x\geq 0$ 时，$x+a-c$ 和 $x+a+c$ 都是正数。因此

$$I=\frac{1}{2c}\Big[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\Big]_0^1=\frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c}-\ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

利用 $(a-c)(a+c)=a^2-c^2=1$，两个分数都可以化简:

- $(1+a-c)(a+c)=(a+c)+(a-c)(a+c)=1+a+c$，所以 $\dfrac{1+a-c}{1+a+c}=\dfrac{1}{a+c}$;
- $a-c=\dfrac{1}{a+c}$，所以 $\dfrac{a-c}{a+c}=\dfrac{1}{(a+c)^2}$。

于是

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

这就是题目所述的结果，因为这里 $a+\sqrt{a^2-1} > 0$，所以它等于自己的绝对值（modulus）。

那么 $a < -1$ 又如何？这时两根 $-a \pm c = |a| \pm c$ 都是正数，而且乘积为 1，所以较小的一个根 $|a| - \sqrt{a^2-1}$ 严格介乎 0 与 1 之间。被积函数（integrand）在 $[0,1]$ 之内有一个单极点（simple pole），在根 r 附近的表现就像某个常数乘以 $1/(x-r)$。所以这个积分并不收敛（converge），严格来说，公式只对 $a > 1$ 成立。（用 $\ln|\cdot|$ 重做同样的部分分式计算，可知公式给出的是柯西主值（Cauchy principal value），即在 r 两旁对称地挖去一小段之后，积分的极限。这就解释了题目中为何有绝对值符号。）

验算

- $a = 0$：积分是 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$，而公式给出 $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$。
- $a = 2$：用辛普森法则（Simpson's rule）算得 0.380173，与 $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$ 吻合。
- 当 $a \to 1$ 时，两个分支都趋向 $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x$。对第二个分支，当 c 很小时 $\ln(a+c) \approx c$；对第一个分支，$\tan^{-1} t \approx t$，而 $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$。

常见错误

- 写下 $\tan^{-1} A - \tan^{-1} B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$，却没有验证两者之差位于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之内。
- 忘记了当 $a < -1$ 时，分母会在 $[0,1]$ 之内变为零。

STEP 之外

这两个答案其实是 a 的同一个函数。在第一个答案中设 $a = \cos\varphi$，在第二个答案中设 $a = \cosh t$，分别得到 $\varphi/(2\sin\varphi)$ 和 $t/(2\sinh t)$；借助复数（$\cosh t = \cos(\mathrm{i}t)$），其中一个正是另一个的解析延拓（analytic continuation）。$a < -1$ 时积分发散（divergence），再靠主值来补救，这让我们初次领略复分析（complex analysis）如何处理积分路径上的极点。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）是领会这一点的绝佳去处。

详细解答

STEP I 1996，第 5 题

纯数学 · 复数的平方根

> **STEP I 1996，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

关键思路

每一部分都为下一部分铺路。第 (i) 部分的重点是比较有理部分与无理部分，并告诉我们 $4-2\sqrt{3}$ 是一个完全平方（perfect square）。第 (ii) 部分要求一个复数平方根（complex square root），经过惯常的“比较实部与虚部”一步之后，问题便归结为第 (i) 部分。第 (iii) 部分是一条二次方程，其判别式（discriminant）原来正是第 (ii) 部分那个数的四倍，所以我们需要的平方根早已准备好了。

解答

第 (i) 部分

展开得

$$(r+s\sqrt{3})^2=(r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

我们希望这等于 $4-2\sqrt{3}$。由于 r 和 s 是有理数（rational number），r^2+3s^2 和 $2rs$ 也是有理数。若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，其中 a,b,c,d 为有理数且 $b\neq d$，则 $\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$ 会是有理数，但事实并非如此。因此我们可以比较有理部分和 $\sqrt{3}$ 的系数：

$$r^2+3s^2=4,\qquad rs=-1.$$

于是 $r\neq 0$，所以 $s=-1/r$，而第一条方程变成

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

若取 $r^2=3$，则 $r=\pm\sqrt{3}$，并非有理数。所以 $r^2=1$，解为

$$r=1,\ s=-1 \qquad \text{和} \qquad r=-1,\ s=1,$$

即 $r+s\sqrt{3}=\pm(1-\sqrt{3})$。的确 $(1-\sqrt{3})^2=1-2\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3}$。

第 (ii) 部分

展开得 $(p+q\mathrm{i})^2=(p^2-q^2)+2pq\,\mathrm{i}$。由于 p 和 q 是实数，我们可以比较实部（real part）与虚部（imaginary part）：

$$p^2-q^2=3-2\sqrt{3},\qquad pq=1-\sqrt{3}.$$

第二条方程显示 $p\neq 0$，所以 $q=(1-\sqrt{3})/p$，而 $q^2=(1-\sqrt{3})^2/p^2=(4-2\sqrt{3})/p^2$。代入第一条方程并乘以 p^2，得

$$p^4-(3-2\sqrt{3})\,p^2-(4-2\sqrt{3})=0.$$

> **想一想** 这是一条以 p^2 为未知数的二次方程，系数看来相当麻烦。有没有快捷的方法把它因式分解?

p^2 的两个根之和必为 $3-2\sqrt{3}$，之积必为 $-(4-2\sqrt{3})$。试试 -1：另一个根便会是 $4-2\sqrt{3}$，而的确 $-1+(4-2\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}$。所以

$$(p^2+1)\left(p^2-(4-2\sqrt{3})\right)=0.$$

由于 p 是实数，$p^2\neq -1$，所以由第 (i) 部分得 $p^2=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$。因此 $p=\pm(\sqrt{3}-1)$，而 $q=(1-\sqrt{3})/p=\mp 1$。解为

$$p=\sqrt{3}-1,\ q=-1\qquad 和\qquad p=1-\sqrt{3},\ q=1.$$

换句话说，$(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i}$ 的平方根是 $\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)$。验算一下：$\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)^2=(4-2\sqrt{3})-1-2(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$，正是所求的数。

第 (iii) 部分

由二次公式（quadratic formula）（它对复数系数同样成立，因为配方法在 $\mathbb{C}$ 上一样行得通），

$$z=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{2(1+\mathrm{i})}=\frac{1\pm\sqrt{1-(1+\mathrm{i})(2\sqrt{3}-2)}}{1+\mathrm{i}},$$

其中 $\pm\sqrt{\ }$ 代表两个复数平方根。根号内的量是

$$1-(2\sqrt{3}-2)-(2\sqrt{3}-2)\mathrm{i}=(3-2\sqrt{3})+2(1-\sqrt{3})\mathrm{i},$$

这正正是第 (ii) 部分的那个数。它的平方根是 $\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)$，所以

$$z=\frac{1\pm\big((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i}\big)}{1+\mathrm{i}},\quad 由此得\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

把分子和分母同乘以 $1-\mathrm{i}$（使分母变成 2）：

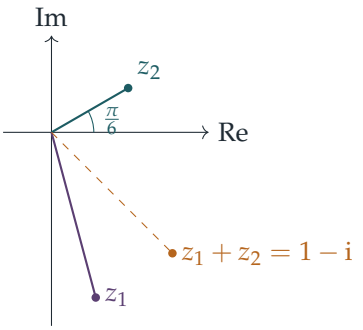
$$z_1 = \frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2 = \frac{\big((2-\sqrt{3})+\mathrm{i}\big)(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

想一想 这算是“尽可能简单的形式”吗？两个根当中，有没有哪一个可以再整理一下？

第二个根可以因式分解：$(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i} = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$，而 $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$。至于第一个根，$|z_1|^2 = \frac{1}{4}\big((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3})\big) = 2$，而 $z_1 = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$ 是 $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ 除以 $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 的商。所以解为

$$z_1 = \tfrac{1}{2}\big((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}\big) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

两种形式（直角坐标形式 (Cartesian form) 或模—辐角形式 (modulus–argument form)）都是完全合格的最终答案。



验算

- 根之和与根之积：对于 $az^2+bz+c=0$，我们需要 $z_1+z_2 = -b/a = 2/(1+\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$ 以及 $z_1z_2 = c/a = (2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i}) = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。由直角坐标形式，$z_1+z_2 = \frac{1}{2}(2-2\mathrm{i}) = 1-\mathrm{i}$；由极式 (polar form)，$z_1z_2 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = (\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$。两者都吻合。
- 数值上，$z_1 \approx 0.366 - 1.366\mathrm{i}$ 而 $z_2 \approx 0.634 + 0.366\mathrm{i}$，把任何一个代入 $(1+\mathrm{i})z^2 - 2z + 2\sqrt{3} - 2$，结果在机器精度之内都是 0。

常见错误

- 在第 (i) 部分，忘记说明*为甚么*可以比较 $\sqrt{3}$ 的系数：这有赖于 r, s 是有理数而 $\sqrt{3}$ 是无理数（irrational number）。没有这个条件，便有无穷多个实数解。
- 在第 (ii) 部分，保留了 $p^2 = -1$，或者把 p 和 q 的正负号配错：$pq = 1 - \sqrt{3} < 0$ 迫使两者异号。
- 在第 (iii) 部分，把整条公式除以 2 时出错，或者让 $1 + \mathrm{i}$ 留在分母而没有把分母实数化。

STEP 之外

第 (i) 部分之所以行得通，是因为 1 和 $\sqrt{3}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性独立（linearly independent），所以 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$ 的表现就像有理数上的一个二维空间；第 (ii) 部分用的是同一个想法，只是换成 $\mathbb{R}$ 上的 1 和 i。这是域扩张（field extension）的起点，大学一年级的代数课程会由此一路发展到伽罗瓦理论（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）涵盖了这些内容，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（复分析的几何视角）则为复数平方根提供了一个优美的几何观点。

详细解答

STEP I 1996，第 6 题

纯数学 · 三角函数求和与积分

> **STEP I 1996，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q6

关键思路

题目给出的恒等式（identity）正是为了裂项相消（telescoping）而设：若把和式 $\sum \cos kx$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，每一项都会变成两个正弦之差，而相邻的差会互相抵消。一旦把 f 写成余弦之和，(ii) 中看似棘手的积分就变成单个余弦的积分，其中大部分在 $[0,\pi]$ 上都等于零。

解答

以下 n 均为正整数。

第 (i) 部分

设 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$。乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，并逐项运用题目给出的公式，

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= \big(\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x\big)+\big(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x\big)+\cdots+\big(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x\big)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

因为每个中间项都以正负号各出现一次，互相抵消。因此

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

当 $0<x\le\pi$ 时，$0<\frac{1}{2}x\le\frac{1}{2}\pi$，故 $\sin\frac{1}{2}x>0$，可以用它来除：

$$\mathrm{f}(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}=1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

? **想一想** f 在 $x = 0$ 处没有定义。那么 $\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 这个积分到底有没有意义?

有。根据第 (i) 部分，在 $0 < x \leq \pi$ 上，函数 f 与余弦多项式 $1 + 2\sum \cos kx$ 相等，而后者在整个 $[0, \pi]$ 上连续（continuous）（在 0 处的值为 $2n + 1$）。改变单独一点的函数值，或让该点没有定义，都不会影响积分，所以我们可以改为对余弦之和积分。

第一个积分。对每个整数 $k \geq 1$，

$$\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

因为 $\sin k\pi = 0$。所以只有常数项留下来：

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

第二个积分。现在

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x.$$

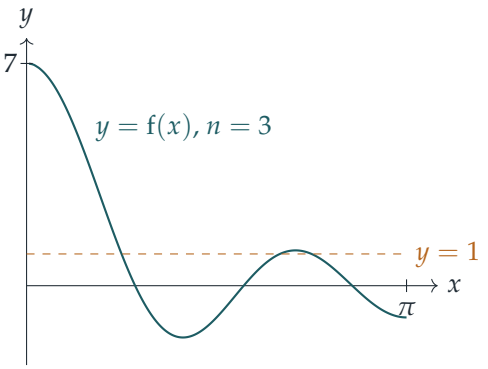
第一个积分是 $[\sin x]_0^\pi = 0$。至于其余的积分，利用 $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$：

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,\mathrm{d}x.$$

这里 $k + 1 \geq 2$，所以第一个积分如上所述等于 0。第二个积分也等于 0，除非 $k - 1 = 0$，此时被积函数（integrand）是 1，积分等于 π。所以只有 $k = 1$ 的一项有贡献，于是

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

（假如容许 n 取 0，则 $\mathrm{f} \equiv 1$，这个积分就会是 0；对每个 $n \geq 1$，它都等于 π。）



这幅图说明了为何第一个答案与 n 无关：0 附近那个高耸的尖峰（高度为 $2n+1$）被其后的振荡抵销，净面积始终等于常数项所占的面积，即 π。

验算

- 当 $x \to 0$ 时，$\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$，而余弦之和在 $x=0$ 处的值为 $1+2n$。两者吻合。
- 在 $x=\pi$ 处：$\mathrm{f}(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$，同时亦有 $1+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$。
- 对 $n=1,\ldots,7$，以中点法则（midpoint rule）对原来的商式作数值积分，两个积分都得出 3.14159265…，与 π 相符。

常见错误

- 忘记说明为何可以除以 $\sin\frac{1}{2}x$：它不等于零，正是因为 $0 < x \leq \pi$。
- 写成对所有 k 都有 $\int_0^\pi \cos kx \cos x \,\mathrm{d}x = 0$，于是第二个积分得出 0；其实 $k=1$ 的一项给出 $\int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$。

STEP 之外

函数 f 就是狄利克雷核（*Dirichlet kernel*），是傅里叶级数（Fourier series）理论的核心对象。第 (ii) 部分的计算是正交性（orthogonality）的例子：$\cos kx$ 与 $\cos mx$ 相乘后在 $[0,\pi]$ 上的积分为零，除非 $k=m$。傅里叶系数正是这样提取出来的，而把一个函数与狄利克雷核相乘再积分，就得到它的傅里叶级数的第 n 个部分和（partial sum）。至于这些部分和在甚么情况下收敛（converge），严谨的论述可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门教材）。

详细解答

STEP I 1996，第 7 题

纯数学 · 一阶微分方程

> **STEP I 1996，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q7

关键思路

“以与水量成正比的速率流出”可以直接写成一条一阶微分方程（first-order differential equation）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$，其中 $k > 0$，其解是一个指数函数（exponential）。把 e^{-k} 记作单一个数 b，指数函数便化为 b^t；同一个代换 $k = -\ln b$ 亦可用来改写第 (ii) 部分的方程。该方程是线性的，所以用积分因子（integrating factor）便可完成。

解答

第 (i) 部分

水是流出的，所以 y 以与 y 成正比的速率减少：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{其中常数} k > 0.$$

只要水箱内仍有水，便有 $y > 0$，所以可以分离变量（separate the variables）：

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

当 $t = 0$ 时 $y = 1$，所以 $c = \ln 1 = 0$。因此

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{其中} b = \mathrm{e}^{-k}.$$

由于 $k > 0$，我们有 $0 < b < 1$；特别地，$b < 1$，正如题目所要求。留意以下结果，稍后会用到：

$$\ln b = -k, \qquad \text{所以} \qquad k = -\ln b > 0.$$

第 (ii) 部分

流出的情况与之前完全相同，速率为 ky，常数 k 亦不变；此外，水以速率 a 流入。所以净变化率是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

? **想一想** 这条方程只涉及 k，那么 $\ln b$ 是从何而来的?

常数 b 是在第 (i) 部分以 $b = \mathrm{e}^{-k}$ 定义的，所以它只描述流出的情况，与其他因素无关；在这里它仍然是同一个数。代入 $k = -\ln b$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

这就是所要求的方程。

这是一条关于 y 的常系数线性方程。积分因子是

$$\exp\left(-\int \ln b\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

全式乘以 b^{-t} 后，左方成为一个恰当导数（exact derivative），因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\,b^{-t}\right) = a\,b^{-t}.$$

两边积分，并利用 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$（因 $\ln b \neq 0$ 而成立），

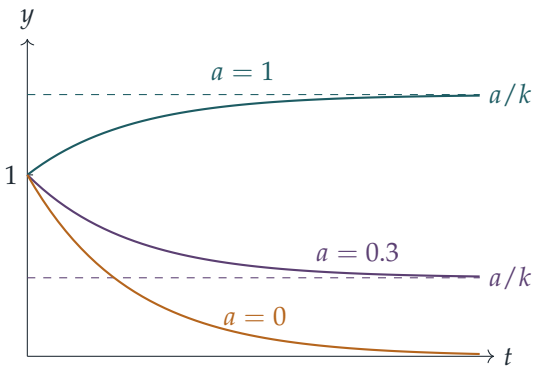
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

当 $t = 0$ 时 $y = 1$，所以 $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$，得 $C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$。全式乘以 b^t，

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right)b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

两种形式都可以接受。第二种较易理解，因为 $-\ln b = \ln(1/b) > 0$：它就是第 (i) 部分的解 b^t，再加上由流入的水所产生的一个正项。

当 $t \to \infty$ 时，$b^t \to 0$（因为 $0 < b < 1$），所以 $y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$。这是平衡水平（equilibrium level），此时流出量 ky 刚好与流入量 a 相抵。若 $a > k$，水箱的水量会上升并趋向这个水平；若 $a < k$，水量则会下降并趋向这个水平。



草图所示为 $b=\frac{1}{2}$（故 $k=\ln 2\approx 0.693$）的情况，分别取 $a=1$、$a=0.3$，并画出第 (i) 部分的曲线 $a=0$ 以作比较。

验算

- 取 $a=0$：答案化为 $y=b^t$，即第 (i) 部分的结果。
- 当 $t=0$ 时：$y=1+\frac{a(1-1)}{-\ln b}=1$。
- 对 $y=b^t+\frac{a}{\ln b}(b^t-1)$ 求导：得 $y'=b^t\ln b+ab^t$，而 $y\ln b+a=b^t\ln b+a(b^t-1)+a=b^t\ln b+ab^t$，两者吻合。
- 数值上，取 $b=\frac{1}{2}$、$a=1$、$t=2$，公式给出 $y\approx 1.3320$；以龙格－库塔法（Runge–Kutta method）逐步求解该微分方程，得到相同的值，而一般而言，对随机选取的 a、b、t，两者相差约在 10^{-13} 以内。

常见错误

- 写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$，之后却忘记了因为水是流出的，$k$ 必须是负数；正是这个符号令 $b<1$ 必然成立。
- 在第 (ii) 部分把 b 当作一个新的未知数。它完全由流出的情况决定，所以 $\ln b=-k$ 可以直接沿用。
- 把 $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t=-b^{-t}/\ln b$ 的符号弄错；可用求导来检查。

STEP 之外

这是最简单的房室模型（compartment model）：一个水箱，输入恒定，输出与存量成正比。同一条方程亦可描述以稳定速率注入血液、再经肾脏清除的药物，或者经电阻器充电

的电容器。每一个解都以指数方式趋向平衡值 a/k，这是稳定不动点（stable fixed point）的一个例子；当你学到微分方程组时，这个概念会变得十分重要。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）讨论了一阶线性方程，以及许多这类混合问题。

详细解答

STEP I 1996，第 8 题

纯数学 · 循环小数

> **STEP I 1996，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

关键思路

循环的数字节其实是一个乔装了的等比级数（geometric series）：每重复一次，数字节就比上一次向右移 k 个位，亦即乘以 10^{-k}。第 (i) 部分是最简单的情况。在第 (ii) 部分，我们把展开式分成开始循环之前的部分（一个有限小数）和循环的尾段（一个等比级数），结果两部分都是整数除以十的幂或除以 $10^k - 1$。

解答

第 (i) 部分

数字节 38 每两个位重复一次，所以

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

这里把公比（ratio）为 $\frac{1}{100}$ 的等比级数求和；由于 $\left|\frac{1}{100}\right| < 1$，这样做是容许的。因为 $38 = 2 \times 19$ 与 $99 = 3^2 \times 11$ 没有公共的质因数（prime factor），所以这已是最简分数（lowest terms）：

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

第 (ii) 部分

（题目印出的展开式 $0 \cdot a_1 a_2 a_2 \cdots$ 是 $0 \cdot a_1 a_2 a_3 \cdots$ 之误。）每个 a_n 都是 0 至 9 的数字，而

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

我们在 $n = N$ 处把这个和分开。

首 N 个数字。 设 b 为十进制数字依次是 $a_1 a_2 \ldots a_N$ 的整数（容许开首有零），即

$$b = \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10^N} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n} = \frac{b}{10^N}.$$

尾段。 条件 $a_{n+k} = a_n$ 对所有 $n > N$ 成立，反复运用它，可得对所有 $m \geq 0$ 及 $1 \leq j \leq k$ 都有 $a_{N+mk+j} = a_{N+j}$（对 m 用归纳法（induction）：下标 $N + (m-1)k + j$ 大于 N，所以可以给它加上 k）。因此在第 N 个位之后，展开式就是数字节 $a_{N+1} a_{N+2} \ldots a_{N+k}$ 不断重复。设 c 为由这些数字组成的整数，

$$c = \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j}.$$

把尾段每 k 项分成一组；由于所有项均为非负，而且级数收敛（converges），这样分组是容许的。对给定的 $m \geq 0$，相应的一组是

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}} = \frac{1}{10^{N+(m+1)k}} \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j} = \frac{c}{10^N} \left(\frac{1}{10^k} \right)^{m+1}.$$

? **想一想** 为甚么每一组恰好是前一组的 10^{-k} 倍?

由第 m 组到第 $m+1$ 组，所用的数字相同（因为有周期性（periodicity）），但每个数字都向右多移了 k 个位，于是每一项都除以 10^k。这就是隐藏在循环小数（recurring decimal）里的等比级数。

把公比为 $10^{-k} < 1$ 的等比级数求和，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{c}{10^N} \cdot \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-k}} = \frac{c}{10^N (10^k - 1)}.$$

把各部分合起来。 把两部分相加，

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N (10^k - 1)},$$

其中 b 是由首 N 个数字 $a_1 \ldots a_N$ 组成的整数，c 是由一个周期 $a_{N+1} \ldots a_{N+k}$ 组成的整数。这就是题目要求的形式。

有理性。 通分后，

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

分子是整数，而由于 $k \geq 1$ 可得 $10^k - 1 \geq 9$，分母是正整数。所以 x 是两个整数之比，即 x 是有理数（rational）。

验算

- 第 (i) 部分是没有循环前部分（pre-period）而 $k = 2$、$c = 38$ 的情况：公式给出 $38/(10^2 - 1) = 38/99$。（若取 $N = 1$，则 $b = 3$ 及 $c = 83$，而 $\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$，结果一致。）
- 取 $0.12345345\ldots$，其中 $N = 2$、$k = 3$、$b = 12$、$c = 345$：$\frac{12}{100} + \frac{345}{100\times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\ldots$
- 我们还随机选取了 500 组循环前部分和循环节，以精确算术把公式与展开式求和的结果比较；全部一致。

常见错误

- 忘记尾段的因子 10^{-N}：循环节由第 $N+1$ 个位开始，而不是由第 1 个位开始。
- 分母用了 10^k 而不是 $10^k - 1$：等比级数的首项是 $c\,10^{-N-k}$，而不是 $c\,10^{-N}$。
- 在 (i) 中没有检查是否最简分数：要说明为甚么 $\gcd(38, 99) = 1$。

STEP 之外

逆命题（converse）也成立：每个有理数的小数展开式最终都会循环，因为用 q 作长除法（long division）时只有 q 个可能的余数，所以其中一个必定重复出现。因此，无理数（irrationals）正是小数展开式永不进入循环的那些实数。$1/q$ 的周期长度与 10 模 q 的阶（order）有关，这是初尝群论（group theory）在数论中的滋味。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算术）把这些关于同余（congruences）和周期的想法阐述得十分精彩。

详细解答

STEP I 1996，第 9 题

力学 · 弹性绳与能量

STEP I 1996，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q9

关键思路

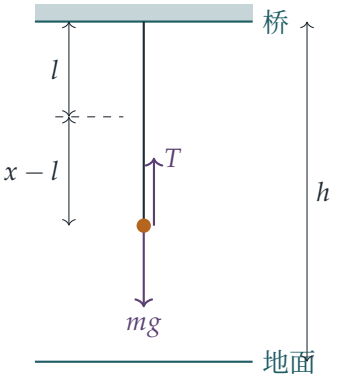
这一题从头到尾都是能量的问题。只有重力和绳的张力（tension）在作功，而两者都是守恒力（conservative force），所以我们根本不必完整地解运动方程（equation of motion）。“仅仅避过地面”的意思是：她到达地面的一刻，速率刚好为零。最大速率出现在加速度变号之处，也就是张力与她的重量互相平衡的位置。

解答

我们把跳跃者视为一个从桥上由静止出发的质点（particle），把绳视为轻绳并服从胡克定律（Hooke's law），同时忽略空气阻力。设 x 为她已下落的距离。当 $x \le l$ 时，绳是松弛的，她处于自由下落（free fall）状态。当 $x > l$ 时，伸长量（extension）为 $x - l$，由胡克定律得张力

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x - l}{l},$$

而绳中储存的弹性势能（elastic energy）为 $\dfrac{mg}{k} \cdot \dfrac{(x-l)^2}{2l}$。



桥的高度

在最低点，她瞬间静止。她仅仅避过地面，所以这个最低点就是地面本身，即 $x = h$。显然 $h > l$：假如绳从未拉紧，她便会一直自由下落，并以相当的速率撞向地面。由离开桥面到最低点，动能（kinetic energy）在开始和结束时都是零，所以失去的重力势能全部转移到绳中：

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

两边乘以 $2kl/(mg)$，得 $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$，所以

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

这正是所需的结果。由二次公式（quadratic formula），

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k + 1 \pm \sqrt{k^2 + 2k}\right).$$

想一想 我们要的是哪一个根？另一个根又为甚么会出现？

由于 $k > 0$，我们有 $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$，所以取负号时会得出 $h < l(k+1-k) = l$。但能量方程假设了绳被拉长了 $h - l$，这只有在 $h > l$ 时才有意义。这个多余的根来自平方：对于一个绳实际上无法提供的“压缩”，它给出相同的 $(h-l)^2$ 值。（两根之积为 l^2，所以其中一个大于 l，另一个则小于它。）因此

$$h = l\left(k + 1 + \sqrt{k^2 + 2k}\right).$$

最大速率

绳仍然松弛时，她以 g 向下加速。绳一旦拉紧，沿向下方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

当 $x - l < kl$ 时，此式为正，其后则为负。所以她一直加速，直至伸长量为 kl，即张力等于她的重量的那一点，此后便开始减速。因此她的最大速率在 $x = l + kl$ 处达到。由桥面到这一点应用能量守恒（conservation of energy），

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l + kl) - \frac{mg}{k} \cdot \frac{(kl)^2}{2l} \\ &= mgl(1 + k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

乘以二再除以 m，

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k + 2)gl,$$

这正是所需的结果。

验算

- 当 $k \to 0$ 时，绳变得非常硬。这时 $h \to l$（她几乎没有把绳拉长），而 $v^2 \to 2gl$，即下落距离 l 后的自由下落速率；这是合理的，因为绳几乎立刻把她停住。
- 随机选取 k 和 l，以数值方法逐步求解运动方程，所得的最低点和最大速率与公式吻合至小数点后五位。例如，$k = 1.5$、$l = 10\,\mathrm{m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 给出 $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$ 和 $v^2 = 343$，所以 $v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。

