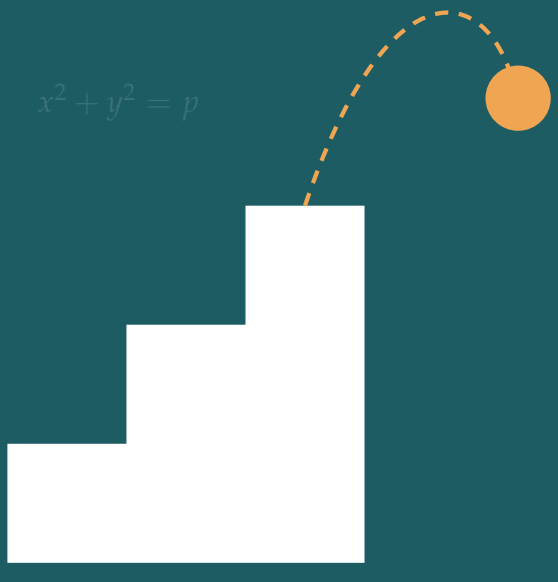
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

STEP I, II 及 III

1993 年详细解答



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

STEP I, II 及 III

1993 年详细解答

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

1993 年详细解答

1993 年 STEP 试卷（STEP I, II 及 III）全部 48 题的详细解答。自样本试卷以来每一道 STEP 题目的详细解答、*Beyond STEP* 全书以及各章的单行本，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

阅读解答之前，请先认真尝试解题。每个答案均已用数值方法核对，但解答数量如此之多，难免会有疏漏：如果发现有可疑之处，请相信自己的演算，并仔细检查。

由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty 提交 issue 指正。

目录

STEP I

第 1 题 骰子点数总和的计数 纯数学 3

第 2 题 等比级数 纯数学 7

第 3 题 丢番图方程 纯数学 11

第 4 题 代换积分法 纯数学 14

第 5 题 绝对值与三角不等式 纯数学 17

第 6 题 曲线描绘 纯数学 21

第 7 题 三次方程的根 纯数学 25

第 8 题 球面与向量 纯数学 29

第 9 题 一阶微分方程 纯数学 33

第 10 题 摆及弹簧的平衡 力学 37

第 11 题 质心 力学 40

第 12 题 抛体的拦截 力学 43

第 13 题 功与功率 力学 47

第 14 题 指数分布的等候时间 概率与统计 51

第 15 题 贝叶斯定理 概率与统计 55

第 16 题 几何概率 概率与统计 58

STEP II

第 1 题 组合博弈策略 纯数学 61

第 2 题 三角函数与代数函数的积分 纯数学 65

第 3 题 里卡蒂微分方程 纯数学 69

第 4 题 偏斜线与最接近距离 纯数学 72

第 5 题 极坐标曲线与弧长 纯数学 76

第 6 题 矩阵代数的反例 纯数学 80

第 7 题 模 5 的无穷递降法 纯数学 84
第 8 题 以数学归纳法证明算术几何平均不等式 纯数学 87
第 9 题 复数的辐角 纯数学 91
第 10 题 次型与圆锥曲线 纯数学 95
第 11 题 二次阻力的运动 力学 99
第 12 题 擦力与刚体 力学 103
第 13 题 谐运动 力学 107
第 14 题 弹与恢复系数 力学 110
第 15 题 心极限定理 概率与统计 114
第 16 题 松过程 概率与统计 118

STEP III

第 1 题 弧长与体积 纯数学 122
第 2 题 拐点与极坐标面积 纯数学 125
第 3 题 矩阵的 LU 分解 纯数学 129
第 4 题 级数求和 纯数学 133
第 5 题 群与四元数 纯数学 137
第 6 题 阿根图上的轨迹 纯数学 141
第 7 题 双曲函数联立方程 纯数学 145
第 8 题 三维空间中的平面与直线 纯数学 149
第 9 题 平方和不等式 纯数学 153
第 10 题 矩阵变换 纯数学 157
第 11 题 偶与转动惯量 力学 161
第 12 题 性绳与能量 力学 165
第 13 题 质量链条 力学 169
第 14 题 垂圆周运动 力学 173
第 15 题 候时间的分布 概率与统计 177
第 16 题 尾正态分布 概率与统计 180

详细解答

STEP I 1993，第 1 题

纯数学 · 骰子点数总和的计数

> **STEP I 1993，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q1

本题在 *Beyond STEP* 第 9.6 节奇怪的骰子中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/strange-dice.html

关键思路

每一面的颜色都不同，所以掷出某个总和的一种“方法”，就是从每颗骰子各选一面。若其中一颗骰子有 a_k 面标着 k，另一颗有 b_k 面，则掷出总和 n 的方法数目为

$$N(n) = \sum_{i+j=n} a_i\, b_j.$$

在第二部分，我们由最小的总和开始，顺着往上读表。每个新的总和只会带来一两个未见过的未知数，所以各个点数的面数会逐一被确定下来，我们只需排除途中出现的少数几个分支。

解答

总和为 6 的情况

第一颗骰子的面数为 $a_1 = 1$、$a_2 = 2$、$a_3 = 2$、$a_6 = 1$。第二颗的面数为 $b_1 = 1$、$b_3 = 2$、$b_4 = 1$、$b_5 = 1$、$b_6 = 1$。要得到总和 6，第一颗骰子须掷出 1、2 或 3；若掷出 6，第二颗骰子便要有 0 才行。所以

$$N(6) = a_1b_5 + a_2b_4 + a_3b_3 = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7,$$

这正是题目要求的七种方法。

找出新的编号方式

把两颗骰子称为 P 和 Q。设 P 有 a_k 面标着 k，Q 有 b_k 面，其中 $k = 1, \ldots, 6$。这些都是非负整数，并且

$$a_1 + \cdots + a_6 = b_1 + \cdots + b_6 = 6.$$

（作为简单的核对，表中各项加起来是 $36 = 6 \times 6$。）

总和 2 和 3。 $N(2) = a_1 b_1 = 0$,所以两颗骰子不可能同时有 1。但 $N(3) = a_1 b_2 + a_2 b_1 = 2$，所以总有一颗骰子有 1。把这颗骰子称为 P。于是 $a_1 \geq 1$ 而 $b_1 = 0$，并且

$$N(3) = a_1 b_2 = 2, \qquad \text{所以} \qquad (a_1, b_2) = (2,1) \text{ 或 } (1,2).$$

$a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情况不可能成立。 由于 Q 没有 1，$N(7) \geq a_1 b_6 = 2b_6$，而由 $N(7) = 3$ 可得 $b_6 \leq 1$。在这个情况下，Q 有一面标着 2，我们来验证它没有 3 或 4：

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = 2b_3 + a_2 = 1$，所以 $2b_3 \leq 1$，这迫使 $b_3 = 0$，继而 $a_2 = 1$。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = 2b_4 + 0 + a_3 = 1$，所以 $b_4 = 0$ 而 $a_3 = 1$。

因此 Q 有一个 2，没有 1、3 或 4，其余五面都是 5 和 6：$b_5 + b_6 = 5$。由于 $b_6 \leq 1$，可得 $b_5 \geq 4$，于是

$$N(6) \geq a_1 b_5 = 2b_5 \geq 8,$$

这与 $N(6) = 4$ 矛盾。所以这个情况不可能出现。

所以 $a_1 = 1$ 而 $b_2 = 2$。 现在我们顺着表往上推，并记住 $b_1 = 0$。

- $N(4) = a_1 b_3 + a_2 b_2 = b_3 + 2a_2 = 1$。由于 $2a_2$ 是偶数，$a_2 = 0$ 而 $b_3 = 1$。
- $N(5) = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 = b_4 + 0 + 2a_3 = 1$。同理，$a_3 = 0$ 而 $b_4 = 1$。
- $N(6) = a_1 b_5 + a_2 b_4 + a_3 b_3 + a_4 b_2 = b_5 + 2a_4 = 4$。

到目前为止，Q 已确定了 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0 + 2 + 1 + 1 = 4$ 面，所以 $b_5 + b_6 = 2$。由 $b_5 = 4 - 2a_4$ 可知 b_5 是偶数，所以 $b_5 = 0$ 或 $b_5 = 2$。

? **想一想** 我们怎样在 $b_5 = 0$ 与 $b_5 = 2$ 之间作出取舍?