常见错误

- 以为最大速率出现在绳刚拉紧的一刻。那时她仍在加速，因为张力为零。
- 计算弹性势能时，用了整段下落距离 x，而不是伸长量 $x - l$。
- 保留 h 的两个根，而没有检查是否 $h > l$。

STEP 之外

绳一旦拉紧，运动便是以平衡伸长量 kl 为中心的简谐运动（simple harmonic motion），所以下落的后半段是正弦曲线的一部分，角频率（angular frequency）为 $\sqrt{g/(kl)}$。像这样在自由下落与振子之间切换的分段系统，正好让人初步认识能量方法和相平面（phase plane）图像如何处理不光滑的力。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）在这个程度上仔细地阐述了能量守恒和振动。

详细解答

STEP I 1996，第 10 题

力学 · 动量守恒

STEP I 1996，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q10

关键思路

这里要用到两个守恒关系：动量守恒（momentum is conserved；爆炸前动量为零），以及爆炸后的动能（kinetic energy）为 E。只要知道质量如何分配，这两个关系合起来便能确定两个速率，于是相对速率（relative speed）就成为质量分配方式的函数。要把它减至最小，归根究底只需一个不等式，而由于 $m_1 + m_2$ 是固定的，算术–几何平均不等式（AM–GM inequality）正是最自然的工具。

解答

我们把两个部分看作质点（particles），假设爆炸过程中没有质量损失，所以 $m_1 + m_2 = M$，并假设爆炸期间没有外力（external forces）作用。



动量。 太空船起初静止，所以爆炸前的总动量为零，爆炸后亦因此为零。两个动量 $m_1\mathbf{v}_1$ 与 $m_2\mathbf{v}_2$ 必须互相抵消，所以两个部分沿同一直线朝正好相反的方向运动，并且

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

其中 $p > 0$ 是两者动量的共同大小。由于两个部分朝相反方向运动，它们的相对速率确实是 $v_1 + v_2$。

能量。 爆炸后的全部动能都来自爆炸，所以

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

因此 $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$。

相对速率。 利用 $v_1 = p/m_1$ 和 $v_2 = p/m_2$，

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

所以

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

想一想 E 和 M 都是固定的。剩下唯一可以由我们自由改变的是甚么？我们又希望它朝哪个方向变化？

可以改变的只有质量的分配方式；要使 v_1+v_2 尽量小，就要在 $m_1+m_2=M$ 的条件下，使乘积 m_1m_2 尽量大。根据算术–几何平均不等式（两个质量皆为正数），

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

等号成立当且仅当 $m_1 = m_2 = \tfrac{1}{2}M$。（等价地，$m_1m_2 = \tfrac{1}{4}M^2 - \tfrac{1}{4}(m_1-m_2)^2$。）因此

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

而由于速率是非负的，我们可以取平方根：

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

当太空船分裂成相等的两半时，这个界便可达到，此时每一半的速率都是 $\sqrt{2E/M}$。所以相对速率的最小可能值是 $(8E/M)^{1/2}$，正如题目所求。

验算

- 相等的两半：每一半的动能为 $\tfrac{1}{2}E = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}Mv^2$，所以 $v = \sqrt{2E/M}$，而 $2v = \sqrt{8E/M}$，与所得的界吻合。
- 极端的分配：当 $m_1 \to 0$ 时，$m_1m_2 \to 0$，相对速率趋向无穷大。这是合理的，因为一块极小的碎片若带走一部分能量，就必须运动得非常快。

- 单位：E/M 的单位是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，所以它的平方根是速率。
- 数值上，取 $M = 7$ 和 $E = 3$，让 m_1 在 $(0,7)$ 上逐一取值，所得的最小相对速率为 $1.85164\ldots$，在 $m_1 = 3.5$ 时出现，与 $\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$ 相符。

常见错误

- 忘记说明两个部分为何朝相反方向运动；正是这一点令相对速率是 $v_1 + v_2$ 而不是 $|v_1 - v_2|$。
- 对 m_1 求最小值时没有用到 $m_1 + m_2 = M$；正是这个约束条件令问题变成一维。
- 只证明了 $(8E/M)^{1/2}$ 是下界（lower bound），却没有指出这个下界确实可以达到（当 $m_1 = m_2$ 时）。

STEP 之外

这是在质心参考系（centre-of-mass frame）中处理问题的最简单例子：在这个参考系中，二体分裂所产生的动量总是大小相等、方向相反，而动能为 $p^2/(2\mu)$，其中 $\mu = m_1 m_2/M$ 是约化质量（reduced mass）。这里 $(v_1 + v_2)^2 = 2E/\mu$，而约化质量在两个质量相等时最大。核衰变和二体轨道的背后也是同一个想法；Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对此有仔细的阐述。

详细解答

STEP I 1996，第 11 题

力学 · 抛体运动

STEP I 1996，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

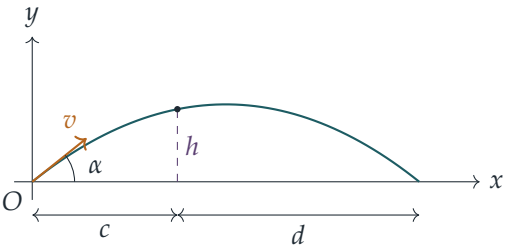
step.maths.org/questions/96-s1-q11

关键思路

抛体（projectile）的路径是一条抛物线（parabola），而我们知道它与地面相交的两个位置：$x = 0$ 和 $x = c + d$。二次函数（quadratic）一旦知道了根（roots），就只差一个常数未定，所以轨迹（trajectory）必定是 $y = kx(c + d - x)$，其中 k 为某个常数。点 (c, h) 决定了 k 的值，再与标准的轨迹方程比较，便可把 k 化为 $\tan\alpha$，继而化为 v^2。

解答

我们把质点（particle）视为只受重力作用而自由运动的点质量（point mass），不计空气阻力（air resistance）；取 O 为原点，x 轴沿运动方向水平，y 轴铅垂向上。设射程（range）为 $R = c + d$，并记 $T = \tan\alpha$。



抛射角

初速度的分量为 $v\cos\alpha$ 和 $v\sin\alpha$，因此经过时间 t 后的位置是 $x = vt\cos\alpha$，$y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$。利用 $t = x/(v\cos\alpha)$ 消去时间，得轨迹方程

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

质点在 $x = R$ 处着地，所以该处 $y = 0$。由于 $R \neq 0$，我们可以除以 R：

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

把这个结果代回轨迹方程，

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{T\,x(R-x)}{R}.$$

? **想一想** 为甚么值得在使用点 (c,h) 之前，先把 $g/(2v^2\cos^2\alpha)$ 换掉?

因为 $(*)$ 把 v 完全消去，只剩下一条以 T 为唯一未知数的方程。从几何角度看，我们已把抛物线写成因式分解的形式，它的两个根 0 和 R 一目了然。现在点 (c,h) 在路径上，而 $R - c = d$，所以

$$h = \frac{T\,cd}{c+d}, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

这正是所要证明的结果。

抛射速率

把 $(*)$ 移项，并利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

由第一个结果，$\dfrac{R}{T} = \dfrac{cd}{h}$ 及 $RT = \dfrac{(c+d)^2h}{cd}$。因此

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

全题至此完成。

验算

- 根据算术—几何平均不等式（AM–GM inequality），$\frac{R}{T} + RT \geq 2R$，所以 $v^2 \geq gR$，而等号恰好在 $T = 1$ 时成立。这就是大家熟悉的事实：在给定速率下，最大射程为 v^2/g，并在 45° 时达到。

- 如果点 (c,h) 是飞行路径的最高点，则 $c=d$，且 $\tan\alpha=2h/c$，这与标准结果吻合：最大高度等于射程的四分之一乘以 $\tan\alpha$。
- 数值上，取 $g=9.81$、$c=3$、$d=5$ 和 $h=2$，公式给出 $\tan\alpha=\frac{16}{15}$ 及 $v^2\approx 78.64$。以细小的时间步长逐步模拟运动，质点在 $x=3$ 处经过高度 2.000，并在 $x=8.000$ 处着地。

常见错误

- 漏掉轨迹方程中的 $\cos^2\alpha$，或者把 $\sec^2\alpha$ 换成 $1+\tan\alpha$ 而不是 $1+\tan^2\alpha$。
- 试图直接由“在 $x=c$ 处高度为 h”和“在 $x=c+d$ 处高度为 0”这两条方程解出 v 和 α。这样做是可行的，但代数运算比先用 $(*)$ 消去 v 繁重得多。

STEP 之外

把二次函数用它的根来表示，这个技巧是一个重要思想的小小例子：多项式由它的零点决定，只差一个常数倍，由此可引伸至插值（interpolation），以及复数（complex numbers）范围内的因式定理（factor theorem）。在力学中，固定 v 而让 α 变化，会得到一族抛物线，它们的包络线（envelope）就是“安全抛物线”（parabola of safety），即抛体所能到达的所有点的边界。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学导论）以大学一年级的程度讨论抛体运动及其延伸课题（包括空气阻力）。

详细解答

STEP I 1996，第 12 题

概率与统计 • 随机样本的最大值

STEP I 1996，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q12

关键思路

阅卷员的选择，归根究底就是从 $\{1,2,\ldots,m\}$ 中选出一个由 n 个不同分数组成的集合，而每一个这样的集合出现的机会均等。因此，概率（probability）就是集合的数目除以 $\binom{m}{n}$。说最高分数是 k，即是固定了其中一个分数，余下的 $n-1$ 个则要从比它小的分数中选出。恒等式（identity）随之唾手可得，因为各概率之和为 1。至于期望值（expectation），窍门是把 $k\binom{k-1}{n-1}$ 还原成单独一个二项式系数（binomial coefficient），这样便可以再次使用同一条恒等式。

解答

K 的分布

阅卷员给出 n 个互不相同的分数，而根据对称性，$\{1,\ldots,m\}$ 中每一个大小为 n 的子集（subset），成为所用分数集合的机会均等。（哪一份答卷得到哪一个分数，对 K 并无影响。）这样的子集共有 $\binom{m}{n}$ 个。

事件 $K=k$ 发生，当且仅当该集合包含 k，而其余 $n-1$ 个分数全部落在 $\{1,\ldots,k-1\}$ 之内。选出这 $n-1$ 个分数的方法有 $\binom{k-1}{n-1}$ 种。这需要 $k-1\geq n-1$，即 $k\geq n$：n 个互不相同的正整数之中，最大的一个至少是 n。此外，当然还有 $k\leq m$。



（图中所示为 $m=10$、$n=4$、$k=7$ 的情况。）因此

$$\mathrm{P}(K=k)=\binom{k-1}{n-1}\Big/\binom{m}{n},\qquad n\le k\le m.$$

恒等式

K 必定恰好取 $n, n+1, \dots, m$ 其中一个值，所以这些概率之和为 1：

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{n-1}\Big/\binom{m}{n}=1\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{n-1}=\binom{m}{n}.$$

这对所有满足 $1\le n\le m$ 的整数都成立，下一步正要用到这一点。

期望值

根据定义，

$$\mathrm{E}(K)=\frac{1}{\binom{m}{n}}\sum_{k=n}^{m}k\binom{k-1}{n-1}.$$

> **想一想** 怎样才能消去因子 k，使恒等式可以再次派上用场？

把它并入二项式系数之中：

$$k\binom{k-1}{n-1}=\frac{k\,(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!}=n\cdot\frac{k!}{n!\,(k-n)!}=n\binom{k}{n}.$$

现在 $\binom{k}{n}=\binom{(k+1)-1}{(n+1)-1}$。当 k 由 n 取到 m 时，$j=k+1$ 由 $n+1$ 取到 $m+1$。于是，以 $n+1$ 和 $m+1$ 代替 n 和 m 来使用恒等式（这是容许的，因为 $1\le n+1\le m+1$），便得

$$\sum_{k=n}^{m}\binom{k}{n}=\sum_{j=n+1}^{m+1}\binom{j-1}{(n+1)-1}=\binom{m+1}{n+1}.$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K)&=\frac{n\binom{m+1}{n+1}}{\binom{m}{n}}=n\cdot\frac{(m+1)!}{(n+1)!\,(m-n)!}\cdot\frac{n!\,(m-n)!}{m!}\\&=\frac{n(m+1)}{n+1}.\end{aligned}$$

验算

- $n=m$：每个分数都用上了，所以必定有 $K=m$，而确实 $\frac{m(m+1)}{m+1}=m$。
- $n=1$：K 是单独一个分数，在 $\{1,\dots,m\}$ 上均匀分布，平均值为 $\frac{m+1}{2}$，与公式吻合。

- $m=6$、$n=2$: 列出 $\{1,\ldots,6\}$ 中全部 15 对, 得 $\mathrm{E}(K)=\frac{70}{15}=\frac{14}{3}$, 而公式给出 $\frac{2\cdot 7}{3}=\frac{14}{3}$。我们已就所有 $1\le n\le m\le 9$ 逐一列出每个子集，验证了分布、恒等式和平均值。
- 有一个漂亮的方法可以看出答案：选出的 n 个分数把余下的 $m-n$ 个分数分成 $n+1$ 个间隔，各间隔的期望大小相等，均为 $\frac{m-n}{n+1}$。于是 $\mathrm{E}(K)=m-\frac{m-n}{n+1}=\frac{n(m+1)}{n+1}$。

常见错误

- 分子数的是把分数分配给答卷的有序方式，分母数的却是无序的集合（或者反过来）。只要前后一致，两种数法都可行，因为因子 $n!$ 会互相抵消。
- 用了 $\binom{k}{n}$ 而不是 $\binom{k-1}{n-1}$。前者数的是所有分数都不超过 k 的集合，而不是最高分数等于 k 的集合。

STEP 之外

这条恒等式就是帕斯卡三角形（Pascal's triangle）中的“曲棍球棒”恒等式（hockey-stick identity），而我们在这里是用两种方法数同一样东西来证明它，这是组合数学中的标准技巧。K 是不放回抽取的随机样本中的最大值，属于顺序统计量（order statistic）。“德国坦克问题”（German tank problem）把本题倒过来，由观察所得的 K 去估计 m：从 $\mathrm{E}(K)=\frac{n(m+1)}{n+1}$ 解出 m，便得到无偏估计量（unbiased estimator）$\frac{n+1}{n}K-1$。想进一步了解顺序统计量和计数论证，可参阅 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门教材）。

详细解答

STEP I 1996，第 13 题

概率与统计 · 离散分布与期望值

STEP I 1996，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q13

本题在 *Beyond STEP* 第 12.11 节邮票、杯子与 e 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/stamps-and-e.html

关键思路

游戏在第一次猜错时结束，所以 $N = k$ 的意思是“用 $2, 3, \ldots, k-1$ 个杯时都猜中，然后用 k 个杯时猜错”。把这些概率（probability）相乘，分母便会出现阶乘（factorial）；而求和式中出现阶乘，正强烈暗示指数级数（exponential series）$\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$ 即将登场。计算期望值的窍门，是把 k 的因子与 $k!$ 约去，使每个和都变成 $\sum 1/n!$ 平移后的版本。

解答

N 的分布

把 c 个杯打乱之后，Jim 实际上是随机乱猜，所以他猜中的概率是 $1/c$，猜错的概率是 $1 - 1/c$。每一回合都重新打乱一次，所以各回合互相独立（independent）。

由于杯的数目至少有两个，故 $N \geq 2$。对于 $k \geq 2$，事件 $N = k$ 发生，当且仅当 Jim 用 $2, 3, \ldots, k-1$ 个杯时都猜中，然后用 k 个杯时猜错。由独立性，

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(N = k) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{k-1}{k} \\ &= \frac{k-1}{k!}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

（当 $k = 2$ 时，猜中部分的乘积是空积，我们得到 $\frac{1}{2}$，正如所料。）

值得留意的是，这个结果有一个简洁的等价形式：$N > k$ 表示 Jim 用 $2, \ldots, k$ 个杯时都猜

中，所以

$$\mathrm{P}(N > k) = \frac{1}{k!} \qquad (k \geq 1).$$

事实上 $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}$，与上面的公式吻合。当 $k \to \infty$ 时，这个概率趋向 0，所以游戏以概率 1 结束，而各概率之和为 1。

期望值

把 k 与 $k!$ 约去，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N) &= \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e},\end{aligned}$$

其中设 $j = k-2$，并在 $x = 1$ 处使用 $\mathrm{e}^x = \sum_{j\geq 0} x^j/j!$。这就是所要求的结果。

方差

> **想一想** 这里哪一个二阶矩（second moment）最容易求和：$\mathrm{E}(N^2)$ 还是 $\mathrm{E}\big(N(N-1)\big)$？

两者皆可，因为 $k^2\,\mathrm{P}(N=k) = k \cdot \dfrac{k(k-1)}{k!}$ 中的因子 $k(k-1)$ 本身已能干净利落地约去。我们求得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N^2) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k-2)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+2}{j!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} + 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e} + 2\mathrm{e} = 3\mathrm{e},\end{aligned}$$

其中在中间一步，$\sum j/j!$ 的 $j=0$ 项为零，而当 $j \geq 1$ 时 $j/j! = 1/(j-1)!$。因此

$$\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \big(\mathrm{E}(N)\big)^2 = 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}(3-\mathrm{e}) \approx 0.766.$$

验算

- 各概率 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{30}, \ldots$ 之和为 1，这可由尾部形式 $\mathrm{P}(N > k) = 1/k!$ 看出。
- 利用尾部公式，$\mathrm{E}(N) = \sum_{k\geq 0} \mathrm{P}(N > k) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \mathrm{e}$，这是得出同一答案的另一条独立途径。
- 方差（variance）为正数，这是必然的，因为 $\mathrm{e} < 3$。精确求和得 $\mathrm{E}(N) = 2.71828\ldots$ 及 $\mathrm{Var}(N) = 0.76579\ldots$，而模拟 400 000 局游戏所得的平均值为 2.720，方差为 0.767。

常见错误

- 把分布由 $k = 1$ 开始：游戏一开始已有两个杯，所以 $N \geq 2$。
- 漏掉代表猜错的最后一个因子 $1 - \frac{1}{k}$，结果得出 $1/(k-1)!$，而这些“概率”之和是 $\mathrm{e} - 1$，而不是 1。
- 写成 $\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)$，而没有减去 $\big(\mathrm{E}(N)\big)^2$。

STEP 之外

尾和公式（tail-sum formula）$\mathrm{E}(N) = \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}(N > k)$ 对任何取值于 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 的随机变量（random variable）都成立，是大学一年级的标准工具，往往能把繁复的期望值计算化为一行算式，正如本题所见。要把所有矩一并整理起来，更简洁的方法是使用概率生成函数（probability generating function）$G(s) = \mathrm{E}(s^N)$。在本题中可算出 $G(s) = 1 + (s-1)\mathrm{e}^s$，由此 $G'(1) = \mathrm{e}$ 及 $G''(1) = 2\mathrm{e}$ 立即给出平均值和方差。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）正是以这种精神阐述生成函数。

详细解答

STEP I 1996，第 14 题

概率与统计 · 游程与条件概率

STEP I 1996，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s1-q14

关键思路

按当前这一段连续结果如何结束来取条件（conditioning）。硬币一旦换面，之前发生的一切就再无关系：旧的一段连续结果已被打断，而新的一段长度为一。因此，掷出正面之后，只要一出现反面，游戏便随即“重新开始”，所处的状态与第一次投掷就掷出反面时完全相同；反之亦然。由此得到两条含两个未知数的线性方程。

解答

记 $x = \mathrm{P}(A \mid H)$ 及 $y = \mathrm{P}(A \mid T)$。各次投掷自始至终互相独立（independent）。我们取 $r, s \geq 1$。

$\mathrm{P}(A \mid H)$ 的方程

假设第一次投掷得正面。此时我们有一段长度为一的连续正面，而连续反面尚未开始。考虑接下来的 $r-1$ 次投掷（第 2 至第 r 次）。

- 若这些投掷全为正面，其概率为 p^{r-1}，则在第 r 次投掷时完成一段 r 个连续正面。期间完全没有出现过反面，所以必定没有 s 个连续反面抢先出现，故 A 发生。
- 否则，其概率为 $1-p^{r-1}$，在连续正面的长度达到 r 之前，第 $2, \ldots, r$ 次投掷之中出现了反面。在第一个这样的反面出现时，连续正面未达到 r 便被打断，而此前并无反面出现，所以 s 个连续反面亦未曾出现。此刻我们手上恰好有一段长度为一的连续反面，而之前的一切都不可能对日后任何一段连续结果有所贡献。

? **想一想** 为甚么从该个反面起计，A 发生的概率恰好是 $\mathrm{P}(A \mid T)$?

第一次投掷得反面之后，情况是：有一段长度为一的连续反面，没有进行中的连续正面，而且往后的投掷与过去独立。这正正是上述第二种情形中第一个反面出现时的情况。由于往后的投掷与之前的投掷独立，而两种连续结果中哪一种先出现，只取决于当前这一段连续结果和往后的投掷，所以从该刻起 A 的条件概率（conditional probability）为 y。因此，根据全概率公式（law of total probability），

$$\mathrm{P}(A \mid H) = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\mathrm{P}(A \mid T),$$

所以 $\alpha = r - 1$。

$\mathrm{P}(A \mid T)$ 的方程

假设第一次投掷得反面。考虑第 2 至第 s 次投掷。

- 若全为反面（概率为 q^{s-1}），则在任何正面出现之前已完成一段 s 个连续反面，故 A 不发生。
- 否则（概率为 $1 - q^{s-1}$），在反面连续出现 s 次之前出现了正面。在该个正面出现时，我们有一段长度为一的连续正面，而反面方面并无任何进行中的连续结果，这正是第一次投掷得正面之后的情况。所以从该处起，A 发生的概率为 x。

因此

$$\mathrm{P}(A \mid T) = \left(1 - q^{s-1}\right)\mathrm{P}(A \mid H),$$

所以 $\beta = s - 1$。

（边界情况同样吻合。若 $r = 1$，第一条方程给出 $x = 1$，这是对的，因为单单一个正面已经是一段长度为 r 的连续正面。若 $s = 1$，第二条方程给出 $y = 0$。）

求解

把第二条方程代入第一条：

$$x = p^{r-1} + \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right)x.$$

现在

$$1 - \left(1 - p^{r-1}\right)\left(1 - q^{s-1}\right) = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1},$$

此式为正数（当 $0 < p < 1$ 时，它至少为 $p^{r-1} > 0$，因为 $q^{s-1}(1 - p^{r-1}) \geq 0$）。所以我们可以除以它。记 $D = p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}$，则

$$\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{p^{r-1}}{D}, \qquad \mathrm{P}(A \mid T) = \frac{p^{r-1}\left(1 - q^{s-1}\right)}{D}.$$

最后，以 $\mathrm{P}(H) = p$ 及 $\mathrm{P}(T) = q$ 应用全概率公式：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= p\,\mathrm{P}(A \mid H) + q\,\mathrm{P}(A \mid T)\\ &= \frac{p^{r-1}\left(p + q - q^{s}\right)}{D}\\ &= \frac{p^{r-1}\left(1 - q^{s}\right)}{p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}},\end{aligned}$$

其中用到 $p + q = 1$。

验算

- 对称性：对于公平硬币且 $r = s$，答案应为 $\frac{1}{2}$。取 $p = q = \frac{1}{2}$ 及 $r = s = n$，分子为 $2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，分母为 $2^{2-n} - 2^{2-2n} = 2 \cdot 2^{1-n}(1 - 2^{-n})$，得 $\frac{1}{2}$。
- 简单情况：$r = 1$ 时得 $\mathrm{P}(A) = 1 - q^{s}$，即首 s 次投掷并非全为反面的概率，这是正确的。
- 当 $p = \frac{1}{2}$、$r = 3$、$s = 2$ 时，公式给出 $\mathrm{P}(A \mid H) = \frac{2}{5}$、$\mathrm{P}(A \mid T) = \frac{1}{5}$ 及 $\mathrm{P}(A) = \frac{3}{10}$。我们已通过精确求解整条马可夫链（Markov chain）确认这个结果，而模拟 200 000 局游戏所得的结果为 0.298。

常见错误

- 用了 p^{r} 而非 p^{r-1}：第一个正面已经给定，所以只需再多 $r - 1$ 个。
- 忘记 $\mathrm{P}(A)$ 最后还须以 p 和 q 加权。单是条件概率并不是答案。

STEP 之外

这个论证是对马可夫链所作的*首步分析*（first-step analysis）：状态是“当前的面和连续长度”，而重新开始这一性质就是马可夫性质（Markov property）。同一方法可求出任何正反面图样的吸收概率（absorption probability）和期望等待时间（expected waiting time），并进一步引向 Penney 游戏（Penney's game），当中某些图样竟然出人意表地胜过另一些图样。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）以合适的程度讲解马可夫链和首步分析。

详细解答

STEP II 1996，第 1 题

纯数学 · 二项式级数的系数

> **STEP II 1996，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q1

关键思路

三个括号相乘后，某一项的系数（coefficient）等于一个总和：从每个括号各选一项，使各项的幂次加起来等于目标幂次，再把所有这样的选法加起来。在 (i) 中，这意味著要小心整理一个有限的计数。在 (ii) 中，系数 $1, -2, 3, -4, \ldots$ 可以认出是 $(1+x)^{-2}$ 的系数，而括号内多出来的项，正好足以令截断在 x^6 处不产生任何影响。

解答

第 (i) 部分

把括号写成 $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$，其中

$$a_k = (-1)^k (k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

从三个因式中分别选出 $a_p x^p$、$a_q x^q$、$a_r x^r$，当且仅当 $p+q+r = 6$ 时才会对 x^6 有贡献，所以我们要求的系数是

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0 \le p,q,r \le 4}} a_p a_q a_r.$$

每一项的符号都是 $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$，因此可以不理会符号，只需把乘积 $(p+1)(q+1)(r+1)$ 加起来。

> **想一想** 怎样才能确保没有遗漏任何一种指数的选法，也没有重复计算？

先列出所有总和为 6、且每个数都不超过 4 的无序三元组 $\{p, q, r\}$，然后乘以从三个（可区分的）括号中取出这些指数的次序数目：若三个数各不相同，有 6 种次序；若恰好有

两个相等，有 3 种；若三个都相等，则只有 1 种。

指数	乘积 $(p+1)(q+1)(r+1)$	次序数目	贡献
$4,2,0$	$5\cdot 3\cdot 1=15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot 2\cdot 2=20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot 4\cdot 1=16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot 3\cdot 2=24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot 3\cdot 3=27$	1	27

以上已包括所有可能：最大的数只能是 4、3 或 2（不可能更小，因为 $3\times 1<6$；也不可能超过 4），而对于每个最大的数，我们已列出把余下部分拆成两个较小部分的所有方法。相加得

$$90+60+48+144+27=369,$$

所以 x^6 的系数是 $\boxed{369}$。

第 (ii) 部分

现在括号是 $Q(x)=\sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$。二项展开式（binomial expansion）在 $|x|<1$ 时成立，给出

$$(1+x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

这是因为 $\binom{-2}{k}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!}=(-1)^k(k+1)$。所以 $Q(x)$ 就是 $(1+x)^{-2}$ 的展开式在 x^6 项之后截断的结果：

$$(1+x)^{-2}=Q(x)+x^7R(x)$$

其中 $R(x)$ 是某个幂级数（power series）。

? **想一想** 为甚么缺少了的尾段 $x^7R(x)$ 不会影响立方中 x^6 的系数?

取立方，得

$$(1+x)^{-6}=Q(x)^3+3Q(x)^2\,x^7R(x)+3Q(x)\,x^{14}R(x)^2+x^{21}R(x)^3.$$

第一项之后的每一项都是 x^7 乘以一个幂级数，所以不含任何低于 x^7 的 x 的幂。因此 $Q(x)^3$ 中 x^6 的系数等于 $(1+x)^{-6}$ 中 x^6 的系数。（换个说法：指数加起来等于 6 的乘积，绝不可能用到任何一个因式中次数为 7 或以上的项。）

再用一次二项展开式，

$$\binom{-6}{6}=\frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720}=\binom{11}{5}=462.$$

所以 $Q(x)^3$ 中 x^6 的系数是 $\boxed{462}$。

验算

第 (ii) 部分可以独立地验证第 (i) 部分。两个括号的分别只在于 $-6x^5$ 和 $7x^6$ 这两项，所以 $462 - 369$ 应该等于所有用到其中一项的贡献的总和。用到 $7x^6$ 的项，必须从另外两个括号各取 1：有 3 个位置，每个给出 7，合共 21。用到 $-6x^5$ 的项，必须从另外两个括号取 $-2x$ 和 1：有 $3 \times 2 = 6$ 种排法，每种给出 $(-6)(-2)(1) = 12$，合共 72。果然 $21 + 72 = 93 = 462 - 369$。用电脑把立方直接乘开，亦得出 369 和 462。

常见错误

- 忘记计算次序：指数 $4, 2, 0$ 可以用 6 种方式从三个括号中取得，而不是 1 种。
- 在第 (i) 部分把含有 5 或 6 的三元组也计算在内，但该括号只到 x^4 为止。
- 逐项担心符号：由于指数的和总是 6，每一个贡献都是正数。

STEP 之外

(ii) 中的论证是*形式幂级数*（formal power series）理论的起点：级数可以逐个系数相乘，完全不必考虑收敛（convergence）问题，而乘积中 x^n 的系数只取决于每个因式中直至 x^n 为止的各项。以这种方式通过生成函数（generating function）来处理数列，是一种强大的计数工具；例如，$(1 - x)^{-m}$ 中 x^n 的系数，就是把 n 写成 m 个非负整数的有序和的方法数目。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 进阶题解）收录了更多这类展开式的 STEP 式练习。

详细解答

STEP II 1996，第 2 题

纯数学 · 非线性联立方程

STEP II 1996，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q2

关键思路

这组方程对 x、y、z 而言并非线性，但每一项都只是三个乘积 yz、zx、xy 其中之一。把这三个乘积当作未知数，方程组便化为三条线性（linear）方程，可以用消元法（elimination）求解。把三个乘积相乘便得 $(xyz)^2$，再把 xyz 逐一除以各个乘积，就能还原出每个变量。

解答

伪装起来的线性方程组

设

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

于是三条方程变成

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

由 (2) 得 $a = 1 + b - 2c$。代入 (1)：

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

代入 (3)：

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

连同 $b = 3c$ 可得 $c = 2$，所以 $b = 6$，$a = 1 + 6 - 4 = 3$。系数矩阵（coefficient matrix）的行列式（determinant）为 $-3 \neq 0$，因此这是该线性方程组的唯一解：

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

证明 $xyz = \pm 6$

把三个乘积相乘，

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

所以 $xyz = 6$ 或 $xyz = -6$，正如题目所求。

? **想一想** 现在我们已知 xyz，以及 yz、zx、xy 各自的值。怎样才能单独求出 x?

三个乘积全都不是零，所以 x、y、z 全都不是零，我们可以放心相除：

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

可能的取值

若 $xyz = 6$，则 $x = 6/3 = 2$，$y = 6/6 = 1$，$z = 6/2 = 3$。

若 $xyz = -6$，则 $x = -2$，$y = -1$，$z = -3$。

以上每一步都是必然的结果，所以只有这两组候选解；两者都满足原来的方程（方程只涉及两个变量的乘积，所以把三个变量同时变号，方程保持不变）。因此

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{或} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

验算

代入 $(2, 1, 3)$：$yz = 3$，$zx = 6$，$xy = 2$，所以三条方程的左方分别是 $6 + 6 - 10 = 2$、$3 - 6 + 4 = 1$ 和 $3 - 12 + 12 = 3$。三者全部吻合。用电脑搜索所有由分数 p/q（其中 $|p| \leq 12$，$1 \leq q \leq 4$）组成的三元组，结果恰好找到上述两组解；精确运算亦确认该线性方程组有唯一解 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$。

常见错误

- 由 $(xyz)^2 = 36$ 出发，对每个变量各自开方，例如把 $x = \pm 2$、$y = \pm 1$、$z = \pm 3$ 当作互不相干地写出来。这样会得到八个三元组，但只有两个成立：三个正负号是互相牵连的，因为 xyz 只有一个正负号。

► 遗漏负根，只给出 $(2,1,3)$。

STEP 之外

把棘手的式子重新命名，令非线性问题变成线性问题，这个技巧随处可见：由取对数来拟合 $y = Ae^{kx}$ 这类曲线，到用代换法解微分方程（differential equation），都是同一道理。方程组一旦成为线性，矩阵和行列式便能立即告诉你解是否唯一，而这正是线性代数（linear algebra）入门课程的起点。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）正是本着这种精神讲解消元法和行列式。

详细解答

STEP II 1996，第 3 题

纯数学 · 以数学归纳法证明斐波那契恒等式

STEP II 1996，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q3

关键思路

这里的一切都源自递推关系（recurrence），所以归纳法（induction）是最自然的工具。对于乘积 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$，窍门是比较相邻的两个值：用一次递推关系，每个值就变成前一个值的相反数。至于加法公式（addition formula），巧妙的做法是对 k 作归纳，同时让归纳假设（induction hypothesis）对每一个 n 一并成立，这样我们就可以用 $n+1$ 代替 n 来应用它。

解答

最初几项的值

在 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ 中取 $n = 1, 2, 3$：

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

正如题目所求。继续算下去，

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

乘积 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

对 $n \geq 1$，记 $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$。由数值表可得：

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1 \cdot 0$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$5 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$13 \cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

这些值正负交替，所以我们猜想

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{对所有} n \geq 1.$$

想一想 只用递推关系，怎样才能由 C_n 得到 C_{n+1}?

把 C_{n+1} 中下标较大的一项展开。对 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && \text{(递推关系用于} F_{n+2}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && \text{(因为} F_{n+1} - F_n = F_{n-1}\text{，其中} n \geq 1) \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

这样一来，归纳法便水到渠成。基础步骤（base case）是 $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$。若对某个 $n \geq 1$ 有 $C_n = (-1)^n$，则 $C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$。因此由归纳法可得

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{对每一个} n \geq 1.$$

加法公式

对每个正整数 k，设 $P(k)$ 为以下命题：

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{对所有正整数} n.$$

基础步骤 $k = 1$。右边是 $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$，正是左边。所以 $P(1)$ 成立。

归纳步骤（*inductive step*）。假设 $P(k)$ 对某个 $k \geq 1$ 成立，并设 n 为任意正整数。

想一想 归纳假设说的是 F_{n+k}，但我们需要的是 F_{n+k+1}。应该把哪一个 n 代进去?

由于 $P(k)$ 对每一个正整数都成立，而 $(n+1)+k = n+(k+1)$，我们可以用 $n+1$ 代替 n 来应用它：

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_kF_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(由} P(k)\text{，取} n+1) \\ &= F_k(F_{n+1} + F_n) + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(递推关系用于} F_{n+2}) \\ &= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + F_kF_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n && \text{(递推关系，因} k \geq 1). \end{aligned}$$

对这个 n 而言，这正是 $P(k+1)$，而 n 是任意的。所以由归纳法，$P(k)$ 对每一个正整数 k 都成立，即

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \qquad \text{对所有正整数} n, k,$$

正如题目所求。

（另一个做法是固定 n，对 k 作两步归纳：先验证 $k=1$ 和 $k=2$，再把 $k-1$ 和 k 的公式相加。两条路都可行；上面的做法只需要一个基础步骤。）

验算

- 卡西尼（Cassini）恒等式，取 $n=6$：$F_7F_5 - F_6^2 = 13\cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$。
- 加法公式，取 $n=3$、$k=4$：$F_7 = 13$，而 $F_4F_4 + F_3F_3 = 9+4 = 13$。
- 取 $k=n$ 可得 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$；当 $n=3$ 时，这就是 $F_6 = 2\cdot(3+1) = 8$。

电脑已验证乘积公式对 $1 \le n < 150$ 成立，以及加法公式对所有 $1 \le n, k < 90$ 成立。

常见错误

- 把正负号弄反：$C_1 = -1$，所以答案是 $(-1)^n$，而不是 $(-1)^{n+1}$。
- 在加法公式中，固定 n 对 k 作归纳，却又在 $n+1$ 处使用归纳假设：只有当归纳假设是对所有 n 陈述时，这样做才合理。
- 使用 $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ 时，没有指出它需要 $n \ge 1$。

STEP 之外

这两个恒等式都是同一个矩阵（matrix）事实的投影：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$。取行列式（determinant）便立即得到乘积公式（卡西尼恒等式，Cassini's identity），而写出 $M^{n+k} = M^k M^n$ 则得到加法公式。卡西尼恒等式还说明相邻的两个斐波那契数（Fibonacci numbers）互质（coprime），再配合加法公式，更可以证明一个令人惊叹的结果：$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是探索这类数论的好去处，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 则通过特征值（eigenvalues）来处理斐波那契数。

详细解答

STEP II 1996，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 1996，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q4

关键思路

看到平方根 $\sqrt{1+x}$ 和 $\sqrt{1-x}$，最自然的做法就是代入 $x=\cos t$，因为半角公式（half-angle formulae）可把 $1\pm\cos t$ 化为完全平方。根号消去之后，和式 $\cos\theta+\sin\theta$ 可合并成单一个余弦，整个分母于是变成 $1+\cos$(某个角)，这又是一个完全平方。最后一次代换（substitution）把积分区间重新置中，使分子变成 $\cos 4u$，这正是题目要先证明该恒等式（identity）的原因。

解答

恒等式

两次运用 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$，并设 $c=\cos u$：

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2-1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4c^4-4c^2+1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

得证。

第一次代换

设 $x=\cos t$，则 $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$。当 x 由 -1 变到 1 时，t 由 π 递减至 0；负号正好把上下限对调回来，得

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t}+2}\,\mathrm{d}t.$$

现在 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$，而 $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$。

想一想 $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$ 真的等于 $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，而不是 $\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ 吗?

一般而言应取绝对值（modulus），但这里 $0 \le t \le \pi$，所以 $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{t}{2}$ 和 $\sin\frac{t}{2}$ 皆为非负。这正是选取 $t \in [0, \pi]$（而不是例如 $[-\pi, 0]$）的关键所在。因此

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2}+\sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

设 $v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，使得 $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$，则分母为

$$2 + 2\cos 2v = 2(1+\cos 2v) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4}-\tfrac{\pi}{8}\right),$$

所以

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

得证。

第二次代换

设 $u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，则 $t = 4u + \frac{\pi}{2}$，$\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$。上下限 $t = 0$ 和 $t = \pi$ 分别变成 $u = -\frac{\pi}{8}$ 和 $u = \frac{\pi}{8}$。分子为

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

开首的恒等式正好在这里派上用场。于是

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

除以 $\cos^2 u$ 并无问题，因为在这个区间上 $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$。利用 $8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$，被积函数（integrand）为 $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$，所以

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

方括号内是 u 的奇函数（odd function），所以其值等于它在 $\frac{\pi}{8}$ 处取值的两倍：

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

其中用到 $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 以及题目给出的 $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$。这就是所求的结果。

验算

- 数值上，$4\sqrt{2}-\pi-2\approx 0.51526$。把辛普森法则（Simpson's rule）分别应用于原来关于 x 的积分、关于 t 的积分和关于 u 的积分，结果都是 0.515262。
- 大小检查：在 $[-1,1]$ 上，和式 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 介乎 $\sqrt{2}$（在 $x=\pm1$ 处）与 2（在 $x=0$ 处）之间，所以被积函数介乎 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{2+\sqrt{2}}\approx 0.293$ 之间。因此 $0.5\le I\le 0.586$，而 0.515 与此相符。
- 在 $t=0$ 处，分母 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$ 应等于 $\sqrt{2}+0+2$；果然 $4\cos^2\frac{\pi}{8}=2(1+\cos\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{2}$。

常见错误

- 漏掉 $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$ 中的负号，或忘记对调上下限，结果得出 $-I$。
- 写下 $\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，却没有指出在 $[0,\pi]$ 上 $\cos\frac{t}{2}\ge 0$。
- 漏掉 $\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}u$ 中的因子 4；它刚好与分母的 4 互相抵消。

STEP 之外

像 $x=\cos t$ 这类把平方根“有理化”的代换，其实是一个普遍事实的特例：若被积函数是 x 与 $\sqrt{1-x^2}$（或类似的二次根式）的有理函数（rational function），就总可以通过三角代换或 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 代换把它化为有理函数，然后以初等函数（elementary functions）表示其积分。到了大学，你会学到这套方法的系统版本，也会见到它的局限：遇上三次或四次根式时，便会得出椭圆积分（elliptic integrals），而这些积分并非初等。想做更多这种风格的题目，可参考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

详细解答

STEP II 1996，第 5 题

纯数学 · 单位根

> **STEP II 1996，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q5

关键思路

这个四次方程是回文（palindromic）的：它的系数由前往后读和由后往前读都一样。除以 z^2 之后，各项可归并为 z^2+z^{-2} 和 $z+z^{-1}$ 两组，而两者都可以用 $u=z+z^{-1}$ 表示，于是 z 的四次方程（quartic）便化为 u 的二次方程（quadratic）。题目的后半部分，是要认出这个四次式正是从 z^5-1 抽出因式 $z-1$ 后余下的因式，所以它的根是五次单位根（fifth roots of unity）；把同样四个数的两种描述互相比较，便得到三角函数的精确值。

解答

u 的值

由于 $z=0$ 不满足 $(*)$，我们可以除以 z^2：

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

现在 $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$，所以 $z^2+z^{-2}=u^2-2$。方程变成

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{即} \qquad u^2+u-1=0,$$

所以

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{或} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z 的值

由 $z+z^{-1}=u$ 得 $z^2-uz+1=0$，所以

$$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

利用 $u^2 = 1 - u$，判别式（discriminant）为 $u^2 - 4 = -3 - u$，它对 u 的两个值都是负数（因为两种情况下都有 $|u| < 2$），所以根都不是实数：

$$z = \frac{u \pm i\sqrt{3+u}}{2}.$$

当 $u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$3 + u = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$；当 $u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 时，$3 + u = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$。写成 $\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$，则 $(*)$ 的四个解为

$$z = \frac{-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad z = \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

u 的每个值给出 z 的两个值（一对 z, z^{-1}，在这里它们互为共轭复数（complex conjugates）），而四次方程恰好有四个根，所以这些就是全部的根。

与 $z^5 = 1$ 的关系

展开得

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1,$$

因为中间各项逐一对消。所以若 z 满足 $(*)$，则第二个因式为零，从而 $z^5 - 1 = 0$。

$z^5 = 1$ 的解是 $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$，其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$。$k = 0$ 给出 $z = 1$，它并不满足 $(*)$（左边等于 5）。其余四个解互不相同，而且全部满足 $(*)$，因为对它们而言 $z - 1 \neq 0$，所以因式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ 必须为零。因此 $(*)$ 的解是

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad r = 1, \quad \theta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}.$$

推导结果

现在我们有同样四个数的两种描述，必须把它们逐一配对。

> ? **想一想** 四个根式（surd）表达式之中，哪一个是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$？

看正负号。由于 $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ 这个数的实部和虚部都是正数。在各个根式表达式之中，实部分别是 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$ 和 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$，所以恰好只有一个位于第一象限：

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

（在 $(0, \pi)$ 内的另一个角，即 $\frac{4\pi}{5}$，其余弦为负数，所以它与另一个虚部为正的根配对。）比较实部和虚部，

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

这正是所要求的结果。顺带可得 $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 和 $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$。

验算

- $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ \approx 0.30902$，而 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.30902$；$\sin 72^\circ \approx 0.95106$，而 $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 0.95106$。
- 四个根之和应为 -1（即 z^3 的系数的相反数）：各实部相加得 $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4} = -1$。换句话说，$u$ 的两个值之和为 -1。
- 每个根的模（modulus）应为 1：例如 $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16} = \frac{16}{16} = 1$。

我们已用数值方法验证：四个根式表达式全部满足 $(*)$ 和 $z^5 = 1$，并且与 $e^{\pm 2\pi i/5}$, $e^{\pm 4\pi i/5}$ 相符。

常见错误

- 忘记排除 $z = 1$：它满足 $z^5 = 1$ 但不满足 $(*)$，所以 $(*)$ 有四个根，而不是五个。
- 毫无理据地把根式与角配对。正是实部的正负号，确定了哪一个根是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$。
- 写成 $z^2 + z^{-2} = u^2$ 而漏掉了 -2。

STEP 之外

代换 $u = z + z^{-1}$ 可以把任何回文多项式的次数减半。只需解二次方程便能求得 $\cos\frac{2\pi}{5}$，这绝非偶然：高斯（Gauss）证明了，$\cos\frac{2\pi}{n}$ 能够单用平方根写出，当且仅当正 n 边形可以用尺规作图（ruler and compass construction）作出，而本题正是正五边形作图背后的代数。完整的来龙去脉属于伽罗瓦理论（Galois theory），会在大学二年级的代数课程中学到；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）从几何角度展示了单位根优美的一面。

详细解答

STEP II 1996，第 6 题

纯数学 · 因数的计数

> **STEP II 1996，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q6

关键思路

N 的每一个因数（factor），都是这样构成的：对每个质数（prime）p_i 独立地选择取多少个，可取 0 至 m_i 个。数清这些选择的数目，就数清了所有因数，然后再剔除 1 和 N。此后，两道搜索题都变成关于指数（exponent）的问题：哪些指数组合能给出所需的个数，以及怎样把这些指数分配到各质数上，使 N 尽可能小。

解答

开首的例子

12 的因数是 $1, 2, 3, 4, 6, 12$。剔除 1 和 12 后余下 $2, 3, 4, 6$，即有 4 个真因数（proper factor）。16 的因数是 $1, 2, 4, 8, 16$。剔除 1 和 16 后余下 $2, 4, 8$，即有 3 个真因数。

一般情况的计数

设 M 整除 N。那么 M 的每个质因数都是 N 的质因数，而且它在 M 中出现的次数不能多于在 N 中出现的次数。所以

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

反过来，每个这样的乘积都整除 N。根据质因数分解的唯一性（uniqueness of prime factorisation），不同的 $(a_1, \ldots, a_r)$ 给出不同的整数 M。因此 N 的因数与这些选择一一对应。每个 a_i 有 $m_i + 1$ 种选择，而且各自独立，所以 N 一共有

$$d(N) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_r + 1)$$

个因数。由于 $r \geq 1$，我们有 $N > 1$，所以 1 和 N 是两个不同的因数。剔除它们之后，真因数的个数是

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)-2.$$

验证：$12 = 2^2 \cdot 3$ 给出 $3 \cdot 2 - 2 = 4$，而 $16 = 2^4$ 给出 $5 - 2 = 3$。

使 N 尽量小的原则

在两部分中，我们都先固定指数，再问这些指数所容许的最小 N 是多少。以下两点观察便可解决这个问题。

- 使用最小的质数。假如用了某个质数 q，却没有用一个较小的质数 p，那么把 q 换成 p 后，每个指数都保持不变，因数个数也就不变，而 N 却变小了。所以所用的质数应该是 $2, 3, 5, \ldots$，中间不留空缺。
- 把最大的指数放在最小的质数上。设 $p < q$，其中 p 的指数是 a，q 的指数是 b，而 $a < b$。把两个指数对调，相当于把 N 乘以 $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$，而因数个数不变。

因此，对于指数 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$，最小的 N 是 $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$。

第 (i) 部分

我们需要刚好 12 个真因数，所以 $d(N) = 14$。每个因子 $m_i + 1$ 至少是 2，而 $14 = 2 \cdot 7$，其中 7 是质数。所以把 14 写成若干个至少为 2 的因子之积，只有两种方法：

- 14 本身：$N = p^{13}$，最小为 $2^{13} = 8192$；
- 7×2：$N = p^6 q$，最小为 $2^6 \cdot 3 = 192$。

所以刚好有 12 个真因数的最小正整数是

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

它的因数是 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$，共有 14 个。

第 (ii) 部分

现在我们需要 $d(N) \geq 14$。由于 $d(N)$ 不再是固定的，我们按相异质数的个数 r 来分类。把指数由大至小排列，$e_1 \geq e_2 \geq \cdots$。

> ? **想一想** 为甚么不能直接沿用第 (i) 部分，只考虑 $d(N) = 14$ 的情况?

因为因数较多，并不代表 N 一定较大。把指数分散到几个小质数上，只需很小的代价就能得到很多因数。例如，$2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 有 $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ 个因数，却比 192 小得多。所以我们必须考虑每一个 $d(N) \geq 14$ 的值。

- $r \geq 4$：这时 $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$。
- $r = 3$：这时 $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$。若 $e_2 = e_3 = 1$，则需要 $4(e_1+1) \geq 14$，所以 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$。否则 $e_2 \geq 2$，于是 $e_1 \geq 2$，而 $N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$。
- $r = 2$：这时 $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$，其中 $e_1 \geq e_2$。若 $e_2 = 1$，则 $e_1 \geq 6$，而 $N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$。若 $e_2 = 2$，则由 $3(e_1+1) \geq 14$ 得 $e_1 \geq 4$，所以 $N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$。若 $e_2 \geq 3$，则 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$。
- $r = 1$：$e_1 + 1 \geq 14$，所以 $N \geq 2^{13} = 8192$。

每种情况都给出 $N \geq 120$，而 $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 确实符合要求：它有 $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$ 个真因数。所以最少有 12 个真因数的最小正整数是

$$\boxed{120},$$

而它其实有 14 个真因数。

验算

以穷举法逐一数出由 2 至 9000 每个 N 的真因数个数，结果与公式 $d(N) - 2$ 吻合。穷举亦证实 192 是第一个刚好有 12 个真因数的 N，而 120 是第一个最少有 12 个真因数的数（它有 14 个）。若想用手快速核对，可留意略小于 120 而因数众多的数，即 $60, 72, 84, 90, 96$ 和 108，全都有 12 个因数，因此只有 10 个真因数。

常见错误

- 设 $d(N) = 12$ 而不是 14。要记得 1 和 N 并不计算在内。
- 第 (ii) 部分也答 192。最少有 12 个真因数的最小 N，不一定刚好有 12 个。
- 把大指数放在大质数上：$2 \cdot 3^6$ 的因数个数与 $2^6 \cdot 3$ 相同，但数值大得多。

STEP 之外

因数函数（divisor function）$d(N)$ 具有*积性*（multiplicative）：只要 a 与 b 互质（coprime），就有 $d(ab) = d(a)d(b)$。这正是上述乘积公式所表达的。因数个数比所有较小的数都多的数，称为*高度合成数*（highly composite number），拉马努金（Ramanujan）曾对它们作过深入研究。120 就是其中之一，而本题所用的指数排序论证，正是他的分析的起点。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是一本介绍因数函数和唯一分解的精彩入门书。

详细解答

STEP II 1996，第 7 题

纯数学 · 坐标几何中的轨迹

> **STEP II 1996，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q7

关键思路

为正方形设置坐标，使它对两条坐标轴都对称。这样每个距离都是一个线性式的绝对值（modulus），而两个乘积 pr 和 qs 就变成 $|y^2 - a^2|$ 和 $|x^2 - a^2|$。形如 $|U| = |V|$ 的方程可分拆为 $U = V$ 或 $U = -V$。其中一种情况给出两条直线，另一种情况给出圆。

解答

设正方形的边长为 $2a$（其中 $a > 0$），中心位于原点，各边与坐标轴平行：

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

于是 AB 位于直线 $y = -a$ 上，BC 位于 $x = a$ 上，CD 位于 $y = a$ 上，DA 位于 $x = -a$ 上。由 $P = (x, y)$ 到水平线 $y = c$ 的垂直距离（perpendicular distance）是 $|y - c|$，到铅垂线 $x = c$ 的垂直距离则是 $|x - c|$。所以

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

这些公式对平面上每一点 P 都成立，不论它在正方形之内还是之外。正是绝对值确保了距离非负，所以我们绝不能把它们略去。

两两相乘，并利用 $|u|\,|v| = |uv|$，得

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

> ? **想一想** 怎样才能去掉 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$ 中的绝对值，而又不必分成许多区域来讨论？

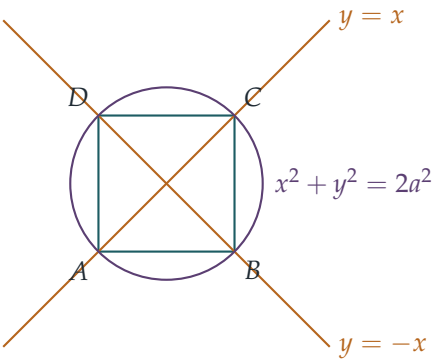
对实数而言，$|U| = |V|$ 成立当且仅当（if and only if）$U = V$ 或 $U = -V$，因为两边都非负，而且 $|U| = |V| \iff U^2 = V^2 \iff (U - V)(U + V) = 0$。由于我们每一步用的都是“当且仅当”的推论，所以必要条件（necessary condition）和充分条件（sufficient condition）会同时得到。因此 $pr = qs$ 成立当且仅当

$$y^2 - a^2 = x^2 - a^2 \qquad 或 \qquad y^2 - a^2 = -(x^2 - a^2).$$

第一种情况。 $y^2 = x^2$，即 $(y - x)(y + x) = 0$，所以 $y = x$ 或 $y = -x$。这就是通过正方形中心、分别包含对角线 AC 和 BD 的两条（无限延伸的）直线。

第二种情况。 $x^2 + y^2 = 2a^2$。这是以正方形的中心为圆心、半径为 $\sqrt{2}\,a$ 的圆，而这个半径正是对角线的一半。所以它是正方形的外接圆（circumcircle），通过 A、B、C 和 D。

因此，$pr = qs$ 迫使 P 必须位于两条对角线所在的直线 AC、BD（无限延长）其中之一上，或位于 $ABCD$ 的外接圆上。反过来说，以上每一步都是可逆的。若 P 在其中一条直线上，则 $x^2 = y^2$，所以 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。若 P 在圆上，则 $y^2 - a^2 = a^2 - x^2$，同样得到 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。无论哪种情况都有 $pr = qs$，所以两条直线和圆上的每一点都是 P 的可能位置。证明至此完成。



想一想 正方形以外的点真的可以吗？那两条直线会在顶点处终止吗？

题目容许平面上的任何一点，而我们的距离公式在整个平面上都成立。所以轨迹（locus）是每条直线的全部，而不仅是作为线段的对角线。例如，$P = (3a, 3a)$ 有 $p = 4a$、$r = 2a$、$q = 2a$、$s = 4a$，所以 $pr = qs = 8a^2$。