我们利用下一个总和。P 没有 2 或 3，而 Q 没有 1，所以

$$N(7) = a_1 b_6 + a_4 b_3 + a_5 b_2 = b_6 + a_4 + 2a_5 = 3.$$

- 若 $b_5 = 0$，则 $a_4 = 2$ 而 $b_6 = 2$。这时 $N(7) \geq b_6 + a_4 = 4 > 3$，这是不可能的。

- 若 $b_5 = 2$，则 $a_4 = 1$ 而 $b_6 = 0$。这时由 $N(7) = 0 + 1 + 2a_5 = 3$ 得 $a_5 = 1$。P 已确定了 $a_1 + a_4 + a_5 = 3$ 面，所以 $a_6 = 3$。

这个表已把一切都确定下来：

$$P:\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6 \qquad\qquad Q:\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5.$$

核对表中其余各项。 我们只用了总和 2 至 7，所以仍须确认这个编号方式能给出其余各项。取 $a_1 = a_4 = a_5 = 1$、$a_6 = 3$ 以及 $b_2 = 2$、$b_3 = b_4 = 1$、$b_5 = 2$：

$$\begin{aligned} N(8) &= a_4b_4 + a_5b_3 + a_6b_2 = 1 + 1 + 6 = 8, \\ N(9) &= a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_3 = 2 + 1 + 3 = 6, \\ N(10) &= a_5b_5 + a_6b_4 = 2 + 3 = 5, \\ N(11) &= a_6b_5 = 6, \\ N(12) &= a_6b_6 = 0. \end{aligned}$$

以上全部与表相符。所以两颗骰子的编号必定是 $1,4,5,6,6,6$ 和 $2,2,3,4,5,5$，而这个编号方式确实能给出该表。除了把两颗骰子的名称对调之外，这是唯一可行的编号方式。

验算

- 画出 $1,4,5,6,6,6$ 对 $2,2,3,4,5,5$ 的 6×6 总和方格表，数一数每个总和出现的次数。你应该得到 $0,2,1,1,4,3,8,6,5,6,0$。
- 用电脑搜索以 1 至 6 为两颗骰子编号的所有方式（每颗骰子有 462 个多重集（multiset）），结果恰好只找到这一对，别无其他，这确认了解是唯一的。

常见错误

- 猜出一个符合该表的编号方式便停下来。题目要求的是推理，所以你需要证明该表迫使编号只能如此。
- 忘记了 $a_1 = 2$、$b_2 = 1$ 的情况，或者没有给出理由便把它排除。
- 由较小的总和确定了各点数的面数后，却始终没有核对总和 8 至 12。

STEP 之外

要把 $N(n)$ 包装得简洁俐落，可以用生成函数（generating function）。若 $p(x) = \sum a_k x^k$ 而 $q(x) = \sum b_k x^k$，则 $p(x)q(x)$ 中 x^n 的系数正好是 $N(n)$，所以这道题其实是要你把一

个给定的多项式（polynomial）因式分解成两个具有特定形状的因式。同样的想法可以得出 *Sicherman* 骰子（Sicherman dice），即 $1,2,2,3,3,4$ 和 $1,3,4,5,6,8$，它们的总和分布与两颗普通骰子相同。Herbert Wilf 的 *generatingfunctionology* 是介绍这个方法的一本生动入门书。

详细解答

STEP I 1993，第 2 题

纯数学 · 等比级数

> **STEP I 1993，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q2

关键思路

每个级数（series）都是抽走了部分项的等比数列（geometric progression）。$\mathrm{S}_n(r)$ 中的指数是所有不是 3 的倍数的数。$\mathrm{T}_n(r)$ 中的指数是偶数或 3 的倍数的数。因此，我们把每个和写成若干个完整等比数列的组合：取一个完整的数列再减去不要的项，或者把两个数列相加，再减去重复计算了的项。

解答

偶数次幂之和

左边是一个首项为 1、公比（common ratio）为 r^2、共有 $n+1$ 项的等比数列。把它记作 E。那么

$$E - r^2E = (1 + r^2 + \cdots + r^{2n}) - (r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n+2}) = 1 - r^{2n+2},$$

因为其余各项全部互相抵销。若 $|r| \neq 1$，则 $r^2 \neq 1$，所以可以除以 $1 - r^2$：

$$1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2n} = \frac{1 - r^{2n+2}}{1 - r^2},$$

正是所要证明的结果。（对实数 r 而言，条件 $r^2 \neq 1$ 恰好就是 $|r| \neq 1$。）

级数 $S_n(r)$

指数 $1,2,4,5,7,8,10,\ldots,3n-1$ 是由 1 至 $3n-1$ 之间所有不是 3 的倍数的整数。它们可以配成一对对的 $3k+1,\ 3k+2$，其中 $k=0,1,\ldots,n-1$。所以

$$S_n(r)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(r^{3k+1}+r^{3k+2}\right)=(r+r^2)\sum_{k=0}^{n-1}r^{3k}.$$

最后的那个和是一个公比为 r^3、共有 n 项的等比数列。对实数 r 而言，$r\neq 1$ 即保证 $r^3\neq 1$，所以

$$S_n(r)=\frac{r(1+r)(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

另一个等价的做法，是取所有幂 $r,r^2,\ldots,r^{3n}$，再剔除指数为 3 的倍数的项：

$$S_n(r)=\frac{r(1-r^{3n})}{1-r}-\frac{r^3(1-r^{3n})}{1-r^3}.$$

求极限时要用的，正是这第二个形式。

极限（limit）。若 $|r|<1$，则当 $n\to\infty$ 时 $|r^{3n}|=|r|^{3n}\to 0$。因此

$$S_n(r)\to\frac{r}{1-r}-\frac{r^3}{1-r^3}.$$

现在 $\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{1}{1-r}-1$，而 $\dfrac{r^3}{1-r^3}=\dfrac{1}{1-r^3}-1$。两个 -1 互相抵销，余下

$$S_n(r)\to\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^3},$$

正是所要证明的结果。

级数 $T_n(r)$

指数 $0,2,3,4,6,8,9,10,12,\ldots,6n$ 是由 0 至 $6n$ 之间所有偶数或可被 3 整除（或两者皆是）的整数。

> ? **想一想** 如果把偶数次幂与指数为 3 的倍数的幂相加，哪些项被计算了两次?

一个指数既是偶数又是 3 的倍数，当且仅当它是 6 的倍数。所以我们运用容斥原理（inclusion–exclusion）：加上偶数次幂，加上指数为 3 的倍数的幂，再减去指数为 6 的倍数的幂。在 $6n$ 或以下，有

- 偶数次幂 $r^0,r^2,\ldots,r^{6n}$，它们组成一个公比为 r^2、共有 $3n+1$ 项的等比数列；
- 指数为 3 的倍数的幂 $r^0,r^3,\ldots,r^{6n}$，它们组成一个公比为 r^3、共有 $2n+1$ 项的等比数列；

- 指数为 6 的倍数的幂 $r^0, r^6, \ldots, r^{6n}$，它们组成一个公比为 r^6、共有 $n+1$ 项的等比数列。

把第一个结果中的 n 换成 $3n$，再对公比 r^3 和 r^6 运用同样的论证，便得到

$$\mathrm{T}_n(r) = \frac{1-r^{6n+2}}{1-r^2} + \frac{1-r^{6n+3}}{1-r^3} - \frac{1-r^{6n+6}}{1-r^6}.$$

由于 $|r| \neq 1$，每个分母都不等于零。这就是为甚么题目在这里要求 $|r| \neq 1$，而对 S_n 只要求 $r \neq 1$：$r = -1$ 会令 $1-r^2$ 和 $1-r^6$ 变成零。

极限。若 $|r| < 1$，则 r^{6n+2}、r^{6n+3} 和 r^{6n+6} 全部趋向 0。所以

$$\mathrm{T}_n(r) \to \frac{1}{1-r^2} + \frac{1}{1-r^3} - \frac{1}{1-r^6}.$$

利用 $1-r^6 = (1-r^2)(1+r^2+r^4) = (1-r^3)(1+r^3)$，以 $1-r^6$ 为公分母通分，便可化简为：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_n(r) = \frac{(1+r^2+r^4)+(1+r^3)-1}{1-r^6} = \frac{1+r^2+r^3+r^4}{1-r^6}.$$

$r > 1$、$r = 1$、$r = -1$ 的情况

我们先数一数项数。在每一组六个指数 $6k, 6k+1, \ldots, 6k+5$ 之中，是偶数或可被 3 整除的有 $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$，即四个。$k = 0, \ldots, n-1$ 的各组涵盖了直至 $6n-1$ 的指数，而最后一项是 r^{6n}。所以 $\mathrm{T}_n(r)$ 共有 $4n+1$ 项。

- $r > 1$：每一项 r^e 都满足 $r^e \geq 1$，所以 $\mathrm{T}_n(r) \geq 4n+1$，因此 $\mathrm{T}_n(r) \to \infty$。
- $r = 1$：每一项都等于 1，所以 $\mathrm{T}_n(1) = 4n+1 \to \infty$。公式在这里失效，因为它的分母都是零。
- $r = -1$：当 e 是偶数时 $(-1)^e$ 为 $+1$，当 e 是奇数时则为 -1。在每一组中，指数 $6k, 6k+2, 6k+4$ 是偶数，而 $6k+3$ 是奇数，所以每一组的贡献是 $1+1-1+1 = 2$。因此

$$\mathrm{T}_n(-1) = 2n+1 \to \infty.$$

在这三种情况下，$\mathrm{T}_n(r)$ 都发散（diverge）至 $+\infty$。留意 $r = -1$ 时同样发散：指数为 3 的奇数倍的项不足以抵销那些偶数次项。试与 $1-1+1-\cdots$ 这类简单的交错级数（alternating series）比较，后者只是振荡（oscillate）而已。

验算

- 在 S_n 的公式中代入 $n = 1$：$\frac{r(1+r)(1-r^3)}{1-r^3} = r + r^2$，结果正确。

- 在 T_n 的极限中代入 $r = \frac{1}{2}$。公式给出 $\frac{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{64}} = \frac{92}{63} \approx 1.4603$，而直接把 $T_n(\frac{1}{2})$ 的几百项加起来，也得到相同的数值。
- 当 $r \to 1^-$ 时，T_n 的极限的表现近似 $\frac{4}{6(1-r)} = \frac{2}{3(1-r)}$。这与每六个幂之中有四个出现的事实吻合，即约为完整级数 $\frac{1}{1-r}$ 的三分之二。

常见错误

- 忘记减去指数为 6 的倍数的项，以致把 $1, r^6, r^{12}, \ldots$ 计算了两次。
- 数错各个等比数列的项数。由 0 至 $6n$ 共有 $3n+1$ 个偶数指数，而不是 $3n$ 个。
- 没有实际把一组的项加起来，便假设 $T_n(-1)$ 会像交错级数那样振荡。

STEP 之外

要数算一个并集(union)中的项,可以把两个集合相加,再减去它们的交集(intersection),这就是*容斥原理*。它与生成函数(generating function)结合起来,是组合数学(combinatorics)和数论（number theory）中的标准工具：我们求得的极限，正是与 6 有公因数的非负整数的生成函数。同样的筛法（sieve）思想，若对每一个质数（prime）都运用一次，便得出黎曼 ζ 函数（Riemann zeta function）的欧拉（Euler）乘积。大学本科的分析学（analysis）会把“当 $|r| < 1$ 时 $r^n \to 0$”这一步严格化，并探讨无穷级数在甚么情况下可以这样重新排列。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对此有很好的讲解。

详细解答

STEP I 1993，第 3 题

纯数学 · 丢番图方程

> **STEP I 1993，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q3

关键思路

由于 $p \le q \le r$，倒数（reciprocal）$\frac{1}{p}$ 是三项之中最大的一项。所以三项之和最多是 $\frac{3}{p}$，这样 p 就只剩下两三个可能的值。p 一经确定，对余下两项再用同一招便可限制 q 的范围，然后 r 就别无选择。整个想法是利用大小次序，把一条含三个未知数的方程（或不等式（inequality））化为一次简短的有限验证。

解答

第 (i) 部分

由于 $1 \le p \le q \le r$，我们有 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}$。所以

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{3}{p},$$

由此得 $p \le 3$。另外 $p \neq 1$，否则 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$，而这对正数 q, r 是不可能的。所以 $p = 2$ 或 $p = 3$。

情况 $p = 2$。这时 $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$。由于 $\frac{1}{r} \le \frac{1}{q}$，

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{2}{q} \quad \Longrightarrow \quad q \le 4,$$

又因为 $\frac{1}{r} > 0$，必须有 $\frac{1}{q} < \frac{1}{2}$，所以 $q \ge 3$。

- $q = 3$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，所以 $r = 6$。
- $q = 4$：$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$，所以 $r = 4$。

情况 $p=3$。这时 $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{2}{3}\le\frac{2}{q}$，所以 $q\le 3$。连同 $q\ge p=3$，只可能是 $q=3$，于是 $\frac{1}{r}=\frac{1}{3}$，所以 $r=3$。

所有情况都已考虑，因此仅有的解是

$$(p,q,r)=(2,3,6),\quad (2,4,4),\quad (3,3,3),$$

再没有其他解。

第 (ii) 部分

若 $p=1$，则无论 q 和 r 取甚么值，和都是 $1+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$。这些就是题目已告诉我们的解。（按次序 $p\le q\le r$，这些解就是 $q=n$、$r=m$，其中 $1\le n\le m$。题目在 m 与 n 之间所写的不等式方向反了，但这并无影响：$p=1$ 对任何 q 和 r 都成立。）所以我们要找的是 $p\ge 2$ 的解。

和之前一样，$\frac{1}{p}$ 是最大的一项，所以

$$1<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{3}{p}\quad\Longrightarrow\quad p<3.$$

连同 $p\ge 2$，得 $p=2$。现在我们需要

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>\frac{1}{2}.$$

? **想一想** 为甚么这次 q 的上界是严格（strict）不等式？这有没有影响？

由于 $\frac{1}{r}\le\frac{1}{q}$，我们有 $\frac{1}{2}<\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{2}{q}$，所以 $q<4$。正是这个严格不等式排除了 $q=4$。（在第 (i) 部分，$q=4$ 是容许的，并给出等号成立的情况 $(2,4,4)$。）连同 $q\ge p=2$，得 $q=2$ 或 $q=3$。

- $q=2$：和是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{r}=1+\frac{1}{r}>1$，对每一个 r 都成立。所以对每个整数 $r\ge 2$，$(2,2,r)$ 都是解。
- $q=3$：我们需要 $\frac{1}{r}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，所以 $r<6$。连同 $r\ge q=3$，得 $r=3,4,5$。

所以，除了 $p=1$ 的那一族解之外，其余的解是

$$(p,q,r)=(2,2,r)\text{ 其中 }r\text{ 为任何整数，}r\ge 2,\qquad (2,3,3),\quad (2,3,4),\quad (2,3,5).$$

以上每一步都是别无选择的，所以再没有其他解。

验算

直接代入。例如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}>1$，但 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ 刚好相等。这说明了为甚么 $(2,3,5)$ 是 $q=3$ 那一族的最后一个，而 $(2,3,6)$ 则是第 (i) 部分的边界情况。同样，$(2,4,4)$ 给

出的和刚好是 1，所以 $p = 2$、$q = 4$ 的组合全都进不了第 (ii) 部分。用电脑搜索所有 $1 \le p \le q \le r < 400$，结果与两张清单完全吻合。

常见错误

- 在第 (ii) 部分漏掉无穷多个解的那一族 $(2, 2, r)$。一旦 $p = q = 2$，头两项加起来已经是 1。
- 在第 (ii) 部分把 $p < 3$ 写成 $p \le 3$，然后在 $p = 3$ 上浪费时间（这时和最多只是 1）。
- 只列出解，却没有说明每种情况都已检查。“再没有其他解”这一句占了一半分数。

STEP 之外

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ 的解，正好就是那些能令内角为 $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ 的三角形存在于球面上的三元组。它们与三维空间中的有限对称群（symmetry group）互相对应：二面体群（dihedral）$(2, 2, r)$、四面体群（tetrahedral）$(2, 3, 3)$、八面体群（octahedral）$(2, 3, 4)$ 和二十面体群（icosahedral）$(2, 3, 5)$。第 (i) 部分则给出平面的三种正则镶嵌（regular tiling）。像这样要求整数解的方程，称为丢番图方程（Diophantine equation）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是很好的入门书，而 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 则讲述了这些对称群。

详细解答

STEP I 1993，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 1993，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q4

关键思路

代换（substitution）$t = \pi - x$ 把区间 $[0, \pi]$ 反射到它自身，而且不会改变 $\sin x$，因为 $\sin(\pi - t) = \sin t$。于是那个碍事的因子 x 变成 $\pi - t$，而我们要求的积分会带着负号在右边再次出现，这样就可以把它解出来。至于其后的积分，主要工作是把 $1 + \cos^2 x$ 用 $\sin x$ 表示。在 $[\pi, 2\pi]$ 上，平移 π 就可以回到 $[0, \pi]$。

解答

一般结果

设 $I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，并令 $t = \pi - x$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$。当 $x = 0$ 时 $t = \pi$，当 $x = \pi$ 时 $t = 0$。另外 $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^\pi (\pi - t)\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\,\mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

最后一个积分又是 I，因为积分变量（variable of integration）叫甚么名字并无关系。所以 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin t)\,\mathrm{d}t$，由此得

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

这正是所要证明的结果。（我们需要这些积分存在，例如 f 在 $[-1, 1]$ 上连续（continuous）即可。）

$[0,\pi]$ 上的积分

> **想一想** 被积函数（integrand）含有 $\cos^2 x$，而不只是 $\sin x$。它真的是 $x\,\mathrm{f}(\sin x)$ 的形式吗?