验算

- 中心 $(0,0)$ 同时在两条直线上：$p = q = r = s = a$，所以 $pr = qs$。
- 取圆上位于 AB 中点正下方的一点，即 $(0, -\sqrt{2}\,a)$。这时 $p = (\sqrt{2} - 1)a$，$r = (\sqrt{2} + 1)a$，所以 $pr = a^2$；又 $q = s = a$，所以 $qs = a^2$。

- 不在轨迹上的点，例如 $(\frac{1}{2}a, 0)$，给出 $pr = a^2$ 但 $qs = \frac{3}{4}a^2$，所以它不符合条件。
- 数值上（取 $a = 1.7$），在三条曲线上随机抽取的 30 000 个点处，$pr = qs$ 都成立，误差在 10^{-9} 以内。在 $[-5, 5]^2$ 上以 600×600 的网格扫描 $pr - qs$ 的正负号变化，除了两条直线和圆之外，没有发现其他零点。

常见错误

- 略去绝对值，写成 $pr = a^2 - y^2$、$qs = a^2 - x^2$。这只在正方形内部才成立，而且会遗漏了圆，只得出 $y = \pm x$。
- 只证明 P 必须位于这些曲线上。题目还要求证明逆命题（converse），所以要说明为何直线和圆上的每一点都符合条件。
- 把那两条直线说成是对角*线段* AC 和 BD。它们是完整的直线。

STEP 之外

这个轨迹是多项式 $(y^2 - a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2$ 的零点集（zero set），而这个多项式可因式分解为 $(y - x)(y + x)(x^2 + y^2 - 2a^2)$。由多项式方程给出、并且像这样分拆成较简单部分的曲线，正是可约（reducible）*代数曲线*（algebraic curve）的第一个例子。按照图形的对称性来选取坐标，正是让这类因式分解显现出来的好习惯。想看更多这种风格的几何题，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于曲线的代数理论，可参阅 Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry*。

详细解答

STEP II 1996，第 8 题

纯数学 · 二阶微分方程

STEP II 1996，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q8

关键思路

这条方程把 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 混在一起,所以它根本不是 f 的常微分方程(ordinary differential equation)。窍门是把方程写两次，一次在 x，一次在 $-x$，然后相加和相减。和 g 与差 h 各自满足一条货真价实的常系数方程（constant-coefficient equation），可以用余函数（complementary function）和特别积分（particular integral）求解，而 f 则可由 $\frac{1}{2}(g+h)$ 还原出来。

解答

$g(0)$ 和 $g'(0)$ 的值

在 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 中代入 $x=0$，得 $g(0)=2f(0)=2$。

求导时，链式法则（chain rule）令第二项多出一个负号：

$$g'(x)=f'(x)-f'(-x),$$

所以 $g'(0)=f'(0)-f'(0)=0$，正如所求。（留意我们并不需要 $f'(0)$ 的值：g 是偶函数（even function），所以它的导数是奇函数（odd function），在 0 处必为零。）

g 所满足的方程

再求导一次，链式法则带来的两个负号互相抵消：

$$g''(x)=f''(x)+f''(-x).$$

想一想 $\mathrm{f}''(-x)$ 是甚么？题目给出的方程只告诉我们 $\mathrm{f}''(x)$ 的情况。

题目给出的方程对所有 x 都成立，所以我们可以把式中的 x 全部换成 $-x$。由于 cos 是偶函数，这样便得到

$$\mathrm{f}''(-x)+\mathrm{f}(x)=-x+3\cos 2x.$$

把这条式与原方程相加，

$$\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}''(-x)+\mathrm{f}(-x)+\mathrm{f}(x)=6\cos 2x, \qquad \text{即} \qquad \mathrm{g}''(x)+\mathrm{g}(x)=6\cos 2x,$$

正如所求。

求解 g

辅助方程 (auxiliary equation) $m^2+1=0$ 的根是 $\pm\mathrm{i}$, 所以余函数是 $A\cos x+B\sin x$。至于特别积分，我们试用 $\mathrm{g}=k\cos 2x$：这时 $\mathrm{g}''+\mathrm{g}=-4k\cos 2x+k\cos 2x=-3k\cos 2x$, 所以 $k=-2$。因此

$$\mathrm{g}(x)=A\cos x+B\sin x-2\cos 2x.$$

现在由 $\mathrm{g}(0)=A-2=2$ 得 $A=4$，而 $\mathrm{g}'(0)=B=0$。所以

$$\mathrm{g}(x)=4\cos x-2\cos 2x.$$

求解 h

对于 $\mathrm{h}(x)=\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)$，我们有

$$\mathrm{h}(0)=0, \qquad \mathrm{h}'(x)=\mathrm{f}'(x)+\mathrm{f}'(-x), \quad \text{所以} \quad \mathrm{h}'(0)=2\mathrm{f}'(0)=-2,$$

以及 $\mathrm{h}''(x)=\mathrm{f}''(x)-\mathrm{f}''(-x)$。这次我们从在 x 的方程减去在 $-x$ 的方程：

$$\mathrm{f}''(x)-\mathrm{f}''(-x)+\mathrm{f}(-x)-\mathrm{f}(x)=2x, \qquad \text{即} \qquad \mathrm{h}''(x)-\mathrm{h}(x)=2x.$$

想一想 为甚么 h 前面的符号由 + 变成了 −?

相减之后，f 的各项以 $\mathrm{f}(-x)-\mathrm{f}(x)$ 的形式出现，这是 $-\mathrm{h}(x)$，而不是 $+\mathrm{h}(x)$。所以这次的解是指数函数而不是三角函数：辅助方程 $m^2-1=0$ 给出余函数 $C\mathrm{e}^x+D\mathrm{e}^{-x}$。试用 $\mathrm{h}=px+q$ 作为特别积分，得 $-(px+q)=2x$，所以 $p=-2$，$q=0$。因此

$$\mathrm{h}(x)=C\mathrm{e}^x+D\mathrm{e}^{-x}-2x.$$

由初始条件得 $\mathrm{h}(0)=C+D=0$ 和 $\mathrm{h}'(0)=C-D-2=-2$，所以 $C=D=0$，而

$$\mathrm{h}(x)=-2x.$$

还原 f

把 g 和 h 的定义相加，得 $\mathrm{g}+\mathrm{h}=2\mathrm{f}$，所以

$$\mathrm{f}(x)=\tfrac{1}{2}\big(\mathrm{g}(x)+\mathrm{h}(x)\big)=\tfrac{1}{2}\big(4\cos x-2\cos 2x-2x\big)=2\cos x-\cos 2x-x,$$

这就是所求的结果。

验算

- $\mathrm{f}(0)=2-1-0=1$，而 $\mathrm{f}'(x)=-2\sin x+2\sin 2x-1$，所以 $\mathrm{f}'(0)=-1$。
- 代回原方程：$\mathrm{f}''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$ 和 $\mathrm{f}(-x)=2\cos x-\cos 2x+x$，两者相加得 $x+3\cos 2x$。
- 奇偶性（parity）正确：g 是偶函数，h 是奇函数，理应如此。
- 把 $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{f}(-x)$ 这一对函数由 $x=0$ 逐步数值计算至 $x=3$，得 $\mathrm{f}(3)\approx -5.940155$，与 $2\cos 3-\cos 6-3$ 吻合。

常见错误

- 忘记链式法则带来的符号：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}'(-x)$，但 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}(-x)=+\mathrm{f}''(-x)$。
- 只在方程的其中一边把 x 换成 $-x$：右边的 x 同样要变成 $-x$。
- 得出 $\mathrm{h}''+\mathrm{h}=2x$，结果 h 中出现了三角函数项。

STEP 之外

这是一条泛函微分方程（functional differential equation），当中未知函数在多于一点取值。拆成偶部和奇部之所以行得通，是因为反射 $x\mapsto -x$ 是一个线性映射（linear map），而且它的平方是恒等映射（identity），所以它的特征值（eigenvalue）是 ± 1，每个函数都可以唯一地分解为偶部（特征值 1）和奇部（特征值 -1）。在每一部分上，方程都变成一条常微分方程。这种按对称性分解的想法贯穿整个线性代数（linear algebra）和傅里叶分析（Fourier analysis）。关于常系数方程本身，可参阅 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）；关于线性代数的观点，可参阅 Strang, *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）。

详细解答

STEP II 1996，第 9 题

力学 · 稳定性与质心

> **STEP II 1996，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

关键思路

一切取决于玩具的质心（centre of mass）G 在其对称轴（axis of symmetry）上的位置。以半球体（hemisphere）着地时，桌面与玩具的接触点总是在半球体平面圆心 O 的正下方，所以 G 在 O 之下还是之上，就决定了玩具是“自行回正”还是“翻倒”。以圆锥（cone）着地时，玩具沿着一整条母线（generator）靠在桌面上，只要通过 G 的铅垂线与这条接触线相交，玩具便会留在原处。

解答

把玩具看成密度为 ρ 的均匀刚体（rigid body），并关于其轴对称。设 O 为公共圆面的圆心，沿轴由 O 起量度距离，以指向圆锥顶点（vertex）V 的方向为正。

质心

圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$，其质心位于 $+\frac{1}{4}\lambda a$。半球体的体积为 $\frac{2}{3}\pi a^3$，其质心位于 $-\frac{3}{8}a$。所以 G 位于

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

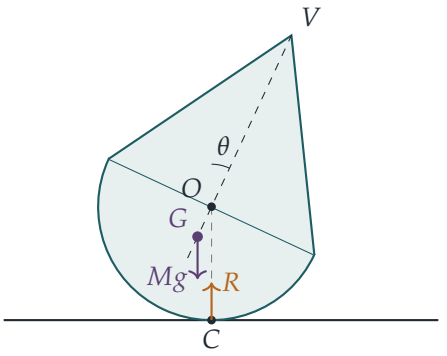
因此，G 在 O 之下，若 $\lambda < \sqrt{3}$；恰在 O，若 $\lambda = \sqrt{3}$；在 O 之上，若 $\lambda > \sqrt{3}$。

以半球体着地

设轴与向上的铅垂线成角 θ，其中 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$，使半球体的曲面落在桌面上。

想一想 半球体究竟在哪一点接触桌面?

桌面与半球体所属的球面相切，而切平面（tangent plane）垂直于通过切点的半径。所以接触点 C 总是在 O 的正下方，而且 O 的高度总是 a，不论 θ 是多少。



（图中所示为 G 在 O 之下的情况，即 $\lambda < \sqrt{3}$。）

对 C 取力矩（moment）。法向反作用力（normal reaction）和任何摩擦力（friction）都作用于 C，所以只有作用于 G 的重量 Mg 产生力矩。G 相对于 C（亦即相对于通过 O 的铅垂线）的水平位移为 $h\sin\theta$，以顶点倾侧的一方为正。

- 若 $\lambda < \sqrt{3}$，则 $h < 0$。对于 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 内的每一个 θ，G 都位于通过 C 的铅垂线的另一侧，与顶点相反。所以重量会把玩具转回 $\theta = 0$ 的方向。换一个说法，G 的高度为 $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$，在 $\theta = 0$ 时最小，所以直立位置就是势能（potential energy）最小的位置。无论用哪一种看法，不管以半球体的哪一处着地，玩具都会回到直立位置（它会在该位置附近来回摇摆，直至摩擦力和空气阻力令它停定）。
- 若 $\lambda > \sqrt{3}$，则 $h > 0$。对于任何倾角 $\theta > 0$，G 都位于顶点的同一侧，重量会把玩具转得更加偏离直立位置。此时 G 的高度 $a + h\cos\theta$ 在 $\theta = 0$ 时最大，所以直立是不稳定平衡（unstable equilibrium）。最轻微的倾侧也会不断扩大，直至边缘碰到桌面，玩具倒在它的圆锥面上：它翻倒了。

（当 $\lambda = \sqrt{3}$ 时，$G = O$，玩具在任何倾角下都处于随遇平衡（neutral equilibrium）。）这就是所要求的结果。

以圆锥着地

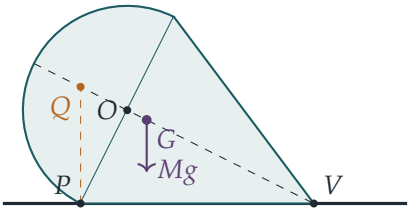
现在玩具以圆锥的一条母线 VP 贴着桌面躺下，其中 P 在边缘上。我们在通过轴和 VP 的平面内考虑。在此平面内取坐标轴，以 O 为原点，$V = (0, \lambda a)$ 及 $P = (a, 0)$，于是半球体位于 $y < 0$ 的一侧。圆锥沿 VP 的切平面垂直于这个平面，它在这个平面上的迹线

是直线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}=1.$$

想一想 半球体会不会反而穿过桌面，以致圆锥无法以一条母线平贴桌面?

不会。玩具上每一点投影到这个平面上，都落在圆锥的三角形截面内，或落在半圆盘 $x^2+y^2\le a^2$，$y\le 0$ 内。在三角形上，$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le 1$。在半圆盘上，$x\le a$ 且 $y\le 0$，所以 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le \frac{x}{a}\le 1$，等号仅在 P 成立。所以整个玩具都在该平面的同一侧，只沿线段 VP 与平面接触，别无其他接触点。



（图中所示为 $\lambda=2$ 的情况。虚线是 VP 在 P 处的垂线。）

所有反作用力都作用在 VP 上，并且垂直于桌面。所以玩具在桌面上处于平衡（equilibrium），而且不会绕 P 或 V 翻转，当且仅当通过 G 的铅垂线与线段 VP 相交，即由 G 到 VP 的垂足（foot of the perpendicular）位于 V 与 P 之间。

VP 在 V 处的垂线只在 V 与轴相交。设 VP 在 P 处的垂线与轴相交于 Q。在三角形 VPQ 中，P 处的角是直角，而 PO 是斜边（hypotenuse）VQ 上的高，所以 $OP^2=OV\cdot OQ$，由此得

$$OQ=\frac{a^2}{\lambda a}=\frac{a}{\lambda}.$$

所以 Q 在 O 之下，距离为 a/λ。轴上的一点投影到线段 VP 上，当且仅当该点位于 Q 与 V 之间。所以我们需要

$$-\frac{a}{\lambda}<h<\lambda a.$$

右边的不等式成立，因为 G 在玩具内部，位于 V 之下。至于左边的不等式，两边乘以 $4\lambda(\lambda+2)/a>0$，

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}>-\frac{a}{\lambda}\iff \lambda^3-3\lambda+4\lambda+8>0\iff \lambda^3+\lambda+8>0,$$

这对每一个 $\lambda>0$ 都成立。所以通过 G 的铅垂线总与接触线相交，玩具留在原处不动。由旋转对称性可知，哪一条母线与桌面接触也没有分别。所以不论 λ 取何值，玩具都会停留在它的圆锥面上，这正是所要证明的。

验算

- 当 $\lambda = \sqrt{3}$ 时，公式给出 $h = 0$：圆锥的矩 $\frac{1}{12}\lambda^2 a$ 恰好与半球体的 $\frac{1}{4}a$ 平衡。把玩具切成薄圆片再以数值方法求和，对数个不同的 λ 所得的 h 都吻合，误差在 $10^{-5}a$ 以内。
- 取 $\lambda = 1$：$h = -\frac{1}{6}a$ 且 $OQ = a$，而由 G 所作垂线的垂足位于由 V 到 P 全程的 0.583 处。取 $\lambda = 10$ 时，垂足位于全程的 0.790 处。在 $(0, 50)$ 内随机抽取 20,000 个 λ 的值作测试，垂足每次都严格落在 VP 之内。
- 极限情况：当 $\lambda \to 0$ 时，玩具几乎就是一个半球体（$h \to -\frac{3}{8}a$），而半球体会自行回正是众所周知的。当 $\lambda \to \infty$ 时，玩具是一个长长的圆锥，G 随着圆锥本身的质心沿轴上移。

常见错误

- 对直立玩具的最低点取力矩，而不是对实际的接触点取力矩；接触点会随玩具滚动而移动，但总是在 O 的正下方。
- 在最后一部分，以为半球体也接触桌面。其实并没有，因为半圆盘位于 $y \leq 0$ 的一侧。

STEP 之外

这个摇摆玩具让我们初次接触平衡的稳定性（stability）。一般而言，在平面上滚动的物体，当其质心低于其表面在接触点处的曲率中心（centre of curvature）（在这里即是 O）时，便是稳定的。同样的想法也支配着浮船的稳心（metacentre）。在大学一年级的课程中，这会发展成对势能极小值以及在其附近的小振动（small oscillations）的研究。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）正是以这种精神讲述质心和刚体平衡。

详细解答

STEP II 1996，第 10 题

力学 · 由旋转轮抛出的抛体

STEP II 1996，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q10

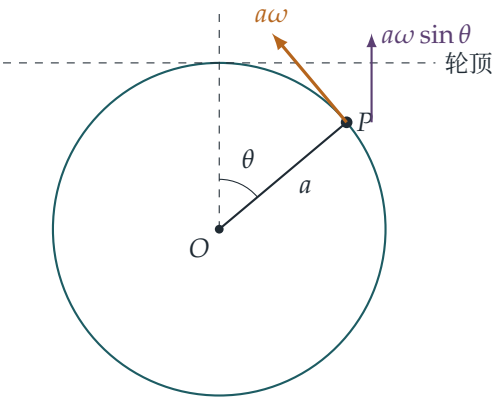
关键思路

在松手的一刻，女主角就成为一个抛体（projectile），其初始位置和初速度完全取决于她当时在轮上的位置。高度只与竖直方向的运动有关，所以她所能到达的最大高度，等于松手时的高度，加上速度的竖直分量为她额外换来的高度。这样，高度便是单一个松手角度的函数，而问题就变成：这个函数在甚么情况下可以超越轮顶？它的最大值又是多少？

解答

建立模型

把女主角视为随轮缘运动的质点（particle），并忽略空气阻力。设 O 为轮的中心，并假设她在点 P 松手，其中 OP 与竖直向上方向的夹角为 θ，$0 \le \theta \le \pi$。她在轮缘上的速率为 $a\omega$，方向沿 P 点的切线（tangent）。



P 点的切线垂直于 OP，所以它与水平方向的夹角为 θ。如果她松手时正朝着轮顶运动，她的速度的向上分量为 $a\omega\sin\theta$（图中以紫红色标示）。如果她正在远离轮顶，她的竖直速度向下或为零，因此她永远不会升到高于松手点的位置，而松手点不会高于轮顶；这些松手情况可以不予考虑。

松手时她在 O 之上的高度为 $a\cos\theta$。在只受重力作用的情况下，她的竖直速度由 $a\omega\sin\theta$ 减至零，根据 $v^2 = u^2 - 2gs$，她会再上升 $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$。所以她在轮顶之上所能到达的最大高度为

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

设 $c = \cos\theta \in [-1,1]$ 及 $k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$。那么 $\sin^2\theta = 1 - c^2$，而

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)\big[k(1+c) - 1\big].\end{aligned}$$

求 ω_0

当 $c = 1$（在轮顶松手）时，$H = 0$，正如所料。当 $c < 1$ 时，因子 $1 - c$ 为正，所以 $H > 0$ 当且仅当 $k(1+c) > 1$。

> ? **想一想** 在 c 的容许取值范围内，$k(1+c)$ 最大可以有多大?

由于 $c < 1$，$k(1+c)$ 可取 $[0, 2k)$ 内的每一个值，但永远达不到 $2k$。所以：

- 若 $2k > 1$，我们可以选取足够接近 1 的 $c < 1$，使得 $k(1+c) > 1$，她便能升到轮顶之上；
- 若 $2k \le 1$，则对每一个 $c < 1$ 都有 $k(1+c) < 2k \le 1$，所以在每一个松手点都有 $H \le 0$，她永远无法升到轮顶之上。

条件 $2k \le 1$ 即 $a\omega^2 \le g$。注意边界情况 $\omega^2 = g/a$ 属于“不可能”的一方，所以这样的 ω 的最大值存在，并且是

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

（这也是另一个情况下的临界角速度（angular speed）：假如有一个质点靠在轮的外侧并位于轮顶，它在这个角速度下便会刚好脱离接触，因为向心加速度（centripetal acceleration）$a\omega^2$ 等于 g。）

$\omega > \omega_0$ 时的最大高度

现在 $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$。作为 c 的函数，

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

是一个开口向下的二次函数（quadratic），在其导数（derivative）$1 - 2kc$ 为零之处取得最大值，即

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

这个值严格介乎 0 与 1 之间，所以它是一个容许的松手点（在轮顶稍前的位置），并且给出整个 $[-1, 1]$ 上的最大值。代入后得

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

由于 $k = \frac{1}{2}\omega^2/\omega_0^2$，因而 $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\omega_0^2/\omega^2$，

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

这正是所求的结果。她只要在 $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$ 之处、正朝着轮顶运动时松手，便可达到这个高度。

验算

- 当 $\omega = \omega_0$ 时，公式给出 0，与边界情况吻合；而当 ω 很大时，它的增长有如 $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$，这正是一个质点从 O 的水平位置以速率 $a\omega$ 竖直上抛所能到达的高度。事实上，当 ω 很大时，最佳的松手位置接近 $\theta = \frac{\pi}{2}$，该处的速度是竖直的。
- 单位：ω/ω_0 是无量纲（dimensionless）的，所以 $H_{\max}$ 是一个长度。
- 数值上，取 $a = 2\,\mathrm{m}$ 及 $\omega = 2\omega_0$，公式给出 $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\mathrm{m}$。由松手点 $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 开始逐步计算抛体的运动，会得到相同的数值；而搜索所有松手角度后，亦确认没有其他松手位置能做得更好。

常见错误

- 从轮的中心而非轮顶量度高度：H 中的 $-a$ 是不可或缺的。
- 以为最佳的松手位置是 $\theta = \frac{\pi}{2}$，即她的速度为竖直之处。这样做只是令额外上升的高度最大，而不是令总高度最大。
- 忘记检查最佳的 $c = \omega_0^2/\omega^2$ 是否确实位于 $[-1, 1]$ 之内。

STEP 之外

这里所用的方法，即把一个量写成单一控制变量的函数然后求最优值，是最优控制（optimal control）问题的最简单形式。与之十分相近的是轨迹的包络线（envelope of trajectories，即“安全抛物线”）：从轮上各个松手点出发所能到达的所有点的边界，你可以用同一类判别式（discriminant）论证把它求出来。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以大学一年级的程度阐述抛体运动和转动。

详细解答

STEP II 1996，第 11 题

力学 · 简谐运动

> **STEP II 1996，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q11

关键思路

以弦线的伸长量为研究对象，它其实就是质点*相对于升降机*的位置。在地面参考系（ground frame）中写出质点的牛顿第二定律（Newton's second law），再减去升降机的已知加速度：剩下的就是绕着一个移位后的中心进行的简谐运动（simple harmonic motion，简称 SHM）。只要伸长量保持为正，弦线就一直拉紧，而简谐运动的解正好告诉你伸长量最低可以去到多少。当升降机停止加速时，只有振动的中心会移动；质点相对于升降机的位置和速度都原封不动地延续下去，由此便可求出新的振幅（amplitude）。

解答

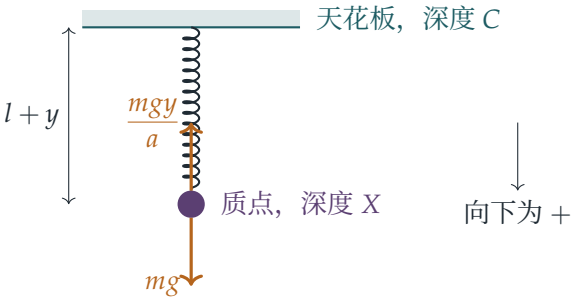
我们把质点的质量设为 m，并把弦线当作轻质弹性弦线，其弹性模量（modulus）为 λ，在拉紧时服从胡克定律（Hooke's law）。全题之中，y 表示弦线长度超出其自然长度 l 的量，所以开始时 $y = a$。只有这样理解，才与题目给出的微分方程（differential equation）吻合。假如 y 是由原来的平衡长度 $l + a$ 量起，右边便会是 $-f$。

运动方程

在最初的平衡状态中，张力（tension）$\lambda a/l$ 与重量平衡，所以

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

而当伸长量为 $y > 0$ 时，张力为 mgy/a。



从固定于地面的一点起，向下量度深度：天花板位于深度 C，质点位于深度 X，所以 $X-C=l+y$。升降机以加速度 f 下降，所以 $\ddot{C}=f$。在弦线拉紧时，对质点沿铅垂方向（以向下为正）分解力，得

$$m\ddot{X}=mg-\frac{mgy}{a}.$$

由于 $y=X-C-l$，我们有 $\ddot{y}=\ddot{X}-\ddot{C}=\ddot{X}-f$，因此

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{a}y=g-f,$$

这正是所要证明的。

弦线保持拉紧；振幅为 af/g

设 $\omega^2=g/a$。常数特解（particular solution）为 $y=(g-f)/\omega^2=a(g-f)/g$，所以通解（general solution）为

$$y=a-\frac{af}{g}+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

在 $t=0$ 时，质点处于原来的平衡位置，并随升降机一起运动，所以 $y(0)=a$ 及 $\dot{y}(0)=0$。由此得 $A=af/g$ 及 $B=0$：

$$y=a-\frac{af}{g}+\frac{af}{g}\cos\omega t.$$

这是以 $y=a-af/g$ 为中心、振幅为 af/g 的简谐运动。质点相对于升降机的位置是 $l+y$，所以质点相对于升降机以振幅 af/g 振动。

? **想一想** 我们用了胡克定律，而它假设弦线是拉紧的。这不是循环论证吗？

不是。我们先假设弦线拉紧然后求解，再检查所得的解从未离开该假设成立的范围。y 的最小值是

$$y_{\min}=a-\frac{2af}{g}=a\left(1-\frac{2f}{g}\right)>0,$$

因为 $f<g/2$。所以 y 保持为正，弦线一直拉紧，这个解前后一致。条件 $f<g/2$ 正是在这里派上用场。

升降机停止加速之后

当 $t > T$ 时，我们有 $\ddot{C} = 0$，同样的论证给出

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

这是以 $y = a$（即自然的平衡伸长量）为中心的简谐运动。设 $z = y - a$，则 $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$。

> ? **想一想** 这段新运动的初始条件是甚么？

升降机的加速度在 $t = T$ 时突变，但它的速度 $\dot{C}$ 不会突变，质点的位置和速度也不会。所以 $y = X - C - l$ 和 $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$ 在 $t = T$ 时是连续的。由第一阶段可知，在 $t = T$ 时，

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

对于简谐运动 $\ddot{z} = -\omega^2 z$，振幅 R 在任何时刻都满足 $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$（这就是能量守恒（energy conservation），或者说是把恒等式 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 应用于 $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$）。因此

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\cdot 4\sin^2\tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

其中用了 $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$。所以新的振幅是

$$R = \frac{2af}{g}\left|\sin\tfrac{1}{2}\omega T\right|,$$

这正是所要证明的。

弦线始终不会松弛：现在的最小伸长量是

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

同样是因为 $f < g/2$。所以 $y > 0$ 自始至终成立，运动方程一直有效。

验算

- 若 T 是周期的整数倍，即 $\omega T = 2k\pi$，则在升降机停止加速的一刻，质点刚好回到 $y = a$，并相对于升降机静止。公式给出的振幅为 0：质点静止悬挂着，理应如此。
- 若 ωT 是 π 的奇数倍，质点位于最高点 $y = a - 2af/g$，并相对于升降机瞬时静止。新的中心是 $y = a$，所以振幅为 $2af/g$，正是公式的最大值。

- 在数值上，我们对随机选取的 a、$f < g/2$ 和 T，在地面参考系中逐步计算整个运动（包括升降机和质点，并在弦线松弛时把张力关掉）。例如，当 $a = 0.546$、$f/g = 0.337$ 及 $\omega T = 15.27$ 时，算出的振幅为 0.18380 和 0.35864，与 af/g 和 $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$ 吻合至六位有效数字，而伸长量从未低于 $a - 2af/g$。

常见错误

- 由原来的平衡长度 $l + a$ 量度 y。这样右边便会是 $-f$，而不是 $g - f$。
- 在第二阶段重新开始时取 $\dot{y} = 0$。在 $t = T$ 时，质点一般正相对于升降机运动，而这个速度对振幅是有贡献的。
- 弄错 f 的正负号。升降机向下加速，会把有效重力减至 $g - f$，所以振动的中心会上升。

STEP 之外

减去升降机的加速度，等同于在加速参考系（accelerating frame）中考虑问题：在这个参考系里，均匀加速度 f 的作用就像一个额外的重力场 $-f$。这个想法引出惯性力（fictitious forces），最终通往爱因斯坦（Einstein）的等效原理（equivalence principle）。第二阶段是振子受阶跃式变化的力驱动的一个简单例子。它的响应取决于阶跃发生在振动的哪个时刻，而处理这类问题的一般工具是格林函数（Green's functions），亦即杜哈梅原理（Duhamel's principle）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种观点处理非惯性参考系（non-inertial frames）和振子。

详细解答

STEP II 1996，第 12 题

概率与统计 · 最大值与最小值的分布

STEP II 1996，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q12

关键思路

多个独立（independent）变量的最大值很难直接处理，但“最大值很小”这个事件却很简单：它发生，当且仅当每一个变量都很小，而独立性让我们可以把概率相乘。所以我们先求累积分布函数（cumulative distribution function），再求导得出密度。第 (ii) 部分正好是它的镜像：最小值很大，当且仅当每一个变量都很大。

解答

第 (i) 部分

每个 X_j 都在 $[0,1]$ 上均匀分布（uniform），所以当 $0 \le y \le 1$ 时，$\mathrm{P}(X_j < y) = y$。对于这个范围内的 y，$Y < y$ 发生当且仅当对每个 j 都有 $X_j < y$，而由于各 X_j 互相独立，

$$F(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j < y) = y^n, \qquad 0 \le y \le 1.$$

当然，当 $y < 0$ 时 $F(y) = 0$，当 $y > 1$ 时 $F(y) = 1$。求导后，Y 的概率密度函数（probability density function）为

$$f(y) = \begin{cases} n y^{n-1}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他情况。} \end{cases}$$

（作为简单的检查，$\int_0^1 n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = 1$。）

接着计算矩（moments）：

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot n y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+2}.$$

因此

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2},$$

因为 $(n+1)^2 - n(n+2) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1$。这正是所要求的结果。

想一想 为甚么要处理 $\mathrm{P}(Y < y)$，而不是一开始就尝试写出 $\mathrm{P}(Y = y)$ 或 Y 的密度?