是的。由于 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$，我们有 $1+\cos^2 x = 2-\sin^2 x$，所以

$$\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = x\,\mathrm{f}(\sin x) \qquad \text{其中} \qquad \mathrm{f}(s) = \frac{s}{2-s^2},$$

而且 f 在 $[-1,1]$ 上连续。根据一般结果，

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

余下的积分很容易，因为 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的导数（derivative）（差一个负号）。代入 $u=\cos x$，其中 $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$，

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$[0,2\pi]$ 上的积分

一般结果只适用于 $[0,\pi]$，所以我们把积分范围拆开：

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi}.$$

> **想一想** 怎样才能把 $\int_\pi^{2\pi}$ 化回 $[0,\pi]$ 上的积分?

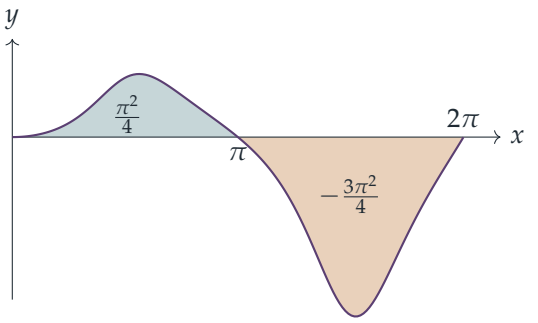
平移 π：令 $x = u+\pi$，于是 u 由 0 变到 π。这时 $\sin x = -\sin u$ 而 $\cos x = -\cos u$，所以 $\cos^2 x = \cos^2 u$。因此

$$\begin{aligned}\int_\pi^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(u+\pi)(-\sin u)}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_0^\pi \frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \pi\int_0^\pi \frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{\pi^2}{4} - \pi\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi^2}{4},\end{aligned}$$

这里用了上一部分的两个结果。把两部分相加，

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

从图像可以看出答案为甚么是负数。在 $[\pi,2\pi]$ 上，因子 $\sin x$ 是负的，而且那里的因子 x 比在 $[0,\pi]$ 上的大。所以轴下方的面积多于轴上方的面积。



验算

- 取 f ≡ 1：一般结果给出 $\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}$，这是正确的。
- 被积函数在 $(0,\pi)$ 上为正，所以第一个答案必须是正数，而 $\pi^2/4 \approx 2.467$ 确实如此。用辛普森法则（Simpson's rule）计算，第一个积分得 2.4674011，第二个得 −4.9348022，与 $\pi^2/4$ 和 $-\pi^2/2$ 吻合。
- 随机选取几个 f 作数值检验，一般恒等式（identity）同样成立。

常见错误

- 直接在 $[0,2\pi]$ 上套用一般结果。这个结果依赖反射 $x \mapsto \pi - x$ 把区间映射到它自身，而在 $[0,2\pi]$ 上这样做会得出错误答案 $\frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$（那里正确的反射是 $x \mapsto 2\pi - x$，而 $\sin x$ 在这个反射下会变号）。
- 漏掉 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ 中的负号，或者忘记把积分上下限调换回来。
- 写成 $\arctan(-1) = 3\pi/4$：反正切（arctangent）的取值范围是 $(-\pi/2, \pi/2)$，所以 $\arctan(-1) = -\pi/4$。

STEP 之外

这里的窍门是利用定义域（domain）的一种对称性（symmetry），而被积函数几乎保持这种对称：把 x 换成 $\pi - x$，再把积分的两个版本取平均。用同样的想法，完全不必积分就可以得到 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$。在大学里，这类对称性论证在分析学（analysis）中随处可见，也出现在傅里叶级数（Fourier series）中，在那里函数的奇偶性（parity）决定哪些项得以保留。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多这类代换的 STEP 式练习，而 Abbott 的 *Understanding Analysis* 则严格地建立了变量代换法则（change-of-variables rule）。

详细解答

STEP I 1993，第 5 题

纯数学 · 绝对值与三角不等式

STEP I 1993，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q5

关键思路

一切都建基于三角不等式（triangle inequality）：和的长度不会超过各项长度之和。逐项运用这个不等式，便可用一个关于 $|z|$ 的等比级数（geometric series）来界定多项式的大小；而当 $|z| \le \frac{1}{2}$ 时，这个级数始终严格小于 1。若要成为根（root），多项式部分必须等于 -1，而它的模（modulus）恰好是 1，所以根不可能落在圆盘（disc）$|z| \le \frac{1}{2}$ 之内。

解答

模与乘积法则

设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 为实数，则模就是原点到点 (x, y) 的距离：

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{(取非负平方根)}.$$

设 $z_1 = a + \mathrm{i}b$ 及 $z_2 = c + \mathrm{i}d$，其中 a, b, c, d 为实数。那么 $z_1 z_2 = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc)$，所以

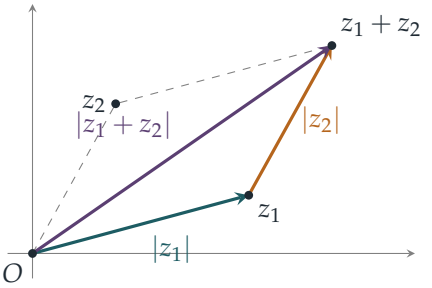
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

$|z_1 z_2|$ 和 $|z_1||z_2|$ 都是非负数，所以两边取平方根便得 $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，这正是所要证明的结果。

三角不等式

在阿根图（Argand diagram）上，设 O 为原点，A 为点 z_1，C 为点 z_1+z_2。那么 $\overrightarrow{AC}$ 代表 z_2（它与由 O 到 z_2 的向量相同），所以 OAC 是一个三角形，其边长为

$$OA = |z_1|, \qquad AC = |z_2|, \qquad OC = |z_1+z_2|.$$



两点之间以直线最短：由 O 直接走到 C，不会比绕道 A 更长。因此

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|,$$

等号成立，当且仅当 O、A、C 三点共线而 A 位于另外两点之间，也就是说，z_1 与 z_2 指向同一方向（或其中一个为 0）。

如果你较喜欢代数方法：以 $\bar{z}$ 表示共轭（conjugate），则

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\\ &\le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

这是因为复数的实部不会超过它的模，而根据乘积法则，$|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$。

重复运用这个不等式（对项数作一个简单的归纳法（induction）），便得

$$|w_1+w_2+\cdots+w_n| \le |w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|$$

对任意复数 $w_1,\ldots,w_n$ 均成立。

多项式的上界

假设对每个 j 都有 $|a_j| \le 1$，并且 $|z| \le \frac{1}{2}$。那么

$$\begin{aligned}\left|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z\right| &\le |a_n||z|^n+|a_{n-1}||z|^{n-1}+\cdots+|a_1||z|\\ &\le |z|^n+|z|^{n-1}+\cdots+|z|\\ &\le \left(\tfrac{1}{2}\right)^n+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\tfrac{1}{2}\\ &= 1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\\ &< 1.\end{aligned}$$

第一行用了 n 项的三角不等式，再配合乘积法则（重复使用，从而得出 $|a_k z^k| = |a_k||z|^k$）。第二行用了 $|a_j| \le 1$，第三行用了 $0 \le |z| \le \frac{1}{2}$，第四行则是把有限等比级数求和。这就是所要求的严格不等式。

> ? **想一想** 那个严格不等式是从哪里来的？上面每一步都只是“$\le$”。

它来自有限等比级数：$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ 与 1 之间恰好相差 $\frac{1}{2^n} > 0$。接下来的推论所需要的，正是这个差距。