对连续变量而言，密度并不是概率，而“最大的那个等于 y”这个事件，把“哪一个 X_j 最大”和“其余各个的情况”混在一起。事件 $\{Y < y\}$ 是 n 个独立事件的交集，所以它的概率只是一个简单的乘积。先求分布函数再求导，是处理最大值和最小值的标准方法。

第 (ii) 部分

设 T_j 为第 j 盏灯的失效时间，则 $\mathrm{P}(T_j \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}$，且

$$\mathrm{P}(T_j > t) = \mathrm{e}^{-t/\lambda}, \qquad t > 0.$$

各盏灯互相独立，所以各 T_j 互相独立。设 $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$ 为首次失效的时间。这一次方便处理的事件是 $T > t$，它发生当且仅当每盏灯在时间 t 仍然运作：

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(T_j > t) = \left(\mathrm{e}^{-t/\lambda}\right)^n = \mathrm{e}^{-nt/\lambda}.$$

所以 $\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-nt/\lambda}$，求导便得密度

$$g(t) = \frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}, \qquad t > 0.$$

换句话说，T 的分布与单独一盏灯的分布属同一类型，只是 λ 换成了 λ/n。取 $u = t$ 作分部积分（integration by parts），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty t\,\frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + \Big[-\frac{\lambda}{n}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty = \frac{\lambda}{n},\end{aligned}$$

其中边界项为零，因为当 $t \to \infty$ 时 $t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda} \to 0$。所以直至首次失效的期望时间是 λ/n，正如所求。

验算

- 当 $n = 1$ 时，Y 就是 $[0,1]$ 上的均匀分布，公式给出 $\frac{1}{3\cdot4} = \frac{1}{12}$，正是我们熟悉的均匀变量的方差（variance）。
- 当 n 增大时，方差的表现近似 $1/n^2$：许多个均匀变量的最大值会被挤向 1，一如所料。
- 在第 (ii) 部分取 $n = 1$，一盏灯的期望寿命是 λ，这正是参数为 $1/\lambda$ 的指数分布（exponential distribution）的平均值。
- 模拟 200 000 次五个均匀变量的最大值，得出方差为 0.01993，而理论值是 $\frac{5}{7\cdot36} \approx 0.01984$；以 $\lambda = 3$ 模拟四盏灯，得出首次失效时间的平均值为 0.749，而理论值是 $\frac{3}{4}$。

常见错误

- 对 $\mathrm{P}(T > t)$ 求导时忘记负号，结果得出一个负的“密度”。
- 写成 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)$，而没有减去 $(\mathrm{E}(Y))^2$。
- 以为 n 盏灯各自平均在时间 λ 失效，所以第一盏也在 λ 失效。其实 n 个变量的最小值远小于其中任何一个。

STEP 之外

最大值和最小值是*顺序统计量*（order statistics）的极端情况：把一个样本由小至大排序，n 个均匀变量中第 k 小的那个服从贝塔分布（beta distribution），而这里的 Y 就是 $k = n$ 的情况。第 (ii) 部分显示了一个关键事实：独立指数变量的最小值仍然服从指数分布，而且各个率参数相加。这个事实是泊松过程（Poisson processes）和连续时间马可夫链（continuous-time Markov chains）理论的基础。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）以及 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论导论），都对这些概念有详细阐述。

详细解答

STEP II 1996，第 13 题

概率与统计 · 网格上的随机漫步

STEP II 1996，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q13

关键思路

这条恒等式就是范德蒙恒等式（Vandermonde's identity）：比较等号两边 t^n 的系数（coefficient）即可。至于步行的问题，有用的是一个每走一步都恰好改变一的数量：你身处的位置在我的酒店以北多少个街段，加上以西多少个街段。我每走一步，它就增加 1；我的朋友每走一步，它就减少 1。因此我们只可能在某一个时刻、在某一条由路口组成的对角线上相遇，而相遇的概率（probability）正好就是恒等式中的那个和。

解答

恒等式

$(1+t)^n$ 中 t^r 的系数是 $\binom{n}{r}$。乘积 $(1+t)^n(1+t)^n$ 中含 t^n 的项，来自在第一个因式中选 t^r，并在第二个因式中选 t^{n-r}，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。所以左边 t^n 的系数是

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r},$$

而右边的是 $\binom{2n}{n}$。令两者相等，便得到所求的恒等式。把同样的论证用于 $(1+t)^a(1+t)^b = (1+t)^{a+b}$，可得更一般的版本

$$\sum_{r} \binom{a}{r}\binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

稍后我们会用到它。

我们可以在哪里相遇

把我的酒店放在原点，以街段为单位，x 向东量度，y 向北量度，于是我朋友的酒店位于 $(-n, n)$。对任何位置定义

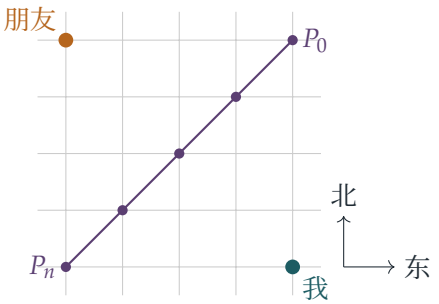
$$D = y - x,$$

即该位置在我的酒店以北的街段数加上以西的街段数。向北走或向西走会使 D 增加 1；向南走或向东走则使它减少 1。所以步行了 t 分钟之后，我有 $D = t$，而我的朋友从 $D = 2n$ 出发，有 $D = 2n - t$。这在每一瞬间都成立，包括走到街段中途的时候，因为 D 随着我们步行而均匀地变化。

要在同一时间身处同一地点，我们的 D 值必须相等，所以 $t = 2n - t$，得出 $t = n$。因此我们只可能在恰好 n 分钟之后相遇，而且是在一个满足 $y - x = n$ 的路口。我走的 n 步使我留在区域 $-n \le x \le 0$、$0 \le y \le n$ 之内，所以可能的相遇点是

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

也就是正方形对角线上的 $n + 1$ 个路口，这条对角线连接我的酒店以北 n 个街段的路口与以西 n 个街段的路口。（特别地，我们永远不可能在街段中途擦身而过。）



上图所示为 $n = 4$ 的情况：相遇点就是对角线上的圆点。

相遇的概率

n 分钟后我位于 P_r，当且仅当我的 n 步之中有 r 步向西、$n - r$ 步向北。每一个由 n 步组成的序列，概率都是 2^{-n}，所以

$$\mathrm{P}(\text{我在}P_r) = \binom{n}{r}\frac{1}{2^n}.$$

我的朋友从 $(-n, n)$ 出发，走 n 步后到达 $P_r = (-r, n - r)$，当且仅当其中 $n - r$ 步向东、r 步向南，其概率为 $\binom{n}{n-r}2^{-n}$。我们两人的步行互相独立（independent），而对不同的 r，“我们两人都在 P_r”这些事件是互斥（mutually exclusive）的，所以

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

这里用了上述恒等式。

迟 $2k$ 分钟出发

现在由我朋友出发的一刻起计算时间 T。当 $T \geq 2k$ 时，我已步行了 $T-2k$ 分钟，所以我有 $D = T-2k$，而我的朋友有 $D = 2n-T$。两者只在 $T = n+k$ 时相等。这时我走了 $n-k$ 步（这里 $k \leq n$，所以这是一个非负整数），而我的朋友走了 $n+k$ 步。由于 $n+k \geq 2k$，我的朋友不可能趁我还在酒店里熟睡时走到对角线靠我这一边。同样，我们只可能在路口相遇，绝不会在街段中途相遇。

走了 $n-k$ 步之后，若其中 r 步向西，我便位于 $(-r, n-k-r)$，其概率为 $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$。我的朋友位于同一点，当且仅当她的 $n+k$ 步之中有 $n-r$ 步向东、$k+r$ 步向南，其概率为 $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$。像之前一样对 r 求和，

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \frac{1}{2^{n-k}\,2^{n+k}} \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

这里用了 $(*)$，其中 $a = n-k$ 及 $b = n+k$。

想一想 为甚么睡过头竟然完全没有影响?

从我朋友的角度看这次步行，量度我相对于她的位置。她的每一步（向南或向东）和我的每一步（向北或向西），都使我相对于她向北移动一个街段或向西移动一个街段，两者的概率各为 $\frac{1}{2}$，而且互相独立。起初我们在两个方向上各相距 n 个街段，而我们相遇，当且仅当合共 $2n$ 步（我的加上她的）恰好由 n 次“向北”和 n 次“向西”的相对移动组成。哪一步由谁来走并不重要，所以无论这 $2n$ 步怎样分配，是 n 和 n，还是 $n-k$ 和 $n+k$，答案都是 $\binom{2n}{n}/2^{2n}$。关于 k 的条件只是确保我真的能走完自己那一份。当 n 很大时，这个概率约为 $1/\sqrt{\pi n}$，数值很小，而且无论我有没有睡过头偶数分钟，它都一样。

$n = 1$，迟一分钟

现在我有 $D = T-1$，而我的朋友有 $D = 2-T$，两者只在 $T = \frac{3}{2}$ 时相等，那时我们两人都正走到街段的中点。所以我们永远不可能在同一时间身处同一个路口；如果相遇是指在路口相遇，概率就是 0。奇偶性（parity）改变了：总步数现在是奇数。

如果把在街段中途擦身而过也算作相遇（两个真实的人自然会这样算），那么当我们沿同一个街段相向而行时，便会在 $T = \frac{3}{2}$ 相遇。在 $T = 1$ 时，我仍在我的酒店 $(0,0)$，而我的朋友在 $(0,1)$ 或 $(-1,0)$。之后我们会相遇的情况是：她在 $(0,1)$ 并向南走而我向北走，或者她在 $(-1,0)$ 并向东走而我向西走。每种情况的概率都是 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$，所以

$$\mathrm{P}(\text{在街段中途相遇}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

验算

- 当 $n = 1$ 而没有延误时，若我向北走而她向东走，或我向西走而她向南走，我们便会相遇：概率为 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \binom{2}{1}/4$。
- 我们用电脑对 $n \leq 5$ 及所有容许的 k 列举了每一对步行路线，每半分钟追踪两人的位置一次。不论延误多少个偶数分钟，相遇的概率都是 $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$，而且相遇总是发生在所预测的那一个时刻。当 $n = 1$ 而延误一分钟时，仅有的相遇都是在 $T = \frac{3}{2}$ 于街段中途发生，总概率为 $\frac{1}{4}$。
- 当 $n = 100$ 时，$\binom{200}{100}/4^{100} \approx 0.0563$，与 $1/\sqrt{100\pi} \approx 0.0564$ 十分接近。

常见错误

- 以为我们可以在任何时间于正方形内任何地方相遇。数量 $y - x$ 把相遇限定在一个时刻和一条对角线上。
- 只把概率平方而没有对各个相遇点求和，或者忘记了我朋友到达 P_r 所需的步数是对调的（她需要向东走 $n - r$ 步，而不是 r 步）。

STEP 之外

相对位置的论证是一种耦合（coupling）：两个独立的随机漫步（random walk）被一个长度为两者之和的漫步取代，这就是 $\binom{2n}{n}/4^n$ 不断重现的原因。同一个数量也是直线上的简单对称随机漫步在 $2n$ 步之后回到原点的概率，而它按 $1/\sqrt{\pi n}$ 衰减（由斯特灵公式（Stirling's formula）得出），正是波利亚（Pólya）定理的关键：该定理指出，一维和二维的这类漫步会以概率 1 返回起点。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）讨论了随机漫步和这些返回概率。

详细解答

STEP II 1996，第 14 题

概率与统计 · 矩与中心极限定理

STEP II 1996，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q14

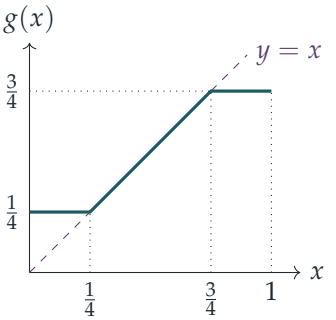
关键思路

Y 就是把 X 的两端“截平”：所有低于 $\frac{1}{4}$ 的概率都堆在 $\frac{1}{4}$ 这一个值上，所有高于 $\frac{3}{4}$ 的概率都堆在 $\frac{3}{4}$ 上。所以 Y 是一个混合型随机变量（mixed random variable），有两个点质量（point mass）和中间一段连续部分，而任何期望值（expectation）$\mathrm{E}(g(Y))$ 也同样分成三部分。最后一部分涉及大量独立复本之和，这就要用上中心极限定理（central limit theorem）。为此我们只需要 Y 的平均值和方差（variance），而前面几部分已经把这项工作做好了。

解答

Y 的矩

由于 $X \sim \mathrm{U}[0,1]$，我们有 $\mathrm{P}(X \le \frac{1}{4}) = \mathrm{P}(X \ge \frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$，而在 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 上 X 的概率密度（density）是 1。写成 $Y = g(X)$，其中 g 是下图所示的截平函数（clipping function），便得 $\mathrm{E}(Y^n) = \int_0^1 g(x)^n \,\mathrm{d}x$。



把积分在 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 处分开，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^n) &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} + \int_{1/4}^{3/4} x^n \,\mathrm{d}x + \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \cdot \tfrac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}} + \frac{3^n}{4^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)(1+3^n)+3^{n+1}-1}{(n+1)4^{n+1}}.\end{aligned}$$

分子是 $n+1+(n+1)3^n+3\cdot 3^n-1 = n+(n+4)3^n$，所以

$$\boxed{\mathrm{E}(Y^n) = \frac{n+(n+4)\,3^n}{(n+1)\,4^{n+1}}} \qquad (n \geq 1).$$

与 X 比较

对于均匀分布（uniform distribution）的变量，$\mathrm{E}(X^n) = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$。

取 $n=1$，公式给出 $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1+5\cdot 3}{2\cdot 16} = \dfrac{1}{2} = \mathrm{E}(X)$，正如所求。（这并不令人意外：截平把两端的质量向内移动了相同的幅度，而且关于 $\frac{1}{2}$ 对称。）

取 $n=2$，$\mathrm{E}(Y^2) = \dfrac{2+6\cdot 9}{3\cdot 64} = \dfrac{56}{192} = \dfrac{7}{24}$，而 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{1}{3} = \frac{8}{24}$。因此

$$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(Y^2) = \frac{8}{24} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24},$$

正如所求。

对于一般的 $n \geq 2$，把两个矩都写成以 $(n+1)4^{n+1}$ 为公分母的形式：

$$\mathrm{E}(X^n) = \frac{4^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}.$$

所以我们要证明 $4^{n+1} > n+(n+4)3^n$。利用 $4^{n+1} = 4(3+1)^n$ 和二项式定理（binomial theorem），并把最高的两项分开写出，

$$4^{n+1} = 4\cdot 3^n + 4n\cdot 3^{n-1} + 4\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}3^k.$$

减去 $n+(n+4)3^n = 4\cdot 3^n + 3n\cdot 3^{n-1} + n$，得

$$4^{n+1} - \left(n+(n+4)3^n\right) = n\,3^{n-1} - n + 4\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}3^k.$$

? **想一想** 为甚么这个差是正数?

当 $n \geq 2$ 时，$3^{n-1} \geq 3$，所以 $n\,3^{n-1} - n \geq 2n > 0$。那个和也是正数，因为它包含 $k = 0$ 的一项，其值为 1，而且每一项都是非负的。因此这个差严格为正，于是

$$\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n) \qquad \text{对所有} n \geq 2.$$

（当 $n = 1$ 时，这个差是 $3^0 - 1 + 0 = 0$，与 $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ 吻合。）

240 000 个复本之和

由上一部分，

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \frac{7}{24} - \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

设 $S = Y_1 + \cdots + Y_N$，其中 $N = 240\,000$。由于各 Y_i 互相独立（independent），期望值和方差都可以相加：

$$\mathrm{E}(S) = \frac{N}{2} = 120\,000, \qquad \mathrm{Var}(S) = \frac{N}{24} = 10\,000,$$

所以 S 的标准差（standard deviation）是 100。各 Y_i 独立同分布（independent and identically distributed），方差有限，而 N 非常大，所以根据中心极限定理，S 近似服从 $\mathrm{N}(120\,000,\, 100^2)$。因此

$$\mathrm{P}(S < K) \approx \Phi\Big(\frac{K - 120\,000}{100}\Big) = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{K - 120\,000}{100} = \Phi^{-1}(0.75) \approx 0.6745,$$

所以

$$K \approx 120\,000 + 67.45 \approx 120\,067.$$

这里不需要连续性校正（continuity correction）：Y 并非只取整数值，而且标准差为 100，任何这类校正对这个准确度根本没有影响。

验算

- $\mathrm{E}(Y^n)$ 的公式所给的值介乎 $(\frac{1}{4})^n$ 与 $(\frac{3}{4})^n$ 之间，这是必然的，因为 $\frac{1}{4} \leq Y \leq \frac{3}{4}$。当 $n = 3$ 时，公式给出 $\frac{3+7\cdot 27}{4\cdot 256} = \frac{192}{1024} = \frac{3}{16} = 0.1875$，而用中点法则（midpoint rule）计算 $g(x)^3$ 的积分，结果吻合至小数点后十位。
- $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{24} < \frac{1}{12} = \mathrm{Var}(X)$：截平把数值拉向平均值，所以离散程度理应下降。
- 模拟 20 000 个由 2400 个 Y 的复本相加而成的和，得出标准化后的上四分位数（upper quartile）约为 0.678，接近 0.6745，这支持了正态近似（normal approximation）。

常见错误

- 把 Y 当作在 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 上均匀分布，因而忘记了两端各有大小为 $\frac{1}{4}$ 的点质量。在该区间上均匀分布的变量，密度是 2，不是 1。

- 用了 $\operatorname{Var}(S) = N^2 \operatorname{Var}(Y)$ 而不是 $N \operatorname{Var}(Y)$。独立性使方差可以相加，所以标准差按 $\sqrt{N}$ 的方式增长。
- 在最后一步弄错正负号。$\mathrm{P}(S < K) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$，所以 K 必定高于平均值。

STEP 之外

Y 是 X 经截平（又称“缩尾”, Winsorised）后的版本，它的分布既不是离散的，也不是连续的。测度论概率（measure-theoretic probability）通过分布函数（distribution function）统一处理这类分布，每个期望值都变成单一个积分 $\int g \, \mathrm{d}F$。在平均值相等的情况下，不等式 $\mathrm{E}(X^n) > \mathrm{E}(Y^n)$ 是凸序（convex ordering）的一个例子：X 是 Y 的“保均值扩散”（mean-preserving spread），所以对每个凸函数 ϕ 都有 $\mathrm{E}(\phi(X)) \geq \mathrm{E}(\phi(Y))$。最后用到的中心极限定理，其证明见 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（一本概率论入门教科书）。

详细解答

STEP III 1996，第 1 题

纯数学 · 双曲函数的幂

STEP III 1996，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q1

关键思路

把双曲函数（hyperbolic functions）写成指数函数，一切便随之而来。幂 $\cosh^n x$ 变成 $2^{-n}(e^x+e^{-x})^n$，再用二项式定理（binomial theorem）展开成指数函数 $e^{(n-2r)x}$；这些项会成对出现，即 $e^{\pm jx}$，而每一对就是一个 $\cosh jx$。$\sinh^{2m} x$ 的同类展开式只差在正负号交替，所以相加或相减时，每隔一项便会消去。

解答

定义与两条恒等式

我们定义

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

由此立即得到两个结果。由于 $\cosh x + \sinh x = e^x$ 及 $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$，

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

把定义式平方，得 $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$ 及 $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$，所以

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

再与恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 相加或相减，得

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

最后这两条式子对任何自变量都成立，所以我们可以把当中的 x 换成 $2x$。

现在把平方差（difference of squares）因式分解：

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

这正是所求。至于两者之和，先配方（complete the square），再利用 $\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$：

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

这就是第二条恒等式。

系数 a_k

根据二项式定理，

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

把下标为 r 的项与下标为 $n-r$ 的项配成一对。由于 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$，两者的系数（coefficient）相同，而指数则互为相反数 $\pm(n-2r)x$，所以两项合起来就是 $2\binom{n}{r}\cosh\big((n-2r)x\big)$。

> **想一想** 究竟哪些 $\cosh kx$ 会真正出现？中间项又会怎样？

指数 $n-2r$ 依次为 $n, n-2, n-4, \ldots$，所以只有与 n 奇偶性（parity）相同的 k 才会出现。设 $k = n-2r$，则当 $1 \le k \le n$ 时，$\cosh kx$ 的系数为 $2\cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$，其中 $r = \frac{1}{2}(n-k)$。当 n 为偶数时，还有一个没有配对的中间项 $r = \frac{n}{2}$，给出常数 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$。因此

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & \text{若} 1 \le k \le n \text{ 且} n-k \text{ 为偶数,} \\ 0 & \text{若} n-k \text{ 为奇数,} \end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n \text{ 为偶数,} \\ 0 & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

例如，$\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$。

最后部分

取 $n = 2m$，以同样方法展开 $\sinh^{2m} x$：

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}e^{(2m-2r)x}.$$

由于 $(-1)^{2m-r} = (-1)^r$，第 r 项与第 $2m-r$ 项仍然可以配对，所以

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh\big(2(m-r)x\big),$$

这就是 $\cosh^{2m} x$ 的展开式（以同样形式写出，并利用 cosh 是偶函数）加上交替的正负号。相减及相加，得

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} \big(1 \mp (-1)^r\big) \binom{2m}{r} \cosh\big(2(m-r)x\big).$$

所以两者之差只保留 r 为奇数的项（每项都变成两倍），两者之和则只保留 r 为偶数的项。像之前一样把 r 与 $2m-r$ 两项合并，并设 $k = 2j = 2(m-r)$，便得到

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 为奇数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 为偶数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

其中常数项来自没有配对的中间项 $r = m$：当 m 为奇数时，它保留在差之中；当 m 为偶数时，它保留在和之中：

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 为奇数}, \\ 0 & m \text{ 为偶数}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 为偶数}, \\ 0 & m \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

用文字来说：当 k 为奇数时，$\cosh kx$ 的系数为 0。当 $k = 2j \ge 2$ 为偶数时，若 $m-j$ 为奇数，则它在差之中的系数为 $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$；若 $m-j$ 为偶数，则它在和之中的系数为此值；其余情况系数均为 0。取 $m = 2$，差为 $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$，而和为 $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$，正好重现我们最初证明的两条恒等式。

验算

代入 $x = 0$：每个 $\cosh kx$ 都变成 1，所以各 a_k 之和必须等于 1（确实如此：二项式系数之和为 2^n），而最后两条展开式的系数之和也必须等于 1。当 $m = 3$ 时，公式给出 $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$ 及 $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$。在 $x = 1$ 处，第一条式子的两边准确至四位有效数字均为 10.87，用计算机可以核实。我们已就 $n \le 12$ 及 $m \le 8$，在随机选取的 x 值处以数值方法验证了所有公式。

常见错误

- 把中间项加倍：当 n 为偶数时，$r = \frac{n}{2}$ 的一项没有配对的伙伴，所以 a_0 是 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$，而不是它的两倍。
- 忘记了只要 k 与 n 的奇偶性相反，就有 $a_k = 0$。
- 以为最后部分必定有常数项。其实常数项只在 m 为奇数时出现于差之中，只在 m 为偶数时出现于和之中。

STEP 之外

把 $\cosh x$（或 $\cos x$）的幂写成 $\cosh kx$ 的组合，是初尝傅里叶分析（Fourier analysis）的滋味：e^{ikx} 是天然的基本构件，而 $\cos^n x$ 则是一个有限傅里叶级数（Fourier series），其系数都是二项式系数。把这个过程倒过来，将 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的多项式，便得到切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials），它们在逼近理论（approximation theory）中十分重要。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）说明了为甚么指数形式会令这些恒等式都显得顺理成章。

详细解答

STEP III 1996，第 2 题

纯数学 · 联立线性方程

STEP III 1996，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q2

关键思路

三个未知数的三条线性方程（linear equations），除非系数的行列式（determinant）等于零，否则恰好有一个解。所以第一步是找出令行列式为零的 a 值；对于其余所有 a，我们只需直接求解。这道题真正的内容在于那些例外的值：我们必须按 b 的取值，判断方程组究竟是不相容（inconsistent），还是有无穷多个解。

解答

把各方程编号为

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

何时有唯一解？

系数矩阵（coefficient matrix）的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

所以当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时，不论 b 是甚么，方程组都恰好有一个解。$a = 0$ 和 $a = 1$ 这两种情况则须另行处理。

一般情况： $a \neq 0, 1$

由 (1) 减去 (2)，得

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

由于 $a \neq 1$，我们可以除以 $1-a$，得 $y = z$。把 $z = y$ 代入 (1) 和 (3)：

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \text{ 即 } x + y = b.$$

由第一式减去第二式，得 $ay = 2 - b$，而由于 $a \neq 0$，

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

代回 (1)、(2) 和 (3)，可确认这确实是一个解；而根据上面的论证，它是唯一的解。

$a = 0$ 的情况

方程组变成

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

把首两条方程相加，得 $2x + y + z = 4$。所以第三条方程的左方必须同时等于 4 和 $2b$。

> ? **想一想** 行列式为零，是否就代表“无解”?

单凭这一点并不足以断定：它只表示这些方程是相依的（dependent），所以要么它们互相矛盾，要么其中一条没有提供新的信息。究竟是哪一种，取决于方程的右方，在这里即取决于 b。

- 若 $b \neq 2$，则 $4 = 2b$ 不成立，所以**无解**。
- 若 $b = 2$，第三条方程只是首两条方程之和，所以只剩下 $x + y = 2$ 和 $x + z = 2$。设 $x = t$，则解为

$$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t \text{ 为任意实数.}$$

$a = 1$ 的情况

这时 (1) 和 (2) 是同一条方程 $x + y + z = 2$，方程组变成

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

由第二式减去第一式，得 $x = 2b - 2$，于是 $y + z = 2 - x = 4 - 2b$。这两条方程永远不会互相矛盾，所以对于每一个 b 值，都有无穷多个解：

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s \text{ 为任意实数.}$$

总结

- $a \neq 0, 1$：唯一解为 $x = \dfrac{(a+1)b-2}{a}$，$y = z = \dfrac{2-b}{a}$。
- $a = 0$，$b \neq 2$：无解。
- $a = 0$，$b = 2$：$(t,\ 2-t,\ 2-t)$，其中 t 为任意数。
- $a = 1$，b 为任意数：$(2b-2,\ s,\ 4-2b-s)$，其中 s 为任意数。

验算

取 $a = 2$，$b = 4$：公式给出 $y = z = -1$ 和 $x = 5$，而确实有 $5-1-2 = 2$、$5-2-1 = 2$ 和 $10-1-1 = 8 = 2b$。再从结构上检查：一般公式的分母含有 a，所以它在 $a = 0$ 时必定失效；事实正是如此，而我们另外所作的分析说明了原因。在 $a = 1$ 时，公式仍然有意义，给出 $(2b-2,\ 2-b,\ 2-b)$，这正是我们那族解中 $s = 2-b$ 的一员：它只是众多解之一，因为 $y = z$ 不再是必然的。我们以精确的有理数运算，对大量随机选取的 a、b 和参数值验证了所有情况。

常见错误

- 除以 $1-a$ 或 a 时，没有说明 $a \neq 1$ 或 $a \neq 0$。这些除法正是特殊情况藏身之处。
- 以为行列式为零就代表无解。当 $a = 1$ 时，总有无穷多个解；而当 $a = 0$ 时，若 $b = 2$ 也有解。
- 忘记明确写出无穷多个解的通式：只说“有无穷多个解”，并不等于解出了方程。

STEP 之外

每条方程都描述三维空间中的一个平面，而这道题问的是三个平面可以怎样相交：交于一点、交于一条公共直线，或者完全没有公共点（当 $a = 0$，$b \neq 2$ 时，三个平面两两相交于三条平行直线，就像棱柱的各个面一样）。有系统的工具是高斯消去法（Gaussian elimination）和矩阵的秩（rank）这个概念：一个方程组相容，当且仅当把右方的常数项添加到矩阵之后，秩没有增加。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把这幅图景阐述得十分精彩。

详细解答

STEP III 1996，第 3 题

纯数学 · 半角代换

STEP III 1996，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q3

关键思路

被积函数（integrand）若由 $1/(\text{常数}+\text{常数}\cdot\cos x)$ 构成，正是使用半角代换（half-angle substitution）$t=\tan\frac{1}{2}x$ 的经典情形：这个代换能把任何关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数（rational function）化为 t 的有理函数。在本题中，它给出标准的 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$，结果是一个反正切（inverse tangent）。其后两个“由此”的结果，只需把各个被积函数重新调整比例，化成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式，再选取 a 和 θ 即可。

解答

一般积分

设 $t=\tan\frac{1}{2}x$。当 x 由 0 变到 θ 时，t 由 0 变到 $T=\tan\frac{1}{2}\theta$，而由于 $0<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\pi$，这个值是有限的正数。由标准的半角公式可得

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

其中第二式是因为 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(1+t^2)$。于是

$$1-a\cos x=\frac{(1+t^2)-a(1-t^2)}{1+t^2}=\frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

所以 $1+t^2$ 这个因子互相约去，得

$$\int_0^{\theta}\frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{T}\frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{1+a}\int_0^{T}\frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad k^2=\frac{1-a}{1+a}.$$

由于 $-1<a<1$，$1-a$ 和 $1+a$ 都是正数，所以 $k=\sqrt{(1-a)/(1+a)}$ 确实是一个正实数。（这正是用到 a 的条件的地方：若 $|a|\geq 1$，分母可能等于零，积分便会成为瑕积

分（improper integral），又或者答案会是对数（logarithm）。）利用 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

最后，$(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$，所以

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

想一想 为甚么需要 $\theta < \pi$?

代换 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 在 $x = \pi$ 处失效，因为那里 t 会变成无限大。保持 $\theta < \pi$，整个范围 $[0,\theta]$ 便会映到有限区间 $[0,\tan\frac{1}{2}\theta]$，公式亦无需特别处理。（令 $\theta \to \pi$ 可得 $\pi/\sqrt{1-a^2}$，因为 $\tan^{-1}$ 趋向 $\frac{1}{2}\pi$。）

第一个“由此”

抽出因子 2：

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

要使积分有限，我们需要 $-2 < a < 2$，这时 $b = \frac{1}{2}a$ 满足 $-1 < b < 1$，所以可以套用一般结果，把 a 换成 b，并取 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，此时 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

这是因为 $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$，并把反正切内分数的分子和分母同时乘以二。这就是所要求的结果。

第二个“由此”

这次我们抽出 $\sqrt{2}$：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

所以我们取 $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$（它在 $(-1,1)$ 之内）和 $\theta=\frac{3}{4}\pi$（它在 $(0,\pi)$ 之内）。于是 $\sqrt{1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2,$$

这是把分子和分母同乘以 $\sqrt{2}-1$，并利用 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ 而得。所以该平方根等于 $\sqrt{2}-1$，而一般公式给出

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1/\sqrt{2}}\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big)=2\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big).$$

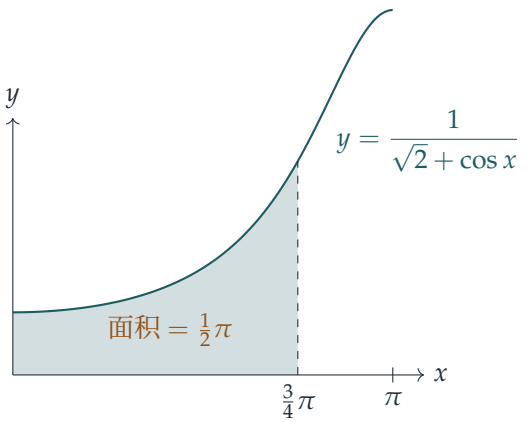
想一想 $\tan\frac{3}{8}\pi$ 等于甚么？

设 $u=\tan\frac{1}{8}\pi>0$，并使用二倍角公式（double-angle formula）：$1=\tan\frac{1}{4}\pi=\dfrac{2u}{1-u^2}$，所以 $u^2+2u-1=0$，而 $u=\sqrt{2}-1$（取正根）。由于 $\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi$，我们得到 $\tan\frac{3}{8}\pi=\cot\frac{1}{8}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$。

因此 $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$，而

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=2\tan^{-1}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

正如所求。



验算

▶ 取 $a=0$ 时，一般公式给出 $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta)=\theta$，这正是 $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$。同样地，在第一个“由此”中取 $a=0$，得到 $\frac{2}{2}\tan^{-1}1=\frac{1}{4}\pi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$。

- 把方框内的答案对 θ 求导，应该得回 $1/(1-a\cos\theta)$；这是练习链式法则（chain rule）的好题目。
- 对最后一个积分使用辛普森法则（Simpson's rule），得到 1.5707963…，与 $\frac{1}{2}\pi$ 吻合；另外，随机选取数百组 a 和 θ 的值，一般公式和第一个“由此”的结果与辛普森法则的相差亦都在 10^{-10} 以内。

常见错误

- 把被积函数调整成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式时，忘记了抽到外面的因子 $\frac{1}{2}$（或 $\frac{1}{\sqrt{2}}$）。
- 在最后一部分使用 $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$：$\sqrt{2}+\cos x$ 中的正负号表示 a 是负数。
- 弄错了 k 的位置：答案是 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，而不是 $\tan^{-1}(t/k)$ 或 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$。

STEP 之外

代换 $t=\tan\frac{1}{2}x$（常称为魏尔斯特拉斯代换（Weierstrass substitution））之所以有效，是因为它用有理函数把单位圆（unit circle）参数化，因而能把任何关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数化为 t 的有理函数，而后者总可以用部分分式（partial fractions）来积分。像 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ 这类积分，也是复分析（complex analysis）中围道积分（contour integration）的标准入门例子，当中由代换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 和留数定理（residue theorem）完成主要工作。想了解这个观点，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像方式讲解复分析的著作）。

详细解答

STEP III 1996，第 4 题

纯数学 · 最大乘积分拆

> **STEP III 1996，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

关键思路

与其逐一搜索 N 的所有拆分（splitting）方式，不如问：一个最优（optimal）拆分不可能包含甚么？任何太大的部分都可以拆成两块而不令乘积（product）减少，而开首的不等式（inequality）所量度的正是这一点。等于 1 的部分是浪费，而太多的 2 则可以换成 3。经过这些调整之后，只剩下寥寥几种形状，而和 N 就从中选定一种。

解答

不等式

我们有

$$k \le 2(k-2) \iff k \le 2k-4 \iff k \ge 4.$$

所以满足该不等式的整数是 $k = 4, 5, 6, \ldots$。此外，只有当 $k = 4$ 时等号才成立，而对于 $k \ge 5$，不等式是严格的：$k < 2(k-2)$。

最优拆分的模样

固定 $N \ge 2$。把 N 写成正整数之和的方式只有有限多种，所以最大乘积 $P(N)$ 存在。各部分的次序不影响和与乘积，所以我们把一个拆分视为由若干部分组成的一个集合。若一个拆分的乘积等于 $P(N)$，就称它为最优拆分。我们提出三项观察，每一项都会改动拆分，但保持其和等于 N。

(a) **没有任何部分是 5 或以上。**若把一个部分 $m \ge 5$ 换成 2 和 $m-2$ 这两个部分（两者皆为正数），乘积就会乘以 $2(m-2)/m$，而根据不等式的严格形式，这个数大于 1。

所以含有部分 $m \geq 5$ 的拆分并非最优。

等于 4 的部分可以换成 $2+2$ 而乘积不变，因为 $2 \times 2 = 4$（即等号成立的情况 $k = 4$）。所以在最优拆分之中，必有一个没有任何部分大于 3。由现在起，我们只考虑这样的一个最优拆分。

(b) **没有任何部分是** 1。由于 $N \geq 2$，一个等于 1 的部分不会是唯一的部分，所以还有另一个部分 a。把 1 和 a 这两个部分换成单一个部分 $a+1$，和保持不变，而因数 $1 \times a = a$ 则变成 $a+1 > a$。这样乘积就增大了，对最优拆分而言这是不可能的。

(c) **最多只有两个部分是** 2。假如有三个 2，把 $2+2+2$ 换成 $3+3$ 就会把因数 8 变成 9，乘积同样会增大。

所以必有一个最优拆分由 a 个 3 和 b 个 2 组成，其中 $b \in \{0,1,2\}$，并且

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a 2^b.$$

想一想 会不会有两组不同的 (a,b) 都配合同一个 N，以致我们仍然要比较两者？

不会。取模（modulo）3 得 $2b \equiv N \pmod 3$，而 $b = 0,1,2$ 分别给出 $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$，是三个不同的余数（residue）。所以 N 决定了 b，继而 $a = (N-2b)/3$ 也随之确定。因此

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{若} N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{若} N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{若} N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$ 时的值

把以上结果逐一应用于每个 N：

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

正如所求。（当 $N = 7$ 时，拆分 $4+3$ 同样是最优的，这就是为甚么观察 (a) 只容许我们把一个 4 换掉，而不能把它排除。）

求 $P(1000)$

由于 $1000 = 3 \times 332 + 4$，我们有 $1000 \equiv 1 \pmod 3$，所以 $b = 2$ 及 $a = (1000 - 4)/3 = 332$。最优拆分是 332 个 3 和两个 2，并且

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}.$$

换言之，最优拆分是 332 个 3 加两个 2，或者 332 个 3 加一个 4。最优拆分就只有这些，因为 (a)–(c) 中的调整显示，任何其他拆分都可以严格地改进。

验算

- 对 N 的每一个拆分作穷举搜索，在 $N \le 40$ 的范围内结果与公式吻合，包括题目给出的五个值。
- 利用 $P(n) = \max_{1 \le p \le n} p\,P(n-p)$ 以电脑作精确计算，得出 $P(1000) = 4 \times 3^{332}$，这是一个 160 位数。
- 作为合理性检查，可与非整数的“拆分”比较：若分成 N/x 个相等的部分，乘积是 $x^{N/x}$，它在 $x = \mathrm{e} \approx 2.72$ 时最大。这就是为甚么 3（以及偶尔出现的 2）会胜出。

常见错误

- 写成 $1000 = 3 \times 333 + 1$ 并答 3^{333}：这个拆分含有一个 1，而 $3 + 1$ 应换成 $2 + 2$，因为 $4 > 3$。
- 声称部分 4“不可能出现”。它可以在最优拆分中出现；只是它永远不会比 $2 + 2$ 更好。
- 只列出 $N = 5, \ldots, 9$ 时的值，却没有证明没有其他拆分能胜过它们。正是关于结构的论证，才证明了这些值是最大的。

STEP 之外

这里的论证是典型的*极端*（extremal）论证或*交换*（exchange）论证：先假设最优的对象存在，然后证明它必定不含某些局部模式。同样的想法也出现于组合数学（combinatorics）、证明贪婪算法（greedy algorithm）为最优的论证，以及整数分拆（integer partitions）的理论之中。其连续版本（求 $x^{N/x}$ 的最大值）是一道有趣的微积分练习。想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于同余（congruence）与初等数论，可参阅 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

详细解答

STEP III 1996，第 5 题

纯数学 · 倍角公式

STEP III 1996，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q5

关键思路

用二项式定理（binomial theorem）展开 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$，再与棣美弗定理（de Moivre's theorem）比较，便可把 $\cos 7\theta$ 和 $\sin 7\theta$ 写成多项式（polynomial）；全式除以 $\cos^7\theta$ 后，一切都化为 $t = \tan\theta$ 的幂。一旦把 $\tan 7\theta$ 写成两个 t 的多项式之比，使 $\tan 7\theta$ 为零的角便令分子为零，而使 $\tan 7\theta$ 无定义的角则令分母为零。除了一个因子 t 之外，两个多项式都是偶函数（even function），所以它们会变成 t^2 的三次多项式（cubic），余下的工作就交给韦达定理（Vieta's formulae）。

解答

$\tan 7\theta$ 的公式

设 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，由棣美弗定理和二项式定理，

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

假设 $\cos\theta \neq 0$，使 $t = \tan\theta$ 有定义。抽出 c^7 得 $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$。利用 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ 以及二项式系数（binomial coefficients）$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$，

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

比较实部（real part）与虚部（imaginary part）（除 i 以外，所有量都是实数），

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

两式相除，因子 $\cos^7\theta$ 互相约去，再把分子和分母同乘以 -1，

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

这正是所求的结果。

为了稍后使用，留意上面两行式子说明了甚么。记 $N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$ 及 $D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$。那么 $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$ 及 $\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$，所以当 $\cos\theta \neq 0$ 时，

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

第 (i) 部分

取 $\theta = \frac{k\pi}{7}$，其中 $k = 1, 2, 3$。那么 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ 而 $\cos\theta \neq 0$，所以 $N(\tan\theta) = 0$。此外，由于 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，故 $\tan\theta \neq 0$，因此可以约去因子 t：

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

所以 $x = t^2$ 满足

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

其中 $x = \tan^2\frac{\pi}{7}$, $\tan^2\frac{2\pi}{7}$, $\tan^2\frac{3\pi}{7}$。

> **想一想** 我们怎样知道这三个数就是全部的根（roots），而不是同一个根重复数了几次?

角 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$ 全都位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，而 tan 在这个区间上取正值且严格递增（strictly increasing）。所以 $\tan^2$ 的三个值互不相同。三次多项式最多有三个根，因此这三个数恰好就是它的全部根，而这正是我们想要的三次多项式。

由韦达定理，各根之积为 7：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{2\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

每个角都位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，故每个正切值都是正数，所以我们取正平方根：

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\,\tan\tfrac{2\pi}{7}\,\tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

第 (ii) 部分

现在取 $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$。那么 $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$，所以 $\cos 7\theta = 0$，而 $\cos\theta \neq 0$。由上文的说明，$D(\tan\theta) = 0$，所以 $y = \tan^2\theta$ 满足

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

与第 (i) 部分一样，这三个角都位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内且互不相同，所以 $\tan^2\theta$ 的三个值互不相同，并且恰好就是这个三次多项式的全部根。由韦达定理，它们的和为 $\frac{35}{7}$：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{14} + \tan^2\tfrac{3\pi}{14} + \tan^2\tfrac{5\pi}{14} = 5.$$

利用第 (i) 部分，还有一个快捷的做法。由于 $\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$，同样地 $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$ 及 $\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$，所求的和就是对第 (i) 部分那个三次多项式的各根 x_i 所取的 $\sum 1/x_i$。即

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

换句话说，在第 (i) 部分的三次方程中代入 $x = 1/y$ 并去分母，便得到第 (ii) 部分的三次方程。

验算

- 代入 $t = 1$，即 $\theta = \frac{\pi}{4}$。公式给出 $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$，而事实上 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$。
- 当 θ 很小时，$\tan 7\theta \approx 7t$，而公式在一阶近似下给出 $\frac{-7t}{-1} = 7t$。
- 数值上，$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$，而 $\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$。

常见错误

- 忘记说明三个值互不相同，因而未能确定它们真的是三次多项式的全部根。
- 在第 (i) 部分答 $\pm\sqrt{7}$：由于三个正切值都是正数，符号已经确定。
- 由 i 的幂引起的正负号错误：$\mathrm{i}^6 = -1$ 及 $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$。

STEP 之外

各数 $\tan^2\frac{k\pi}{7}$ 是共轭代数数（conjugate algebraic numbers）：它们是同一个整数系数不可约（irreducible）三次多项式的根，所以由它们组成的任何对称式（symmetric expression）都是有理数。这就是伽罗瓦理论（Galois theory）的起点，该理论研究多项式各根之间的对称性。同样的技巧还能给出诸如 $\sum_{k=1}^{n}\cot^2\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ 的恒等式，$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ 的其中一个初等证明就用到它。想从几何角度了解棣美弗定理和单位根（roots of unity），可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*；想找更多这类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

详细解答

STEP III 1996，第 6 题

纯数学 · 矩阵群

> **STEP III 1996，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 6.8 节由奇异矩阵组成的群中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/singular-group.html

关键思路

S 中每个矩阵（matrix）都是某个固定矩阵 $\mathbf{J}$ 的倍数，而 $\mathbf{J}^2$ 又是 $\mathbf{J}$ 的倍数，所以 S 中元素的相乘，归根究底只是实数的相乘。出人意表的是，这个群（group）的单位元（identity）并不是单位矩阵（identity matrix）$\mathbf{I}$：这个群根本用不着 $\mathbf{I}$。第 (ii) 部分解释了为何必然如此：在一个群之内，每个元素都可以写成涉及任何另一个元素的乘积，而行列式（determinant）是可乘的。

解答

第 (i) 部分

设

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{于是} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S 的每个元素都是 $a\mathbf{J}$，其中 $a \neq 0$，我们记 $\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$。

封闭性（closure）。对于非零的 a 和 b，

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

由于 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$，我们有 $2ab \neq 0$，所以乘积属于 S。因此 S 在矩阵乘法下封闭。

现在检查其余的群公理（group axioms）。

结合律（associativity）。矩阵乘法对所有 2×2 矩阵都满足结合律，对 S 中的矩阵自然也成立。

单位元。我们要找 $\mathbf{M}_e$，使得对每个 b 都有 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_b$，即 $2eb=b$。所以取 $e=\frac{1}{2}$：

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b}=\mathbf{M}_b,$$

同理 $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2}=\mathbf{M}_b$。所以 $\mathbf{E}=\frac{1}{2}\mathbf{J}$ 是单位元，而且它属于 S。

> **想一想** 单位矩阵 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中。由矩阵组成的群不是需要它吗?

不需要。一个群需要的是某个元素，对集合中其他元素起单位元的作用，而 $\frac{1}{2}\mathbf{J}$ 对 S 的每个元素都做到这一点。它并不是所有 2×2 矩阵的单位元（例如 $\frac{1}{2}\mathbf{JI}\neq\mathbf{I}$），但 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中，所以这并无影响。

逆元（inverses）。给定 $\mathbf{M}_a$，我们要找 $\mathbf{M}_c$ 使得 $2ac=\frac{1}{2}$，所以 $c=\dfrac{1}{4a}$；因为 $a\neq 0$，这个数存在而且非零。于是

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)}=\mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a=\mathbf{M}_{2a/(4a)}=\mathbf{M}_{1/2}=\mathbf{E}.$$

四条公理全部成立，所以 S 在矩阵乘法下是一个群。（它甚至是阿贝尔群（abelian group），因为 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_{2ab}=\mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$。）留意 S 每个元素的行列式都是 $a^2-a^2=0$。这些矩阵没有通常意义下的逆矩阵，但每一个在群内都有逆元。

第 (ii) 部分

假设 $\mathbf{A}\in G$ 满足 $\det\mathbf{A}=0$，并设 $\mathbf{B}$ 为 G 的任意元素。因为 G 是群，$\mathbf{A}$ 在 G 中有逆元 $\mathbf{A}'$，满足 $\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{E}$。（我们写 $\mathbf{A}'$ 而不写 $\mathbf{A}^{-1}$：它是 G 之内的逆元，而不是逆矩阵，后者并不存在。）

设 $\mathbf{C}=\mathbf{A}'\mathbf{B}$。由封闭性，$\mathbf{C}\in G$，而且

$$\mathbf{AC}=\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B})=(\mathbf{AA}')\mathbf{B}=\mathbf{EB}=\mathbf{B},$$

这里用到结合律，以及 $\mathbf{E}$ 是 G 的单位元这一事实。所以方程 $\mathbf{AC}=\mathbf{B}$ 在 G 中有解 $\mathbf{C}$。取行列式，并利用 $\det(\mathbf{XY})=\det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$，

$$\det\mathbf{B}=\det\mathbf{A}\ \det\mathbf{C}=0\cdot\det\mathbf{C}=0.$$

由于 $\mathbf{B}$ 是任意的，G 的每个元素都是奇异（singular）的。特别地，这样的群的单位元 $\mathbf{E}$ 也是奇异的，所以它不可能是 $\mathbf{I}$，正如我们在第 (i) 部分所见。

> **想一想** 我们在哪里用到 G 是一个群，而不仅仅是一个在乘法下封闭的集合?