根

（试卷最后一行写的是 $|x| > \frac{1}{2}$；这显然是 $|w| > \frac{1}{2}$ 的误印，因为所讨论的根是 w。）

设 w 为一个根，则

$$a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_1 w = -1, \qquad \text{因此} \qquad |a_n w^n + \cdots + a_1 w| = |-1| = 1.$$

用反证法（proof by contradiction），假设 $|w| \le \frac{1}{2}$。那么在上一部分取 $z = w$，便得 $|a_n w^n + \cdots + a_1 w| < 1$，这与模恰好等于 1 矛盾。因此每个根都满足 $|w| > \frac{1}{2}$。

验算

- 这个上界在极限情况下可以达到：当每个 $a_j = 1$ 而 $z = \frac{1}{2}$ 时，左边恰好等于 $1 - 2^{-n}$。
- 关于根的结论同样是最佳的。取每个 $a_j = -1$，得到 $1 - z - z^2 - \cdots - z^n = 0$，它的正根在 $n = 1$ 时是 1，在 $n = 2$ 时是 0.618（即黄金比的共轭值），在 $n = 5$ 时是 0.5087，在 $n = 10$ 时是 0.50025：总是大于 $\frac{1}{2}$，却趋向于它。
- 数值方面，我们测试了 50 000 组随机选取的数据，其中 a_j 取自单位圆盘，z 取自半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆盘（所得的最大值为 0.79）；又求出了 2000 个这类随机多项式的所有根：根的模最小为 0.562。

常见错误

- 写成 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| = |a_1||z| + \cdots + |a_n||z|^n$。三角不等式只能给出“$\le$”。
- 使用无穷级数之和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 1$，这样只能得到 ≤ 1，令推论无法成立。应该用有限和。
- 忘记说明为何 $|z^k| = |z|^k$：它可由你刚刚证明的乘积法则推出。

STEP 之外

这是多项式根的界的入门版本，而这类界正是数值求根方法的基础：柯西（Cauchy）界把多项式的每个根都限制在一个圆盘之内，其半径只取决于系数的大小；而同样的“主导项胜出”论证，也是复分析（complex analysis）中鲁歇（Rouché）定理的核心。三角不等式本身就是度量（metric）的定义性质，而度量这个抽象的距离概念，正是大学一年级分析课程的核心。若想看一个以几何观点出发、处理得极为优美的讲法，可读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*。

详细解答

STEP I 1993，第 6 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP I 1993，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q6

关键思路

一切取决于当 $N = 10^{100}$ 时 x^N 的表现。若 $|x| < 1$，即使只比 1 小一点点，x^N 也小得难以想像；若 $|x| > 1$，即使只比 1 大一点点，它也大得难以想像；而在 $x = \pm 1$ 时，它恰好等于 1（因为 N 是偶数）。所以分式 $x^N/(1+x^N)$ 的表现就像一个开关：在 $(-1, 1)$ 之内是 0，在其外是 1。至于 h，思路刚好相反：$10^{-N}x$ 实在太小，以致 sin 与它的自变量根本无从分辨。

解答

以下一律记

$$s(x) = \frac{x^N}{1+x^N} = \frac{1}{1+x^{-N}} \quad (x \neq 0), \qquad s(0) = 0,$$

于是 $\mathrm{f}(x) = 2 + s(x)$，而 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$。

f 的特征

- 对称性与值域（*range*）。N 是偶数，所以 $x^N = (-x)^N \geq 0$。因此 f 是偶函数（even function），而由 $0 \leq s(x) < 1$ 可得 $2 \leq \mathrm{f}(x) < 3$。
- 当 $|x| < 1$ 时的水平 $y = 2$。这时 $x^N \to 0$ 的速度快得惊人：例如 $0.99^N = 10^{N \log_{10} 0.99} \approx 10^{-4.4\times 10^{97}}$。所以 $s(x) \approx x^N$ 远远小于任何图像所能显示的程度，在任何看得见的精确度下 $\mathrm{f}(x) = 2$。准确而言，$\mathrm{f}(0) = 2$。
- 当 $|x| > 1$ 时的水平 $y = 3$。现在 x^{-N} 同样微小，所以在任何看得见的精确度下 $s(x) = 1/(1+x^{-N})$ 就是 1，而 $\mathrm{f}(x) = 3$，并且是从下方趋近。（事实上，当 $|x| \to \infty$ 时，直线 $y = 3$ 是一条渐近线（asymptote）。）

- 在 $x = \pm 1$ 处的跳跃。在 $x = \pm 1$ 处，$x^N = 1$，所以 $\mathrm{f}(\pm 1) = \frac{5}{2}$，正好在半途。这个函数是连续（continuous）而且可微（differentiable）的，所以草图中的垂直线段其实是极之陡峭的攀升。求导可得

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{Nx^{N-1}}{(1+x^N)^2}, \qquad \mathrm{f}'(1) = \frac{N}{4} = 2.5 \times 10^{99}.$$

? **想一想** 图像中“垂直”的部分究竟有多窄?

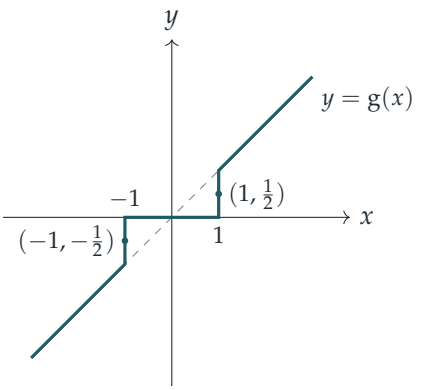
设 $x = 1 + \delta$，其中 δ 很小，则 $x^N = \mathrm{e}^{N\ln(1+\delta)} \approx \mathrm{e}^{N\delta}$，而 $s(x) \approx 1/(1+\mathrm{e}^{-N\delta})$。当 $N\delta$ 由 $-\ln 99$ 增至 $\ln 99$ 时，它由 0.01 攀升至 0.99，也就是说，整个过程只发生在一个宽度约为 9×10^{-100} 的区间内。在任何图上，这都是一条垂直线。根据对称性，在 $x = -1$ 处也是如此。（f′ 的正负号还告诉我们，f 在 $x > 0$ 时递增，在 $x < 0$ 时递减，因为 x^{N-1} 与 x 同号。）

g 的图像

由于 $\mathrm{g}(x) = x\,s(x)$，开关 s 现在乘在直线 $y = x$ 上：

- 当 $|x| < 1$ 时，$s(x)$ 可以忽略，所以在任何看得见的精确度下 $\mathrm{g}(x) = 0$（在 $x = 0$ 处恰好是 0）；
- 当 $|x| > 1$ 时，在任何看得见的精确度下 $s(x)$ 就是 1，所以 $\mathrm{g}(x) = x$；准确而言，$x - \mathrm{g}(x) = \dfrac{x}{1+x^N}$，这个差可以忽略；
- 在 $x = \pm 1$ 处，$\mathrm{g}(\pm 1) = \pm\frac{1}{2}$，正好在每个跳跃的半途。

g 是奇函数（odd function），因为 s 是偶函数而 x 是奇函数。它也是递增的：$\mathrm{g}'(x) = s(x) + x\,s'(x)$，而这两项都 ≥ 0，因为 x 与 $s'(x)$ 同号。在 $x = 1$ 处斜率是 $\mathrm{g}'(1) = \frac{1}{2} + \frac{N}{4}$，所以我们再次看到一个看似垂直的跳跃，这次是在 $x = 1$ 处由 0 升至 1，以及在 $x = -1$ 处由 -1 升至 0。



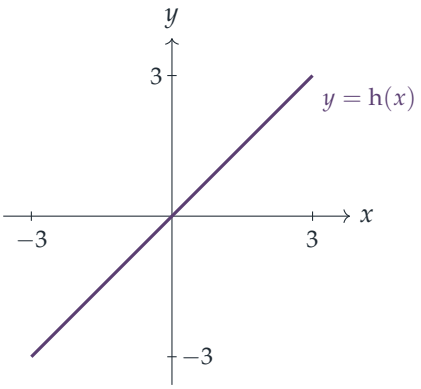
g 在 $[-3,3]$ 上的草图：在 $(-1,1)$ 上为零，在其外是直线 $y=x$（虚线），两者之间由经过 $(\pm1,\pm\frac{1}{2})$ 的近乎垂直的攀升连接起来。

h 的图像

设 $u=10^{-N}x$。当 $|x|\le 3$ 时，我们有 $|u|\le 3\times 10^{-N}$，这是极其微小的。对于细小的 u，$\sin u = u-\frac{u^3}{6}+\cdots$，而当 $u>0$ 时我们有上下界 $u-\frac{u^3}{6}\le \sin u\le u$。乘以 10^N，当 $0\le x\le 3$ 时，

$$0\le x-\mathrm{h}(x)\le \frac{x^3}{6}10^{-2N}\le \frac{27}{6}\times 10^{-2N},$$