我们用了逆元 $\mathbf{A}'$ 和单位元 $\mathbf{E}$，把 $\mathbf{B}$ 写成 $\mathbf{A}$ 乘以 G 中的某个元素。没有它们，结论便不成立。例如，$\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$ 在乘法下封闭，并且包含一个奇异矩阵，但 $\mathbf{I}$ 并不奇异。（它不是群：$\mathbf{0}$ 没有逆元。）

$n = 3$ 的一个例子。我们仿照第 (i) 部分的做法。设

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$ 的每个元都是 $1+1+1 = 3$，所以 $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$，并且

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- 封闭性：若 $a, b \neq 0$，则 $3ab \neq 0$，所以乘积属于 G。
- 结合律：这是从矩阵乘法继承而来的。
- 单位元：$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$，因为 $(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3}b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$。
- 逆元：$a\mathbf{K}$ 的逆元是 $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$，因为 $3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$。

所以 G 在矩阵乘法下是一个群。每个 $a\mathbf{K}$ 的三行都相同，所以 $\det(a\mathbf{K}) = 0$：这是一个由奇异 3×3 矩阵组成的群。

（另一个同样可行的例子，是所有形如 $\operatorname{diag}(a, b, 0)$ 而 $a, b \neq 0$ 的矩阵所组成的集合，其单位元为 $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$。）

验算

- 试一个例子：$\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$ 的每个元都是 $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$，所以它等于 $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$，与逆元公式 $\frac{1}{4a}$ 所预测的一致。
- 我们以精确分数，对数百组随机的非零 a, b, c 作了检查：2×2 和 3×3 两族矩阵的封闭性、单位元和逆元公式都成立，这些矩阵的行列式全部为 0，而且 $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$。

常见错误

- 把 $\mathbf{I}$ 当作单位元，或把 $\mathbf{A}^{-1}$ 当作通常的逆矩阵。两者在 S 中都不存在。应该从群本身的乘法规则找出单位元和逆元。
- 忘记检查 $2ab \neq 0$。封闭性要求乘积既有正确的形式，*而且*参数非零。

STEP 之外

决定一个群的是它的运算，而不是它的元素恰好身处何方。这里的群位于 $n \times n$ 矩阵之中，却不与它们共用同一个单位元。事实上 $\mathbf{E}$ 必定满足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$，所以它是一个投影（projection），而这个群以可逆映射的方式作用于 $\mathbf{E}$ 的像（image）上。映射 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$ 是由乘法下的非零实数到 S 的同构（isomorphism），你可以直接验证。想进一步了解，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）；关于投影，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数导论）。

详细解答

STEP III 1996，第 7 题

纯数学 · 根的对称函数

> **STEP III 1996，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q7

关键思路

两部分都建基于同一个事实：三个数的任何对称式（symmetric expression），都可以用它们的和、两两乘积之和，以及它们的积来表示，而这三个量正好就是以这三个数为根（roots）的三次方程（cubic）的系数。在 (i) 中，这把一个非线性方程组化为一条三次方程。在 (ii) 中，我们根本不需要求出根：希罗公式（Heron's formula）对 a, b, c 是对称的，所以只要有三次方程的系数就足够了。

解答

第 (i) 部分

首先是平方和：

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{所以} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

接着我们利用因式分解（factorisation）

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right),$$

你可以展开右方来验证：$x\cdot xy$ 和 $y\cdot(-xy)$ 这类交叉项共九个，它们两两抵消，余下三个形如 $-xyz$ 的项。代入后得

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha\left(\alpha^2 - 2\beta - \beta\right) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

所以 $A=1, B=-3$ 及 $C=3\gamma$。（这里 C 是积的三倍，所以它取决于 γ；A 和 B 则是纯数字。）

现在处理方程组。我们有 $\alpha = 1$，而平方和给出

$$3 = \alpha^2 - 2\beta = 1 - 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = -1.$$

立方和则给出

$$4 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma = 1 + 3 + 3\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0.$$

想一想 我们已知 α, β 和 γ。怎样由此求回 x, y, z?

x, y, z 三数的和为 α、两两乘积之和为 β、积为 γ，当且仅当它们是以下方程的三个根：

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = 0.$$

两个方向都成立：若 x, y, z 是方程组的解，它们就是这条三次方程的根；反过来，这条三次方程的根不论以甚么次序排列，都有正确的 α, β, γ，因而（根据上面的恒等式）满足全部三条方程。这里的三次方程是

$$t^3 - t^2 - t = t\,(t^2 - t - 1) = 0, \qquad \text{所以} \qquad t = 0, \quad t = \tfrac{1}{2}\big(1 + \sqrt{5}\big), \quad t = \tfrac{1}{2}\big(1 - \sqrt{5}\big).$$

因此解为

$$\{x, y, z\} = \Big\{\, 0,\ \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \,\Big\},$$

次序不拘：由于三个值互不相同，合共有六个有序三元组 (x, y, z)。

第 (ii) 部分

由于 a, b, c 是该三次方程的根，

$$x^3 - 16x^2 + 81x - 128 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

对所有 x 都成立。比较 x^2 的系数，得 $a + b + c = 16$，所以 $s = 8$。穷门来了：把 $x = s = 8$ 代入这个恒等式。右方变成 $(s - a)(s - b)(s - c)$，正是希罗公式中的那个乘积：

$$(s - a)(s - b)(s - c) = 8^3 - 16 \cdot 8^2 + 81 \cdot 8 - 128 = 512 - 1024 + 648 - 128 = 8.$$

因此

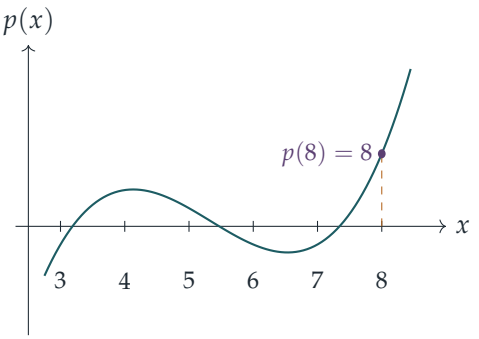
$$\text{面积} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8.$$

想一想 真的有一个三角形以这三个数为边长吗?

我们应该检查一下，因为只有当 a, b, c 都是正数，而且每一个都小于其余两个之和时，希罗公式所描述的才是一个三角形。由于 $a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$，我们需要三个根全部是实数、正数，并且小于 8。设 $p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$。那么

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

所以根据正负号的变化，在 $(3,4)$, $(5,6)$ 和 $(7,8)$ 每个区间内各有一个根。三次方程最多有三个根，所以这些就是全部的根，而且每个根都严格介乎 0 与 8 之间。这个三角形确实存在，其面积为 8。



验算

- 在 (i) 中，试取 $x=1, y=2, z=3$：$\alpha=6, \beta=11, \gamma=6$，而 $216-198+18=36=1+8+27$。
- 取 $x=0, y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1.618, z=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\approx -0.618$：和为 1，又因为 $y^2=y+1$ 及 $z^2=z+1$，平方和为 $(y+z)+2=3$，立方和为 $y^2+z^2+(y+z)=3+1=4$。
- 以数值计算，(ii) 中的根为 $a\approx 3.186$, $b\approx 5.471$, $c\approx 7.343$。把这些值代入希罗公式得 8.000；用余弦定理（cosine rule）求出 C 后，$\frac{1}{2}ab\sin C$ 亦得出相同结果。

常见错误

- 只给出一个三元组，而没有列出全部六种排列；或者忘记 $t=0$ 是 $t^3-t^2-t=0$ 的一个根。
- 弄错韦达公式（Vieta's formulas）中的正负号：对于 $t^3-\alpha t^2+\beta t-\gamma$，正负号是交替出现的。
- 没有检查这些根是否真的构成三角形，就直接求面积。

STEP 之外

对称多项式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）指出：凡是 x, y, z 的多项式，只要在置换（permuting）这三个变量后保持不变，就必定是基本对称函数（elementary symmetric functions）α, β, γ 的多项式。牛顿恒等式（Newton's identities）以

递归方式给出幂和（power sums）$x^k + y^k + z^k$。这些想法通往伽罗瓦理论（Galois theory），它解释了为甚么三次和四次方程有求根公式，而一般的五次方程却没有。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是朝这个方向迈出第一步的好书。

详细解答

STEP III 1996，第 8 题

纯数学 · 莫比乌斯变换

> **STEP III 1996，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

关键思路

这些都是莫比乌斯变换（Möbius transformation，又称分式线性变换，fractional linear transformation），而几乎所有结论都来自两点观察。把 $y = T(x)$ 的分母消去后，所得方程对 x 是线性的，对 y 也是线性的，所以可以解出其中任何一个。另外，把 $T(x)$ 写成一个常数加上 $1/(cx-d)$ 的倍数，便能立刻看出 T 永远取不到哪个值。至于复合（composition），只须代入再通乘便可；把每个 T 与矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ 对应起来，结果最容易整理。

解答

不动点

当 $x \neq d/c$ 时，$T(x) = x$ 即 $ax - b = x(cx - d)$，亦即

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

首先我们验证 $(*)$ 不会产生被禁止的值 $x = d/c$（当 $c \neq 0$ 时）。代入得 $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc - ad)/c \neq 0$，所以 $(*)$ 的每个根都是真正的不动点（fixed point）。

若 $c \neq 0$，$(*)$ 是二次方程，不动点为

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

若 $(a+d)^2 > 4bc$，有两个不动点；若 $(a+d)^2 = 4bc$，有一个；若 $(a+d)^2 < 4bc$，则没有。

若 $c = 0$，条件 $ad \neq bc$ 变成 $ad \neq 0$，所以 $d \neq 0$，而 $T(x) = (b - ax)/d$ 处处有定义。这

时 $(*)$ 变成 $(a+d)x=b$。若 $a+d\neq 0$，恰有一个不动点 $x=b/(a+d)$。若 $a+d=0$ 而 $b\neq 0$，则没有不动点。若 $a+d=0$ 且 $b=0$，则 $T(x)=-ax/d=x$，所以 T 是恒等变换（identity），每个 x 都是不动点。

逆变换

由 $y(cx-d)=ax-b$ 得 $cxy-dy=ax-b$，所以 $x(cy-a)=dy-b$，因此

$$x=T^{-1}(y)=\frac{dy-b}{cy-a}.$$

这与 T 的形式相同，其中

$$a'=d,\qquad b'=b,\qquad c'=c,\qquad d'=a,$$

而且条件依然成立，因为 $a'd'-b'c'=da-bc\neq 0$。（除以 $cy-a$ 是合理的，因为 $y=a/c$ 永远不是 T 的值；见下一部分。）

集合 S_r

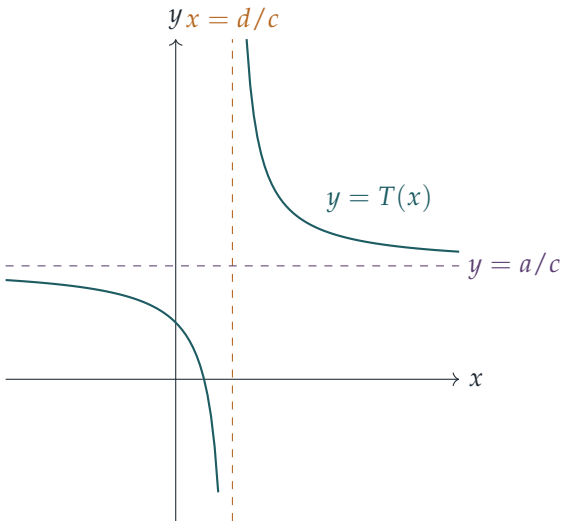
设 $c\neq 0$。$T(x)$ 恰好在 $cx\neq d$ 时有定义，所以我们取 $r=d/c$。于是 T 对每个 $x\in S_{d/c}$ 都有定义。要求出像（image），我们把常数部分分拆出来：

$$ax-b=\frac{a}{c}(cx-d)+\frac{ad-bc}{c},\qquad \text{所以}\qquad T(x)=\frac{a}{c}+\frac{ad-bc}{c\,(cx-d)}.$$

由于 $ad-bc\neq 0$，第二项永不为零，所以 $T(x)\neq a/c$。反过来，每个 $y\neq a/c$ 都能取到。由逆变换的公式得 $x=(dy-b)/(cy-a)$，而这个 x 不等于 d/c，因为 d/c 不是 T^{-1} 的值（把同一个论证用于 T^{-1}，它的“a'/c'”就是 d/c）。因此

$$T(S_{d/c})=S_{a/c},$$

而 T 是由 $S_{d/c}$ 到 $S_{a/c}$ 的双射（bijection）。其图像是一条等轴双曲线（rectangular hyperbola），渐近线（asymptote）为 $x=d/c$ 和 $y=a/c$：



（草图采用 $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$。）

若 $c = 0$，则 $d \neq 0$ 且 $a \neq 0$（因为 $ad \neq 0$），而 $T(x) = (b - ax)/d$ 是一个非常数的线性函数。所以 T 对所有实数 x 都有定义，无须排除任何值，并且把 $\mathbb{R}$ 双射地映满 $\mathbb{R}$。假如我们仍然移去一点 r，则 $T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$。

复合

把 $T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$ 代入 T_2，然后把分子和分母同乘以 $c_1x - d_1$：

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

所以 T_3 具有相同的形式，其中

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

想一想 “相同的形式”真的已经证明了吗？我们还需要 $a_3d_3 \neq b_3c_3$。

是的，这确实需要证明。这些系数正好是以下矩阵乘积的元素：

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

而每个矩阵的行列式（determinant）都是 $bc - ad$。由于乘积的行列式等于行列式的乘积，

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

（你也可以直接展开，只需几行代数运算。）所以 T_3 是同一类型的变换。

T^2 何时是恒等变换?

在复合公式中取 $T_1 = T_2 = T$。于是 $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$，其中

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a-d), \qquad C = c(a-d), \qquad D = bc - d^2.$$

T^2 是恒等变换，即是对其定义域内所有 x 都有 $Ax - B = x(Cx - D)$，而定义域是除了至多几个点以外的全部实数。一个多项式等式若在无限多个点上成立，便恒等地成立，所以我们比较系数：

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

亦即

$$c(a-d) = 0, \qquad (a-d)(a+d) = 0, \qquad b(a-d) = 0.$$

- 若 $a = d$，三式全部成立。事实上 $T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$，其中 $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$。
- 若 $a \neq d$，我们需要 $b = c = 0$ 和 $a = -d$。这时 $T(x) = ax/(-d) = x$，所以 T 本身就是恒等变换。

所以 T^2 是恒等变换，**当且仅当** $a = d$，**或** $b = c = 0$ **且** $a + d = 0$（即 T 是恒等变换）。第二种情况是平凡的，所以值得留意的对合（involution）正好是形如 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$ 而 $a^2 \neq bc$ 的映射。

一个例子

根据刚才求得的条件，我们需要两个满足 $a = d$ 的映射，而它们的复合却有 $a \neq d$。取

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

两者都有 $a = d$，所以 T_1^2 和 T_2^2 都是恒等变换。这也可以直接看出：$-(-x) = x$ 和 $1 - (1 - x) = x$。它们的复合是

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1 - (-x) = x + 1,$$

写成标准形式时有 $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$，所以 $a_3 \neq d_3$。事实上 $T_3^2(x) = x + 2 \neq x$。

从几何上看，直线上的两个反射（reflection）（分别关于 0 和 $\frac{1}{2}$）复合起来是一个平移（translation），而平移并不是自身的逆变换。若想要一个 $c \neq 0$ 的例子，可试试 $T_1(x) = -1/x$ 配上同一个 T_2。这时 $T_3(x) = (x+1)/x$，而 $T_3^2(x) = (2x+1)/(x+1)$。

验算

- 采用草图中的例子 $T(x) = (2x-1)/(x-1)$（$a=2$，$b=1$，$c=d=1$）。它的不动点是 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根，即 $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$，你可以验证 $T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$。它的逆变换是 $(y-1)/(y-2)$，在 $y = 2 = a/c$ 处没有定义，与预测相符。
- 在复合公式中取 $T_1 = T$、$T_2 = T^{-1}$，即 $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$，得 $a_3 = ad - bc$，$b_3 = 0$，$c_3 = 0$，$d_3 = bc - ad$。这是恒等变换，正如所料。
- 我们用电脑验证了逆变换、像和复合的公式，方法是以精确分数对数千组随机的 (a,b,c,d) 进行计算。电脑亦就所有满足 $ad \neq bc$ 的整数 $a,b,c,d \in [-3,3]$，把 T^2 为恒等变换的条件与直接计算的结果互相对照。

常见错误

- 忘记平凡的情况：$a = d$ 并非必要条件，因为恒等变换（$b = c = 0$，$a = -d$）的平方也是恒等变换。
- 证明了复合是两个线性函数之比，却没有验证 $a_3 d_3 \neq b_3 c_3$。
- 在 $c = 0$ 的情况下寻找被排除的点。非常数的线性映射处处有定义，而且能取遍每一个实数。

STEP 之外

容许 $x = \infty$，并规定 $T(d/c) = \infty$ 和 $T(\infty) = a/c$，便令每个这样的 T 都成为扩充直线（extended line）上的双射。若系数取复数，就得到黎曼球面（Riemann sphere）上的莫比乌斯变换。上面用到的矩阵对应关系说明这些映射构成一个群（group），它同构（isomorphic）于可逆 2×2 矩阵模去纯量倍数所得的群（射影线性群，projective linear group）。复合变成矩阵乘法，而一个不是恒等变换的映射是对合，恰好当它的矩阵的迹（trace）为零；在这里即是 $a - d = 0$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）中有一章讲莫比乌斯变换，写得十分精彩。

详细解答

STEP III 1996，第 9 题

力学 · 圆周运动

STEP III 1996，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q9

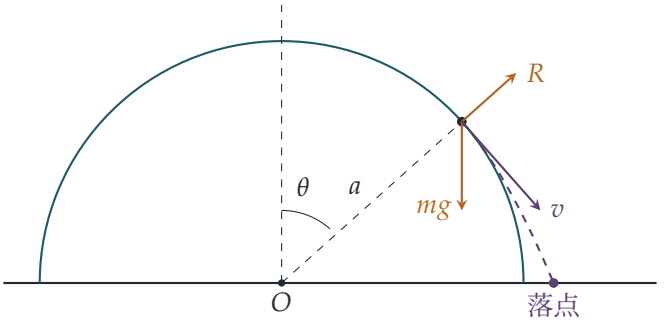
关键思路

整个运动分为两个阶段。质点仍在球面上时，它沿圆周运动，因此由能量守恒（conservation of energy）可求出其速率，再由径向运动方程可求出法向反作用力（normal reaction）；当这个反作用力降至零的一刻，质点便离开球面。此后它只是一个普通的抛体（projectile），从已知的位置、以已知的速率沿切线方向抛出，我们只需求出它在何处越过球心所在的水平面。

解答

模型

把质点视为质量为 m 的质点（point mass），置于一个光滑的固定球面上，球心为 O，并忽略空气阻力。它所受的力只有重量 mg 和法向反作用力 R，后者沿半径方向并背向 O。设 P 为质点所在位置，θ 为 OP 与铅垂向上方向之间的夹角，v 为质点的速率。由于初始位移很小，我们取初速率为零（取极限而言）。



第一阶段：在球面上

反作用力与运动方向垂直，所以它不作功，能量因而守恒。质点由顶点下降了 $a - a\cos\theta$，所以

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{即} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

质点仍在球面上时，它沿半径为 a 的圆周运动，所以沿指向 O 的方向分解力，可得

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad \Longrightarrow \quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

> **想一想** 为甚么质点恰好在 $R = 0$ 时离开球面?

球面只能向外推，所以只要两者仍有接触，便有 $R \geq 0$。当 θ 由 0 开始增大，R 由 mg 持续减小，而按上面的公式，过了 $\cos\theta = \frac{2}{3}$ 之后便会有 $R < 0$。这意味着球面要把质点向内拉，但它做不到。因此质点在以下时刻失去接触：

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga\left(1-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{2}{3}ga.$$

第二阶段：抛体运动

以 O 为原点建立坐标轴，x 轴沿水平方向（取运动的方向），y 轴铅垂向上。离开球面的一刻，质点位于

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

而它的速度沿切线方向，与水平线成俯角 θ：

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{其中} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

现在 $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$，所以质点到达 $y = 0$ 时，有

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

取正根，

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

代入 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，根号内的式子是 $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$，而 $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$。因此

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\left(\sqrt{46} - \sqrt{10}\right).$$

飞行期间所经过的水平距离为

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga}\cdot\sqrt{\frac{a}{27g}}\left(\sqrt{46}-\sqrt{10}\right) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}\left(\sqrt{46}-\sqrt{10}\right) \\ &= \frac{2a}{27}\left(\sqrt{92}-\sqrt{20}\right) = \frac{2a}{27}\left(2\sqrt{23}-2\sqrt{5}\right) = \frac{a}{27}\left(4\sqrt{23}-4\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

加上起始的水平距离 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$，质点与通过 O 的水平面相遇之处，与球心的距离为

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}\left(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}\right) = \frac{a\left(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23}\right)}{27}$$

正是所要求的结果。

飞行途中不会碰到球面

为求严谨，我们应该验证抛体确实不会碰到球面。沿飞行路径设 $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$。按 t 的幂次展开：

- 常数项为 $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$；
- t 的系数为 $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$，因为速度与半径垂直；
- t^2 的系数为 $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$，这正正是 $R = 0$ 的条件；
- 余下的是 $-g u_y t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$，而 $u_y < 0$。

所以当 $t > 0$ 时，$f(t) = g|u_y|\, t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$。质点一直留在球面之外，而上面求得的落点距离就是它实际到达的距离。

验算

- 答案约为 $1.125a$。它大于 a，这是必然的，因为质点必须越过球面，而球面在 O 的水平面上伸展至距离 a 处。
- 离开球面时的高度为球心以上 $\frac{2}{3}a$，这是一个广为人知的结果，而且与 g 和 m 无关。落点距离同样与它们无关，这也是量纲分析（dimensional analysis）所要求的：a 是题目中唯一的长度。
- 我们以数值方法逐步计算了这个运动：由一个极小的位移出发，对 $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$ 作龙格－库塔（Runge–Kutta）积分，到 $R = 0$ 时停止，然后改以抛体运动继续，结果落在 $1.12458a$ 处。精确公式给出 $1.124580\ldots a$。

常见错误

- 用了 $v^2 = ga\cos\theta$（来自 $R = 0$），却忘记把它与能量方程结合，或者用错了速率：离开球面时 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，而不是 $\frac{1}{3}ga$。
- 把抛体当作水平抛出。速度是沿切线方向的，在水平线以下成角 θ，所以从一开始便有向下的分量。

► 由离开球面的位置而不是由球心量度落点距离，这样便漏掉了 x_0。

STEP 之外

“反作用力消失时接触便告终止”这个条件，是*单侧约束*（unilateral constraint）的一个例子。这类约束在力学中随处可见，由金属线上的小珠，以至驶过拱桥的汽车，都是例子。解答最后一步出现的巧合，即抛体的路径与球面在离开点处吻合至二阶，说明在那一刻抛物线与圆具有相同的曲率（curvature）。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种精神处理圆周运动、约束力和能量方法。

详细解答

STEP III 1996，第 10 题

力学 · 涉及摩擦力的平衡

STEP III 1996，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q10

关键思路

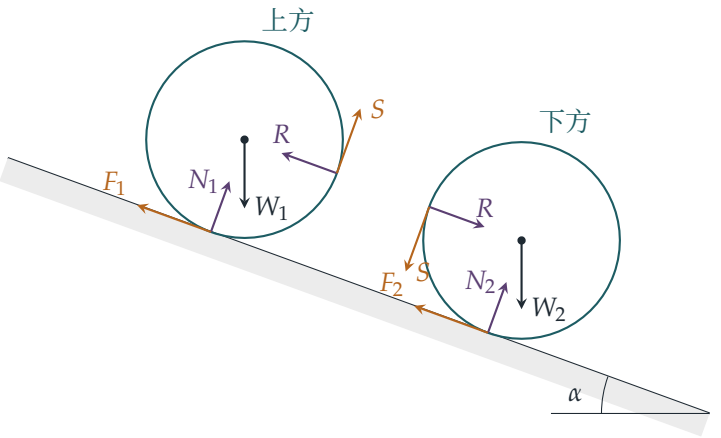
写出六条平衡方程（每个圆柱体各有两条分解力的方程和一条力矩方程），你会发现它们唯一地确定了每一个接触力。力矩方程正是关键所在：每个圆柱体只有两个摩擦力对其中心有力矩，所以这两个摩擦力的大小必定相等。之后，四个不等式中的每一个，都不过是三条接触线之一上的“摩擦力 $\leq$ 摩擦系数 $\times$ 法向反作用力”，再加上两个圆柱体之间的推力不能为负这个条件。

解答

模型。每个圆柱体都是半径为 a 的均匀刚体（uniform rigid body），所以其重量作用于中心（即轴上）。我们在通过两个中心的铅垂截面上考虑问题。由于两个半径相等，而且两个圆柱体都放在斜面上，所以连心线与斜面平行，而两个圆柱体之间的接触点就是该线段的中点。取 x 方向为沿斜面向下，y 方向垂直于斜面并指向斜面之外。

定义以下各力（所有分量最终都可能是正或负）：

- N_1、N_2：斜面对上方和下方圆柱体的法向反作用力（normal reaction）；
- F_1、F_2：斜面对它们的摩擦力（frictional force），以沿斜面向上为正；
- R：两个圆柱体之间的法向力，沿连心线方向，把下方圆柱体推向斜面下方，把上方圆柱体推向斜面上方；
- S：两个圆柱体之间的摩擦力，垂直于斜面，对上方圆柱体的作用方向是远离斜面，因而对下方圆柱体的作用方向是指向斜面（根据牛顿第三定律（Newton's third law））。



（为清楚起见，图中把两个圆柱体分开来画；R 和 S 其实作用于同一条接触线上。每个重量都通过中心铅垂向下作用。）

力矩。对每个圆柱体的中心取力矩（moment）。法向力 N_1、N_2、R 和重量全都通过中心，所以只有摩擦力才有力矩。每个摩擦力都在距离中心 a 之处沿切线方向作用。对上方圆柱体而言，F_1（沿斜面向上，作用于圆柱体底部）和 S（远离斜面，作用于其下坡一侧）的力矩方向相反，由此得

$$aF_1 = aS, \qquad \text{所以} \qquad F_1 = S.$$

同样地，对下方圆柱体而言，F_2（沿斜面向上，作用于其底部）和 S（指向斜面，作用于其上坡一侧）的力矩方向相反，所以 $F_2 = S$。因此

$$F_1 = F_2 = S.$$

想一想 为甚么斜面对每个圆柱体的摩擦力，必定等于两个圆柱体之间的摩擦力？

因为一个可以自由滚动的圆柱体，只有在绕其轴的力偶（couple）互相抵消时才能保持平衡，而摩擦力是唯一对轴有力矩的力。你可以检查一下转向：对上方圆柱体而言，斜面在底部施加的沿斜面向上的摩擦力会令它向下坡方向滚动，即在图中顺时针转动，而作用于其下坡一侧的向上摩擦力则令它逆时针转动。

分解力。平行于斜面（以沿斜面向下为正）：

$$\text{上方：} \quad W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0,$$
$$\text{下方：} \quad W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0.$$

两式相加，并利用 $F_1 = F_2 = S$，得

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

这正是重量沿斜面向下的总分量的一半，与预期相符。两式相减则得

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

垂直于斜面（以向外为正）：

$$\begin{aligned} &\text{上方：} \quad N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad &\Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ &\text{下方：} \quad N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad &\Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

于是六条方程确定了全部六个力。平衡（equilibrium）可以成立，当且仅当这些力在物理上是容许的：每个法向反作用力都非负，而每个摩擦力都不超过摩擦系数（coefficient of friction）乘以相应的法向反作用力。

第 (i) 部分

两个圆柱体只能互相推压，所以 $R \geq 0$。由于 $\sin\alpha > 0$，由此得 $W_1 \geq W_2$。

第 (ii) 部分

在两个圆柱体的接触处，我们需要 $S \leq \mu R$：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

左边严格为正，所以必须有 $R > 0$，即 $W_1 > W_2$（两个重量相等其实是不可能的）。两边除以正数 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$，得

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

正如所求。

第 (iii) 部分

在上方圆柱体与斜面的接触处，我们需要 $N_1 \geq 0$ 和 $F_1 \leq \mu_1 N_1$。由于 $F_1 > 0$，第二个条件已经迫使 $N_1 > 0$。把 $F_1 \leq \mu_1 N_1$ 两边除以 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$：

$$1 \leq \mu_1\left(\frac{2W_1\cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1\right) = \mu_1\left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right).$$

括号内的式子是 $N_1 / \left(\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha\right)$，它是正数，所以我们可以用它来除：

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right)^{-1}.$$

（平衡还需要括号内的式子为正，即 $\tan\alpha < 2W_1/(W_1 + W_2)$；否则上方圆柱体会被撬离斜面。）

关于 μ_2 的不等式

这里 $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 自动为正，而 $F_2 \le \mu_2 N_2$ 在除以 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 之后变成

$$1 \le \mu_2\left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right), \qquad \text{即} \qquad \mu_2 \ge \left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right)^{-1}.$$

想一想 为甚么下方圆柱体的符号是 $+1$，而上方圆柱体的却是 -1?

两个圆柱体之间的摩擦力 S 把上方圆柱体拉离斜面，并把下方圆柱体压向斜面。所以斜面对上方圆柱体的压力较小，对下方圆柱体的压力较大，而上方圆柱体就需要较大的摩擦力与法向反作用力之比。

验算

- 把两个圆柱体的方程相加，便得到整个系统的方程：斜面的总摩擦力为沿斜面向上的 $(W_1+W_2)\sin\alpha$，总法向反作用力为 $(W_1+W_2)\cos\alpha$，与单一刚性方块的情况完全一样。
- 当 $\alpha \to 0$ 时，所有摩擦力和 R 都趋向 0，而 μ_1, μ_2 的两个下界也趋向 0，这正是水平地面上应有的情况。
- 数值上，取 $W_1 = 3$、$W_2 = 1$、$\alpha = 20^\circ$：直接解六条方程得 $R \approx 0.342$、$S = F_1 = F_2 \approx 0.684$、$N_1 \approx 2.135$、$N_2 \approx 1.624$，所以 $\mu \ge 2$、$\mu_1 \ge 0.320$ 和 $\mu_2 \ge 0.421$，与公式吻合。我们也对 W_1、W_2 和 α 的许多随机取值作了同样的检查，结果同样吻合。

常见错误

- 忘记力矩方程。没有它们，就有六个未知数而只有四条方程，问题看起来便无法确定。
- 弄错两个圆柱体之间摩擦力的方向，这会把最后两个答案中的 ±1 对调。
- 忽略了较轻的圆柱体必须在下方：假如上方圆柱体较轻，R 就必须为负。

STEP 之外

这是一个静定（statically determinate）系统：平衡方程确定了每一个力，所以摩擦定律就变成可以检验的条件。当接触点的数目多于方程的数目时（例如一把梯子靠在粗糙的墙上并立于粗糙的地面），系统便是静不定（statically indeterminate）的，单靠刚体静力学无法说明各力如何分担。这时工程师便会引入物体的弹性（elasticity）。Kleppner

与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）仔细讲解了刚体平衡和力矩（torque）。

详细解答

STEP III 1996，第 11 题

力学 · 微小振动

> **STEP III 1996，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q11

关键思路

整道题靠两个圆几何的事实。AC 是直径，所以角 ABC 是直角。由此可得两条弦线的长度，从而以 θ 表示两个张力（tension）。另外，圆心角是圆周角的两倍，所以 B 绕圆心转过了 2θ。因此它由 C 起计的弧长是 $2a\theta$，再沿切线方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），便得到运动方程（equation of motion）。至于振动，则在平衡位置（equilibrium）附近作线性化（linearise）。

动笔之前先提醒一点：题目印出的方程中有 $mg\sin\theta$，其实应该是 $mg\sin 2\theta$。下面的推导会说明原因，而且只有修正后的方程才能得出题目所述的 $5\lambda = 24mg$ 和所述的周期。

解答

运动方程

模型。小环 B 是光滑金属线上一个质量为 m 的质点（particle），所以金属线只施加沿半径方向的法向反作用力（normal reaction）R。两条弦线都是轻而有弹性的，并且遵从胡克定律（Hooke's law）：自然长度为 a 的弦线被拉长至长度 ℓ 时，张力为 $\lambda(\ell - a)/a$。

几何。由于 AC 是直径（长度为 $2a$），由半圆上的圆周角可知 $\angle ABC = 90°$。在直角三角形 ABC 中，

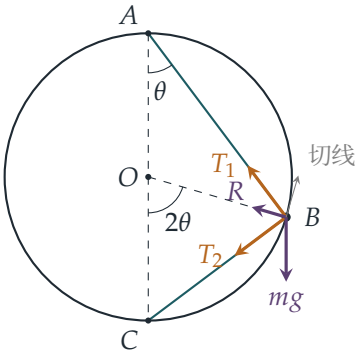
$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

圆周角 $\angle CAB = \theta$ 所对的弧是 CB，所以圆心角是 $\angle COB = 2\theta$。由 C 到 B 的弧长是 $s = 2a\theta$，所以 B 沿金属线、朝 θ 增加的方向（即朝向 A）的加速度是 $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$。

张力。BA 和 BC 的张力分别是

$$T_1 = \lambda\,\frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

两条弦线同时拉紧，当且仅当 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 及 $\sin\theta > \frac{1}{2}$，即 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$。



沿 B 点的切线方向分解。切线与 OB 垂直，而 R 在切线方向没有分量。

- 三角形 OAB 是等腰三角形（$OA = OB = a$），所以 $\angle OBA = \angle OAB = \theta$。因此 BA 与切线的夹角是 $90° - \theta$，而 T_1 的贡献是朝向 A 的 $T_1\sin\theta$。
- 三角形 OCB 是等腰三角形，而 $\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$，所以 $\angle OBC = 90° - \theta$。因此 BC 与切线的夹角是 θ，而 T_2 的贡献是背向 A 的 $T_2\cos\theta$。
- OB 与向下的铅垂线的夹角是 2θ，所以切线与水平线的夹角是 2θ。重力的贡献是背向 A 的 $mg\sin 2\theta$。

沿切线方向应用牛顿第二定律，得

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

因为两个 $2\lambda\sin\theta\cos\theta$ 项互相抵消。这就是所求的方程，只是重力项是 $mg\sin 2\theta$，而不是题目印出的 $mg\sin\theta$。

> ? **想一想** 题目印出的 $mg\sin\theta$ 会不会其实才是对的?

不会。当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，小环与 O 同高，切线是铅垂的，整个重量 mg 都沿金属线方向作用。这样 $mg\sin 2\theta = mg$，但 $mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$。下一部分同样可以作出判断：按题目印出的方程，平衡时会得到 $\lambda = 3mg$，而不是 $\frac{24}{5}mg$。

平衡位置

当 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 时，$\cos\theta = \frac{4}{5}$（取 θ 为锐角），而且 θ 在弦线拉紧的范围之内，因为 $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ 及 $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$。设 $\ddot{\theta} = 0$：

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\right) = mg \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{5} = \frac{24mg}{25} \quad \Longrightarrow \quad 5\lambda = 24mg,$$

正如所求。

小幅振动

设 $f(\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta$，于是 $2ma\ddot{\theta} = f(\theta)$，而在平衡位置 θ_0 有 $f(\theta_0) = 0$。令 $\theta = \theta_0 + \varepsilon$，其中 ε 很小。准确至一阶，$f(\theta_0 + \varepsilon) \approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$，其中

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0 + \cos\theta_0) - 2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg \cdot \tfrac{7}{5} - 2mg\left(\tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\right) = -\tfrac{168}{25}mg - \tfrac{14}{25}mg = -\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

所以

$$2ma\ddot{\varepsilon} = -\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

这是简谐运动（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \dfrac{91g}{25a}$。由于 $f'(\theta_0) < 0$，这个平衡是稳定的（stable）。位移很小，所以弦线一直保持拉紧（θ 始终在 θ_0 附近，远在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 的边界之内）。周期约为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}} = 10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，两条弦线的伸长量相同，所以它们在切线方向的作用互相抵消（$\cos\theta - \sin\theta = 0$），而整个重量沿铅垂的切线作用。我们的方程给出 $2ma\ddot{\theta} = -mg$，这是正确的。
- 取 $a = g = m = 1$ 及 $\lambda = 4.8$，我们用位置向量计算了切向力。它在 $\sin\theta = 0.6$ 时为零。由一个小位移开始以数值方法逐步计算运动，得到周期为 3.29328，与 $10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$ 吻合。

常见错误

- 把弧长当作 $a\theta$。小环绕圆心转过的是 2θ，而不是 θ，所以它的切向加速度是 $2a\ddot{\theta}$。左边的 2 就是这样来的。

- 沿弦的方向分解，而不是沿切线方向分解。反作用力是未知的，所以应沿切线方向分解，把它消去。

STEP 之外

在平衡位置附近作线性化，$\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$，是非线性系统稳定性分析的第一步。当 $f'(x_0) < 0$ 时，它给出稳定性，以及 $\omega^2 = -f'(x_0)$ 的简谐运动。在大学里，这个方法会通过简正模式（normal modes）和矩阵的特征值（eigenvalues）推广到多个自由度（degrees of freedom）的情况。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是进一步阅读的好选择。

详细解答

STEP III 1996，第 12 题

概率与统计 • 马可夫链

> **STEP III 1996，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 12.16 节*顺向与逆向的马可夫链*中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/markov.html

关键思路

这是一条马可夫链（Markov chain）：下一条定理的类型只取决于当前定理的类型。第 (i) 部分是全概率公式（law of total probability），以当前定理的类型作为条件。第 (ii) 部分要求找出一个在这条链作用下保持不变的分布（即*平稳分布*，stationary distribution），这归结为一个小型线性方程组。第 (iii) 部分把这条链倒过来走，而把条件概率（conditional probability）反转，正是贝叶斯定理（Bayes' theorem）的作用。

解答

把定理依次编号。设 X 为某一条定理的类型，Y 为紧接其后那条定理的类型，于是

$$\mathrm{P}(X = i) = a_i, \qquad \mathrm{P}(Y = j \mid X = i) = p_{ij}, \qquad \mathrm{P}(Y = j) = b_j.$$

第 (i) 部分

事件 $\{X = 1\}$、$\{X = 2\}$、$\{X = 3\}$ 互斥（mutually exclusive），而且其中必有一个发生，因为每条定理恰好属于三种类型之一。因此它们构成样本空间（sample space）的一个划分，而事件 $\{Y = j\}$ 可分拆成三个互不相交的部分：

$$\{Y = j\} = \{X = 1,\, Y = j\} \cup \{X = 2,\, Y = j\} \cup \{X = 3,\, Y = j\}.$$

把各部分的概率相加，并把每一项写成 $\mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j \mid X=i)$，得

$$b_j = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j \mid X=i) = a_1 p_{1j} + a_2 p_{2j} + a_3 p_{3j},$$

这就是全概率公式。题目给出的观察在这里用上了：不论当前定理之前发生过甚么，$\mathrm{P}(Y=j \mid X=i)$ 都等于 p_{ij}。

第 (ii) 部分

我们需要对每个 j 都有 $b_j = a_j$，同时 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$，因为各 a_i 构成一个概率分布。沿着数表的各列由上而下读，得到三条方程

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.3a_1 + 0.2a_2 + 0.1a_3, \\ a_2 &= 0.3a_1 + 0.4a_2 + 0.3a_3, \\ a_3 &= 0.4a_1 + 0.4a_2 + 0.6a_3. \end{aligned}$$

> **想一想** 三个未知数却有三条方程，再加上 $a_1 + a_2 + a_3 = 1$：这不是多了一条方程吗？

并没有多，因为这三条方程并非互相独立。由于数表每一行之和都是 1，把三条方程相加便得 $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$。所以其中任意两条都蕴含第三条，而真正把解确定下来的，是归一化条件（normalising condition）。

中间那条方程最容易处理，因为 a_1 和 a_3 在其中的系数相同。利用 $a_1 + a_3 = 1 - a_2$，

$$a_2 = 0.3(1-a_2) + 0.4a_2 \quad\Longrightarrow\quad 0.9a_2 = 0.3 \quad\Longrightarrow\quad a_2 = \tfrac{1}{3}.$$

于是 $a_1 + a_3 = \frac{2}{3}$。把第一条方程乘以 10，得 $7a_1 = 2a_2 + a_3 = \frac{2}{3} + a_3$，再代入 $a_3 = \frac{2}{3} - a_1$，

$$7a_1 = \tfrac{4}{3} - a_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1 = \tfrac{1}{6}, \qquad a_3 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

验算第三条方程：$0.4 \cdot \frac{1}{6} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} + 0.6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2} = a_3$。因此

$$a_1 = \tfrac{1}{6}, \qquad a_2 = \tfrac{1}{3}, \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}.$$

由此可见，长远而言，Ecks 教授的定理有一半是错的。

第 (iii) 部分

现在改设 X 为前一条定理的类型，Y 为指定那条定理的类型，而 X 的分布如第 (ii) 部分所得。我们要求的是 $q_{ij} = \mathrm{P}(X=i \mid Y=j)$。根据贝叶斯定理，

$$q_{ij} = \frac{\mathrm{P}(X=i)\,\mathrm{P}(Y=j \mid X=i)}{\mathrm{P}(Y=j)} = \frac{a_i p_{ij}}{b_j} = \frac{a_i p_{ij}}{a_j},$$

其中最后一步用了第 (ii) 部分的 $b_j = a_j$。这正是题目指定 a_i 取这些值的原因：这样一来，指定那条定理的分布便与它前一条定理的分布相同。

逐列计算：

- $j=1$（$a_1=\frac{1}{6}$）：$q_{11}=\dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{10}$，$q_{21}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.2}{\frac{1}{6}}=\frac{2}{5}$，$q_{31}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.1}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{10}$。
- $j=2$（$a_2=\frac{1}{3}$）：$q_{12}=\dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{20}$，$q_{22}=0.4=\frac{2}{5}$，$q_{32}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.3}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{20}$。
- $j=3$（$a_3=\frac{1}{2}$）：$q_{13}=\dfrac{\frac{1}{6}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{15}$，$q_{23}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{15}$，$q_{33}=0.6=\frac{3}{5}$。

按原来数表的方式排列（第 i 行、第 j 列）：

$$(q_{ij})=\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & \frac{3}{20} & \frac{2}{15}\\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{20} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.15 & 0.1\dot{3}\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\dot{6}\\ 0.3 & 0.45 & 0.6\end{pmatrix}.$$

这里和为 1 的是各列：指定那条定理的类型 j 固定之后，前一条定理必定属于某一种类型。

验算

- (q_{ij}) 每一列之和都是 1；例如 $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}+\frac{3}{5}=1$。
- 对角线上的元素满足 $q_{ii}=p_{ii}$，与公式 $q_{ii}=a_i p_{ii}/a_i$ 所预示的一致。
- 把这条链模拟 10^6 步，得到的长期频率为 0.167、0.333、0.501，而倒推所得的比例与上面每个 q_{ij} 的差距都在 0.001 之内。

常见错误

- 把数表乘以由各 a_i 组成的列向量（即用了行而不是列）。方程是 $b_j=\sum_i a_i p_{ij}$，所以求和是沿着第 j 列由上而下进行的。
- 忘记了 $a_1+a_2+a_3=1$，然后对三条平衡方程（balance equations）无法确定各 a_i 感到困惑。
- 以 p_{ji} 作为第 (iii) 部分的答案。时间上往回走，并不等于把数表反过来读；这条链并不可逆（reversible），因为 $q_{12}=0.15$，而 $p_{12}=0.3$。

STEP 之外

向量 (a_1, a_2, a_3) 是这条链的平稳分布：它是转移矩阵（transition matrix）对应特征值（eigenvalue）1 的左特征向量（left eigenvector）。由于矩阵的每个元素都是正数，不论第一条定理属于哪种类型，第 n 条定理的类型的分布都会收敛至这个平稳分布。数表 (q_{ij}) 描述的是时间反转（time-reversed）后的链；若一条链反转后与原来的看起来一样（即满足 $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$，称为细致平衡条件，detailed balance condition），这类链在随机漫步（random walk）和蒙地卡罗方法（Monte Carlo methods）中占有核心地位。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction* 中有一章讲马可夫链，深入浅出。

详细解答

STEP III 1996，第 13 题

概率与统计 · 切比雪夫不等式

> **STEP III 1996，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q13

关键思路

方差（variance）是若干个非负项 $p_i(x_i-\mu)^2$ 之和，每个取值对应一项。把这个和分成两部分：远离平均值（mean）的取值（相距至少 λ）和靠近平均值的取值。要得到“远”的概率的上界（upper bound），就把“近”的各项丢掉，并把每个“远”的项从下方估计。要得到下界（lower bound），则反其道而行：把每一项都从上方估计，“近”的项不超过 λ^2，“远”的项不超过 k^2。

解答

定义与 $aX+b$

记 $p_i=\mathrm{P}(X=x_i)$，于是 $p_i\ge 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$。那么

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad \mathrm{var}(X)=\mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i,$$

其中 $\mu=\mathrm{E}(X)$。（等价地，$\mathrm{var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mu^2$，但我们将会使用的是第一种形式。）

随机变量（random variable）$aX+b$ 以概率 p_i 取值 ax_i+b。（若 $a=0$，这些值会重合，但把相等取值的概率相加并不会改变下面的各个和。）所以

$$\mathrm{E}(aX+b)=\sum_i (ax_i+b)p_i = a\sum_i x_i p_i + b\sum_i p_i = a\mathrm{E}(X)+b,$$

这里用到 $\sum_i p_i=1$。因此 $aX+b-\mathrm{E}(aX+b)=a(X-\mu)$，而

$$\mathrm{var}(aX+b)=\sum_i \big(a(x_i-\mu)\big)^2 p_i = a^2\sum_i (x_i-\mu)^2 p_i = a^2\,\mathrm{var}(X).$$

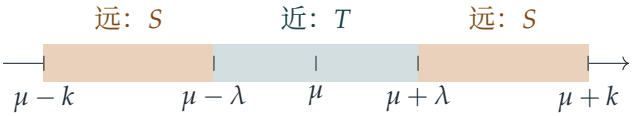
加上 b 会把每个取值和平均值一同平移，所以对离散程度毫无影响。

上界

设 $\mu = \mathrm{E}(X)$，设 S 为满足 $|x_i - \mu| \geq \lambda$ 的下标 i 所组成的集合（即“远”的取值），并设 T 为其余下标的集合，即 $|x_i - \mu| < \lambda$ 者。那么

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) = \sum_{i \in S} p_i.$$

把这个概率记作 P。



方差的每一项都是非负的，所以丢掉 T 中的各项只会令和变小；而对于 $i \in S$，我们有 $(x_i - \mu)^2 \geq \lambda^2$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \sum_{i \in S} (x_i - \mu)^2 p_i + \sum_{i \in T} (x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \sum_{i \in S} (x_i - \mu)^2 p_i \\ &\geq \lambda^2 \sum_{i \in S} p_i = \lambda^2 P.\end{aligned}$$

由于 $\lambda > 0$，我们可以除以 λ^2，得到

$$\mathrm{P}\big(|X - \mu| \geq \lambda\big) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\lambda^2},$$

正是所求。（若 S 是空集，则两个对 S 求的和都是零，不等式显然成立。）

下界

现在再假设对每个 i 都有 $|x_i - \mu| \leq k$。这一次我们把方差的每一项都从上方估计：

- 对于 $i \in S$，由新的假设可知 $(x_i - \mu)^2 \leq k^2$；
- 对于 $i \in T$，由 T 的定义可知 $(x_i - \mu)^2 < \lambda^2$。

由于 $\sum_{i \in T} p_i = 1 - P$，由此得

$$\mathrm{var}(X) \leq k^2 \sum_{i \in S} p_i + \lambda^2 \sum_{i \in T} p_i = k^2 P + \lambda^2 (1 - P) = \lambda^2 + (k^2 - \lambda^2) P.$$

移项整理，

$$(k^2 - \lambda^2)\, P \geq \mathrm{var}(X) - \lambda^2.$$

想一想 我们可以除以 $k^2-\lambda^2$ 吗?

题目告诉我们 $k \geq \lambda > 0$，所以 $k^2-\lambda^2 \geq 0$。若 $k > \lambda$，它严格为正，相除后不等号方向不变：

$$\mathrm{P}\big(|X-\mu| \geq \lambda\big) \geq \frac{\mathrm{var}(X)-\lambda^2}{k^2-\lambda^2},$$

这就是所要求的结果。在边界情况 $k=\lambda$ 时,右边的分母为零,这个命题没有意义;但它前面的那个不等式仍然成立,并给出 $\mathrm{var}(X) \leq \lambda^2$,这是显然的,因为每个 $(x_i-\mu)^2 \leq k^2 = \lambda^2$。

当 $\mathrm{var}(X) \leq \lambda^2$ 时，下界为零或负数，因而没有带来任何新信息；只有当方差相对于 λ^2 较大，迫使部分概率落到两端的尾部时，它才有实质内容。

验算

- 取 $X = \pm 1$，概率各为 0.4，以及 ± 4，概率各为 0.1，于是 $\mu = 0$ 且 $\mathrm{var}(X) = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 16 = 4$。取 $\lambda = 1, k = 4$：$P = 1$，上界是 4，下界是 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$，而确实有 $\frac{1}{5} \leq 1 \leq 4$。
- 取 $X = 0$ 或 $\pm c$，其中 $\mathrm{P}(X = \pm c) = q/2$（两者各自如此）。那么 $\mathrm{var}(X) = qc^2$，而取 $\lambda = c$ 时，上界恰好是 $q = P$：一般而言，切比雪夫不等式（Chebyshev's inequality）无法再改进。
- 我们以精确的有理数运算，在 20 000 个取值最多七个的随机分布上，检验了两个界以及 $\mathrm{E}(aX+b)$ 和 $\mathrm{var}(aX+b)$ 的公式；没有一例出错。

常见错误

- 写成 $\mathrm{var}(aX+b) = a\,\mathrm{var}(X)$ 或 $a^2\mathrm{var}(X)+b$：方差是偏差的二次式，而平移不会改变任何偏差。
- 在下界中，把“近”的各项以 0 而非 λ^2 作上界。这样会得到 $\mathrm{var}(X) \leq k^2 P$，虽然正确，却不是题目所要求的。
- 除以 $k^2-\lambda^2$ 而没有指出它是正数（以及必须排除 $k=\lambda$ 的情况）。

STEP 之外

第一个不等式就是切比雪夫不等式,而丢弃若干项的技巧,正是马尔可夫不等式(Markov's inequality) $\mathrm{P}(Y \geq c) \leq \mathrm{E}(Y)/c$（适用于 $Y \geq 0$）背后的同一手法（把它应用于 $Y = (X-\mu)^2$ 即可）。在大学一年级的概率课程中，切比雪夫不等式能用两行证明弱大数定律（weak law of large numbers）：X 的 n 个独立复本的平均值，其方差为 $\mathrm{var}(X)/n$，所以

它不大可能远离 μ。第二个不等式是一个需要有界性（boundedness）的“反向”版本，与 Paley–Zygmund 不等式（Paley–Zygmund inequality）一脉相承。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）涵盖了以上全部内容。

详细解答

STEP III 1996，第 14 题

概率与统计 • 两状态马可夫过程

> **STEP III 1996，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q14

关键思路

把时间切成长度为 δt 的极短区间，然后问：在其中一个区间内可能发生甚么事？各区间的期望次数可凭期望值的线性性质（linearity of expectation）相加，而正在补胎的概率则符合一个简单的“流入减流出”平衡关系；当 $\delta t \to 0$ 时，这个关系就变成一条一阶线性微分方程（first-order linear differential equation）。一旦求得 $p(t)$，期望补胎时间就是它的积分。

解答

爆胎次数的期望值

只有实际踏单车的时间才会发生爆胎，而我在踏单车时一切正常。把踏单车的总时间 T 分成 n 小段，每段长度为 $\delta t = T/n$。设 X_k 为第 k 段内的爆胎次数；准确至 δt 的一阶，X_k 以概率 $\alpha\,\delta t$ 取值 1，否则取值 0，所以 $\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$。根据期望值的线性性质（毋须假设独立），

$$\mathrm{E}(\text{爆胎次数}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

补胎所花的时间并不计算在内，因为这里的时钟只计踏单车的时间。

$p(t)$ 所满足的方程

现在设 t 为真实（时钟）时间，包括补胎的时间。在时刻 t，我若非正在补胎（概率为 $p(t)$），就是正在踏单车（概率为 $1 - p(t)$）。我在时刻 $t + \delta t$ 正在补胎，当且仅当以下其中一种情况出现：

- 我在时刻 t 正在补胎，而补胎在 $(t, t+\delta t)$ 内没有完成：概率为 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$；或
- 我在时刻 t 正在踏单车，并在 $(t, t+\delta t)$ 内爆胎：概率为 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$。

这两种情况互斥，所以，略去 $(\delta t)^2$ 阶的项（即在同一个极短区间内发生两件事），

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

整理后得

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

令 $\delta t \to 0$，即得

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

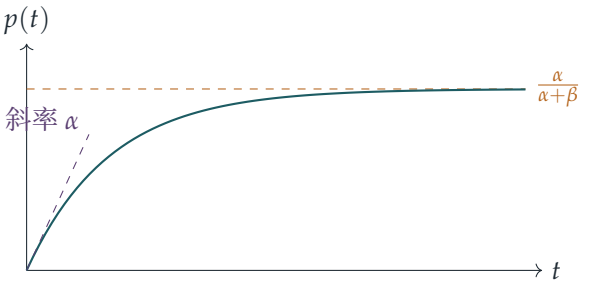
出发时单车状态良好，所以初始条件（initial condition）是 $p(0)=0$。

验证题目给出的解

对于 $p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$，我们有 $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$，并且

$$p'(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t},$$
$$\alpha - (\alpha+\beta)p(t) = \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}.$$

两者相等，所以 p 同时满足微分方程和初始条件，正如所求。



图中可见 p 由 0 开始，以初始斜率 α 上升，并趋向长期水平 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

期望补胎时间

设 R 为在 $[0,T]$ 期间用于补胎的时间，并设 $I(t)$ 在我于时刻 t 正在补胎时取值 1，否则取值 0，于是 $R = \int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$。由于 $\mathrm{E}(I(t)) = p(t)$，取期望值（同样只是线性性质，把积分

看成各小区间上求和的极限）便得

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t + \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T - \frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).$$

想一想 为甚么补胎时间的期望值会等于一个概率的积分?

在每个小区间 $(t, t+\delta t)$ 内，用于补胎的时间以概率 $p(t)$ 约为 δt，否则为 0，所以它的期望值是 $p(t)\,\delta t$。把所有区间加起来，便得 $\sum p(t)\,\delta t \to \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$。

两个近似

记 $x = (\alpha+\beta)T$。旅程中用于补胎的时间所占比例的期望值是

$$F = \frac{\mathrm{E}(R)}{T} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

x 很小。利用 $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \cdots$，可得 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2} = \frac{\alpha T}{2}.$$

这是合理的：在短途旅程中 $p(t) \approx \alpha t$，它在 $[0, T]$ 上的平均值正是 $\alpha T/2$。

x 很大。这时 $0 < \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} < \dfrac{1}{x}$，而后者很小，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

在长途旅程中，$p(t)$ 几乎在所有时间都已稳定在平衡值 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

验算

- 平衡状态：令 $p' = 0$，得 $\alpha(1-p) = \beta p$，即“流入率等于流出率”，所以 $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，与 T 很大时的极限吻合。
- 若 $\beta \to \infty$（补胎瞬间完成），一切与补胎有关的量都趋向 0，理应如此。
- 取 $\alpha = 0.7$、$\beta = 2.3$、$T = 2.5$，公式给出 $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$。模拟 2×10^5 次旅程（踏单车与补胎的时段交替出现，长度均服从指数分布）所得结果为 0.5058；而模拟在踏单车时间 2.5 内的爆胎次数，平均值为 $1.750 = \alpha T$。

常见错误

- 在爆胎一项漏掉因子 $(1-p(t))$：只有正在踏单车时才会爆胎。
- 取 $p(0)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，或没有写明初始条件；单车出发时状态良好，所以 $p(0)=0$。
- 在 x 很小时的展开式中漏掉二阶项，结果得出 $F\approx 0$ 而非 $\alpha T/2$。

STEP 之外

这是一条两状态的连续时间马可夫链（continuous-time Markov chain）：单车以速率 α 和 β 在“运作正常”与“正在修补”两个状态之间来回转换，而 p 所满足的方程正是柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）前向方程最简单的情形。同一个模型也可用来描述会发生故障并获维修的机器、离子通道的开合，以及排队论（queueing theory）中的许多内容。以踏单车时间计算的爆胎次数，是一个速率为 α 的泊松过程（Poisson process）。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）以恰到好处的程度讲解泊松过程和马可夫链。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

1996 年详细解答. 全书各章及
所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为
beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。