而 h 是奇函数，所以当 $-3\le x\le 0$ 时同样的结论成立，只是正负号相反。因此在 $[-3,3]$ 上，在任何想像得到的精确度下，h 的图像就是经过原点的直线 $y=x$，在 $x>0$ 时比它低一丝，在 $x<0$ 时比它高一丝。它的斜率是 $\mathrm{h}'(x)=\cos(10^{-N}x)$，与 1 的差距约在 10^{-2N} 之内。



正弦波仍然存在，只是被极度拉阔了：它的第一个极大值位于 $x=\frac{\pi}{2}\times 10^N$，高度为 10^N，所以在窗口 $[-3,3]$ 内只看得见经过原点、看似笔直的一小段。

验算

- 以 $s=1/(1+\mathrm{e}^{-N\ln|x|})$ 直接计算：$s(0.999)$ 和 $s(1.001)$ 在机器精确度下分别是 0 和 1，而 $s(\pm1)=\frac{1}{2}$ 是准确值。
- 取一个不太大的 N，例如 $N=10$ 或 200，数值微分证实 $s'(1)=N/4$ 和 $\mathrm{g}'(1)=\frac{1}{2}+N/4$，而细密的格点显示 g 在 $[-3,3]$ 上递增。增大 N 只会令阶梯更加陡峭分明。
- 对于随机选取的 $x\in[-3,3]$，$10^{100}\sin(10^{-100}x)$ 与 x 在完整的双精度下吻合，而按比例缩小的类比 $M\sin(x/M)$ 在 $M=1000$ 时符合上下界 $0<x-M\sin(x/M)\le x^3/(6M^2)$。

常见错误

- 忘记 N 是偶数：当 $x < -1$ 时，x^N 极大而且是正数，所以 f 在那里是 3，而不是别的数值。
- 把阶梯说成真正的不连续点。三个函数全都是连续的（其实还是可微的）；那些攀升只是陡峭得画不出来。
- 把 h 当成一个振荡的图像。在 $[-3, 3]$ 上，它离任何转向点都还远得很。

STEP 之外

函数 $x^n/(1+x^n)$ 在 $n \to \infty$（只取偶数值）时逐点收敛（pointwise convergence）于一个阶梯函数（step function），它在 $(-1, 1)$ 之内是 0，在 ± 1 处是 $\frac{1}{2}$，在其外是 1：这是一列光滑函数，其极限却不连续。这是一个经典例子，说明为何分析学家需要一致收敛（uniform convergence），而这正是实分析（real analysis）入门课程的核心概念。函数 h 则展示了另一面：当 $M \to \infty$ 时，$M \sin(x/M) \to x$ 在有界区间上一致收敛。Abbott 的 *Understanding Analysis*（实分析入门读本）把这两个概念都讲得十分易读。

详细解答

STEP I 1993，第 7 题

纯数学 · 三次方程的根

STEP I 1993，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q7

关键思路

首项系数为正的三次函数（cubic）由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，所以关于它的根（root）的一切，都由它的两个转向点（turning point）决定。如果曲线的极大值（local maximum）在横轴之上，而极小值（local minimum）在横轴之下，图像必定与横轴相交三次；否则相交的次数较少。对于 x^3+ax^2+b，转向点很容易准确求出，因为它的导数（derivative）可以因式分解。

解答

转向点

对于 $\mathrm{f}(x)=x^3+Ax^2+B$，

$$\mathrm{f}'(x)=3x^2+2Ax=x(3x+2A),$$

所以驻点（stationary point）位于 $x=0$ 和 $x=-\frac{2A}{3}$。函数在这两点的值是 $\mathrm{f}(0)=B$ 和

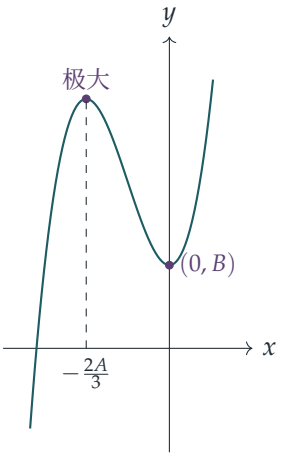
$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{2A}{3}\right)=-\frac{8A^3}{27}+\frac{4A^3}{9}+B=\frac{4A^3}{27}+B.$$

此外 $\mathrm{f}''(x)=6x+2A$，所以 $\mathrm{f}''(0)=2A$ 而 $\mathrm{f}''(-\frac{2A}{3})=-2A$。当 $A>0$ 时，位于 $x=0$ 的点是极小点，位于 $x=-\frac{2A}{3}$ 的点是极大点；当 $A<0$ 时，两者的角色互换。

$A>0$、$B>0$ 时的草图

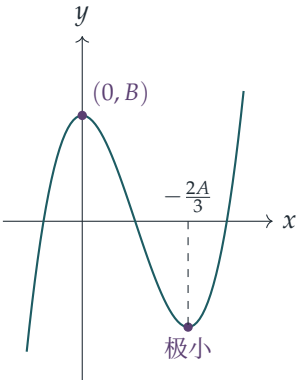
极大点位于 $\left(-\frac{2A}{3},\, B+\frac{4A^3}{27}\right)$，在 y 轴的左方，而且比 B 高；极小点位于 $(0,B)$，在正 y 轴上。两个转向点都在 x 轴之上，所以曲线恰好与它相交一次，交点在极大点的左方。（图

中取 $A=3$，$B=2$：极大点 $(-2,6)$，极小点 $(0,2)$。）



$A<0$、$B>0$ 时的草图

现在极大点位于 $(0,B)$，而极小点位于 $\left(-\frac{2A}{3},\, B+\frac{4A^3}{27}\right)$，在 y 轴的右方。由于 $A^3<0$，极小值小于 B，它可以是正数、零或负数。必定有一个根满足 $x<0$，因为 $\mathrm{f}(0)=B>0$，而当 $x\to-\infty$ 时 $\mathrm{f}\to-\infty$。如果极小点跌到横轴之下，就另有两个根满足 $x>0$（如图所示，$A=-3$，$B=2$：极小点 $(2,-2)$，根为 $1-\sqrt{3}$、1、$1+\sqrt{3}$）。如果极小点在横轴上，曲线就在该处与横轴相切。如果极小点在横轴之上，那个负根就是唯一的根。



数算根的数目

现在考虑 $\mathrm{g}(x)=x^3+ax^2+b$。如果 $a=0$，则 g 严格递增（strictly increasing）（它的导数 $3x^2$ 只在 0 处为零），所以它恰好有一个实根。因此假设 $a\neq0$。由上文的结果，g 有两个相异的转向点，函数值分别是 b 和 $b+\frac{4a^3}{27}$。

想一想 两个转向点的函数值怎样告诉我们根的数目?

设转向点为 $x_1 < x_2$。这个三次函数在 $(-\infty, x_1]$ 上严格递增，在 $[x_1, x_2]$ 上严格递减，在 $[x_2, \infty)$ 上严格递增，所以在每一段上最多有一个根。如果 $\mathrm{g}(x_1) > 0 > \mathrm{g}(x_2)$，由介值定理（intermediate value theorem）可知在 $(-\infty, x_1)$、(x_1, x_2) 和 (x_2, ∞) 中各有一个根（这里用到当 $x \to \mp\infty$ 时 $\mathrm{g} \to \mp\infty$），所以共有三个相异的根。相反，如果两个值同号，或者其中一个为零，则至少有一段的内部没有根，根的数目最多是两个。极大值永远是两个值之中较大的一个，所以“一正一负”等同于“两者之积为负”。因此 g 有三个相异实根，当且仅当

$$b\left(b + \frac{4a^3}{27}\right) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 27b^2 + 4a^3 b < 0.$$

（乘以 $27 > 0$ 不会改变不等式的方向。）这个结论也涵盖 $a = 0$ 的情况，此时 $27b^2 + 4a^3 b = 27b^2 \geq 0$。

第一个条件

假设 $27b^2 + 3a^3 b < 0$。那么 $3a^3 b < -27b^2 \leq 0$，所以 $a^3 b < 0$，因此

$$27b^2 + 4a^3 b = \left(27b^2 + 3a^3 b\right) + a^3 b < 0 + 0 = 0.$$

根据上述判别准则，方程有三个相异实根，这正是所要证明的。

第二个条件

按照试卷上所印的写法，第二个条件重复了不等式 $27b^2 + 4a^3 b < 0$，而用“$<$”的话，这个命题是错的：取 $a = -3$，$b = 1$，得 $27 - 108 = -81 < 0$，但 $x^3 - 3x^2 + 1$ 在 $x = 0$ 处取值 1，在 $x = 2$ 处取值 -3，所以它有三个相异实根。题目原意的不等式必定是方向相反的那一个。判别准则显示，如果

$$27b^2 + 4a^3 b > 0$$

（其实只要 $27b^2 + 4a^3 b \geq 0$），方程的相异实根就少于三个。至此全题完成。

所以准确的分界线是 $27b^2 + 4a^3 b = 0$。含 $3a^3$ 的条件对于有三个根是充分但非必要的：取 $a = -2$，$b = 1$，得 $27b^2 + 3a^3 b = 3 > 0$，但 $27b^2 + 4a^3 b = -5 < 0$，而 $x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1)$ 有三个根 1 和 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$。

验算

取 $A = -3$，$B = 2$，得 $x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$，它的根 1、$1 \pm \sqrt{3}$ 与草图吻合，而且 $27 \cdot 4 + 4(-27)(2) = -108 < 0$，正如判别准则所预测。数值方面，对于约

80,000 对满足第一个条件的随机有理数 (a, b)，两个驻点值总是异号。在 200,000 对数值中，“有三个相异根”与 $27b^2 + 4a^3b < 0$ 完全吻合。

常见错误

- 忘记 $a = 0$ 的情况，此时两个转向点合并成一个拐点（point of inflection）。
- 把转向点的函数值为零当作有三个根：这种情况得到的是重根（repeated root），所以只有两个相异的根。
- 尝试完全按照所印的写法去证明第二个命题，而没有留意到它与判别准则矛盾。

STEP 之外

$-(4a^3b + 27b^2)$ 这个量是 $x^3 + ax^2 + b$ 的判别式（discriminant），是 $b^2 - 4ac$ 在三次方程中的对应物。它等于各根之差的平方之积，所以有三个相异实根时它是正数，有重根时是零，有两个复数根时是负数。判别式和根的对称函数（symmetric functions）会在伽罗瓦理论（Galois theory）中进一步发展；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是一本很好的入门书。

详细解答

STEP I 1993，第 8 题

纯数学 · 球面与向量

STEP I 1993，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q8

关键思路

在第 (i) 部分，把原点和坐标轴放在具有对称性的位置。如果球心位于 z 轴上，而平面是 $z = 0$，那么方程几乎会替我们完成所有工作。两个球面的情况也不会更难，因为把两者的方程相减，所有平方项都会抵消，剩下的是一个平面的方程。在第 (ii) 部分，坐标同样把一切化为纯量积（scalar product）的计算。把 B 放在原点，这样两根杆的顶端都可以由 E 量起。

解答

第 (i) 部分

球面与平面。设球面（sphere）的球心为 O'，半径为 $r > 0$，并设 N 为由 O' 至平面的垂足（foot of the perpendicular）。取 N 为原点，平面为 $z = 0$，并令 z 轴沿 NO' 方向。于是 $O' = (0, 0, d)$，其中 $d \geq 0$ 是球心到平面的距离。球面的方程是

$$x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2,$$

所以一点同时位于球面和平面上，当且仅当 $z = 0$ 并且

$$x^2 + y^2 = r^2 - d^2.$$

- 若 $d < r$，这是平面上以 N 为圆心、半径为 $\sqrt{r^2 - d^2}$ 的圆。
- 若 $d = r$，则 $x^2 + y^2 = 0$ 迫使 $x = y = 0$，所以交集只有 N 一点（该平面是切平面（tangent plane））。
- 若 $d > r$，右方为负数，所以没有任何点符合条件，交集是空集。

这几种情况涵盖了所有可能，第一个命题因而得证。

两个球面。设两个球面的半径为 $r, s > 0$，球心相异，相距 $c > 0$。把第一个球心放在原点，第二个放在 $(0, 0, c)$：

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad x^2 + y^2 + (z - c)^2 = s^2.$$

? **想一想** 两个二次方程的解集，怎么可能只是一个圆?

把第一个方程减去第二个方程。所有平方项都会抵消，剩下

$$2cz - c^2 = r^2 - s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = h, \qquad \text{其中} h = \frac{r^2 - s^2 + c^2}{2c}.$$

由于两个球心相异，所以可以除以 c。一点同时位于两个球面上，当且仅当它位于第一个球面上并且满足相减所得的方程，所以

$$(\text{球面 1}) \cap (\text{球面 2}) = (\text{球面 1}) \cap (\text{平面} z = h).$$

根据第一个结果，这是一个圆、一点或空集。（明确地说，当 $|h| < r$ 时，它是平面 $z = h$ 上的圆 $x^2 + y^2 = r^2 - h^2$；当 $|h| = r$ 时是单独一点；当 $|h| > r$ 时是空集。）这个圆所在的平面垂直于连心线（line of centres），而圆心就在这条线上。

第 (ii) 部分

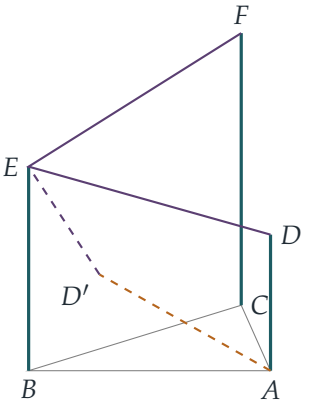
关于底部位置的假设。题目没有说明 A、B 和 C 的位置。我们假设它们位于水平地面上一个边长为 2 m 的等边三角形（equilateral triangle）的顶点。这个布局能得出题目所述的角（见“验算”）。

取 B 为原点，z 轴为铅垂方向：

$$B = (0, 0, 0), \quad A = (2, 0, 0), \quad C = (1, \sqrt{3}, 0),$$

因此各杆的顶端是

$$D = (2, 0, 2), \quad E = (0, 0, 3), \quad F = (1, \sqrt{3}, 4).$$



图中的 D'（虚线）是破坏者移动杆子之后 D 的位置。

原来的雕塑。使用由 E 出发的向量（vector），

$$\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 2 + 0 - 1 = 1$，而 $|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{5}$。因此

$$\cos \angle DEF = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{5}, \qquad \text{所以} \qquad \angle DEF = \cos^{-1} \tfrac{1}{5},$$

正如所求。

破坏者动手之后。杆 AD 的长度仍然是 2，底端仍然在 A。它现在位于通过 A 和 B 的铅垂平面（即平面 $y = 0$）之内，向 B 倾斜，与地面成 $\frac{1}{4}\pi$ 角。由 A 走向 B 就是 $-x$ 的方向，所以

$$D' = \left(2 - 2\cos \tfrac{\pi}{4},\, 0,\, 2\sin \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(2 - \sqrt{2},\, 0,\, \sqrt{2}\right).$$

由于 $2 - \sqrt{2} \approx 0.59$ 介乎 0 与 2 之间，点 D' 确实在线段 AB 的上方。现在

$$\overrightarrow{ED'} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} - 3 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{ED'} \cdot \overrightarrow{EF} = (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 3) = -1,$$

并且

$$|\overrightarrow{ED'}|^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + (3 - \sqrt{2})^2 = (6 - 4\sqrt{2}) + (11 - 6\sqrt{2}) = 17 - 10\sqrt{2}.$$

? **想一想** 点积（dot product）是负数。这告诉我们这个角有甚么特点？

纯量积为负，表示这个角是钝角（obtuse angle），所以我们需要的是介乎 $\frac{1}{2}\pi$ 与 π 之间的 $\cos^{-1}$ 值：

$$\cos\angle D'EF = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{17-10\sqrt{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{85-50\sqrt{2}}} \approx -0.264542,$$

$$\angle D'EF \approx 1.839 \text{ 弧度（准确至四位有效数字）}.$$

验算

- 若底部是边长为 s 的等边三角形，用同样的方法可得 $\cos\angle DEF = \dfrac{s^2/2-1}{s^2+1}$。只有当 $s=2$ 时，这个值才等于 $\frac{1}{5}$，这支持了我们对底部所作的假设。数值验算确认当 $s=2$ 时 $\cos\angle DEF = 0.2$。
- 已用数值方法验算 $|AD'|=2$ 和 $\angle BAD' = \frac{1}{4}\pi$。新的角算得为 1.838525… 弧度（约 105.3°），与上面的精确形式吻合。
- 第 (i) 部分：以随机选取的球面作测试，并在预测的圆上取点；这些点都在两个曲面上，误差在 10^{-12} 以内。

常见错误

- 在两个球面的情况中，声称两个方程之差就是交集。该平面只是包含了交集；我们仍然要求出这个平面与其中一个球面的交集。
- 把 D' 放在 A 的另一侧，即远离 B 的一方。该点并不在线段 AB 的上方，而且会得出不同的角。
- 以度数作答，或者因为漏掉负号而把答案写成锐角 $\cos^{-1}(0.2645)$。

STEP 之外

把两个球面的方程相减而得到一个平面，正是两个圆或两个球面的*根平面*（radical plane；在二维的情况则是根轴（radical axis））背后的想法。同样的技巧可以把 GPS 式的三边测量（trilateration）化为线性问题。更一般地说，任何二次曲面（quadric surface）与平面的交集都是圆锥曲线（conic），而为这类交集分类，是利用二次型（quadratic form）学习线性代数（linear algebra）的一个很好的入门练习。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）建立了所需的工具，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则有更多 STEP 风格的坐标几何题目。

详细解答

STEP I 1993，第 9 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP I 1993，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q9

关键思路

这是一道混合问题（mixing problem）：缸内 A 的份量的变化率等于（流入率）减（流出率），而由于混合得很快，流出的液体与缸内液体的浓度相同。首先要留意的是，每个缸的总体积始终不变，所以浓度不过是“A 的份量除以一个常数”。于是每个缸各给出一条一阶线性方程（first-order linear equation），而第一个缸的输出就成为第二个缸的强迫项（forcing term）。

解答

第一个缸

液体以总流率每秒 $a + (b - a) = b$ 升流入第一个缸，并以每秒 b 升流出，所以对所有 $t \geq 0$，缸内体积一直保持在初始值 K 升。

由于混合得很快，在时间 t 缸内液体是均匀的，其中化学品 A 所占的比例为 $V(t)/K$。在一段短时间 δt 内，有 $a\,\delta t$ 升的 A 流入，并有 $b\,\delta t$ 升的混合液流出，其中 $\frac{V}{K}\,b\,\delta t$ 升是 A。因此

$$\delta V \approx a\,\delta t - \frac{bV}{K}\,\delta t,$$

两边除以 δt，再令 $\delta t \to 0$，得

$$\dot{V}(t) = -\frac{bV(t)}{K} + a,$$

这正是所求的方程。

这是一条常系数线性方程。把它写成 $\dot{V} + \frac{b}{K}V = a$，再乘以积分因子（integrating factor）

$\mathrm{e}^{bt/K}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V\mathrm{e}^{bt/K}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/K} \quad\Longrightarrow\quad V\mathrm{e}^{bt/K} = \frac{aK}{b}\mathrm{e}^{bt/K} + C.$$

最初缸内只有化学品 B，所以 $V(0) = 0$，由此得 $C = -\frac{aK}{b}$。因此

$$V(t) = \frac{aK}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}\right), \qquad t \geq 0,$$

正如所求。

第二个缸

第二个缸每秒从第一个缸接收 b 升液体，并以每秒 b 升排出，所以它的体积保持在 L 升。设 $W(t)$ 为时间 t 时缸内 A 的体积，则 $W(0) = 0$。

> ? **想一想** 化学品 A 以甚么速率流入第二个缸?

它流入的速率恰好就是它离开第一个缸的速率，即 $\frac{bV}{K} = a\left(1 - \mathrm{e}^{-bt/K}\right)$。根据同样的快速混合论证，它以速率 $\frac{bW}{L}$ 流出。所以

$$\dot{W} + \frac{b}{L}W = a - a\,\mathrm{e}^{-bt/K}.$$

乘以积分因子 $\mathrm{e}^{bt/L}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(W\mathrm{e}^{bt/L}\right) = a\,\mathrm{e}^{bt/L} - a\,\mathrm{e}^{bt(1/L - 1/K)}.$$

因为 $L \neq K$，指数 $b\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{K}\right) = \frac{b(K-L)}{KL}$ 不等于零，所以第二项可以当作指数函数来积分：

$$W\mathrm{e}^{bt/L} = \frac{aL}{b}\mathrm{e}^{bt/L} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{b(K-L)t/(KL)} + D.$$

全式乘以 $\mathrm{e}^{-bt/L}$，并注意到 $\frac{b(K-L)}{KL} - \frac{b}{L} = -\frac{b}{K}$，

$$W = \frac{aL}{b} - \frac{aKL}{b(K-L)}\mathrm{e}^{-bt/K} + D\mathrm{e}^{-bt/L}.$$

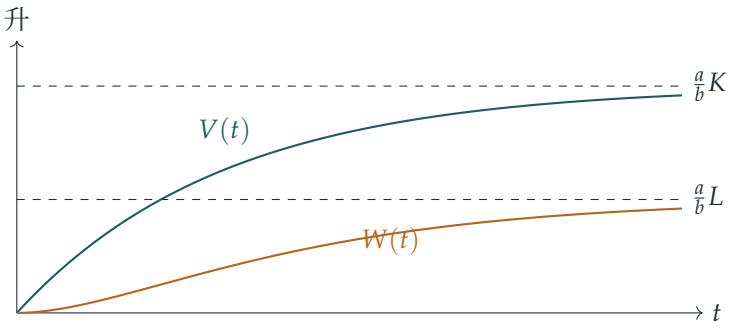
代入 $W(0) = 0$：

$$D = \frac{aKL}{b(K-L)} - \frac{aL}{b} = \frac{aL}{b}\cdot\frac{K - (K-L)}{K-L} = \frac{aL^2}{b(K-L)}.$$

所以在时间 $t \geq 0$，第二个缸内有

$$\boxed{W(t) = \frac{aL}{b}\left(1 - \frac{K\mathrm{e}^{-bt/K} - L\mathrm{e}^{-bt/L}}{K-L}\right)}$$

升化学品 A。



草图取 $a=1$、$b=2$、$K=10$、$L=5$。留意 W 起初的斜率为零：一开始从第一个缸流来的液体中几乎没有 A。

验算

- 在 $t=0$ 时，括号内的值为 $1-\frac{K-L}{K-L}=0$，理应如此。另外 $\dot{W}(0)=0$，与 A 以速率 $bV(0)/K=0$ 流入这一事实吻合。
- 当 $t\to\infty$ 时，$V\to\frac{a}{b}K$ 而 $W\to\frac{a}{b}L$：两个缸内 A 的浓度最终都是 a/b，即流入液体的浓度。
- 除了前面的因子 L 之外，公式对 K 和 L 是对称的，这正好可以用来检查代数运算是否前后一致。
- 取 $a=1$、$b=2$、$K=10$、$L=5$、$t=5$：$V=5(1-\mathrm{e}^{-1})\approx 3.1606$，而 $W=2.5(1-\mathrm{e}^{-1})^2\approx 0.99894$。对两个缸进行数值模拟（同时追踪体积），在多组随机选取的 a,b,K,L 之下，结果与两条公式相符，误差约为 10^{-13}。

常见错误

- 把 A 的流出率当作 $b-a$ 或 a：流出率应是总流出率乘以浓度。
- 把 A 流入第二个缸的速率当作 a：只有离开第一个缸的 A 才会到达第二个缸。
- 忘记为何需要 $L\neq K$：若 $L=K$，强迫项 $\mathrm{e}^{-bt/K}$ 是齐次方程（homogeneous equation）的解，答案会改为含有 $t\,\mathrm{e}^{-bt/K}$ 一项。

STEP 之外

一连串充分混合的缸是标准的房室模型（compartment model），可用来描述药物剂量在体内的流动，以及放射性衰变链。把它写成方程组 $\dot{\mathbf{x}}=M\mathbf{x}+\mathbf{f}$ 后，衰减率 b/K 和 b/L

就是 M 的特征值（eigenvalue），而 $L = K$ 的情况就是重特征值，也就是产生 $t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ 形式的解的那种“共振”（resonance）。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）正是以这种方式处理混合问题和线性方程组。

详细解答

STEP I 1993，第 10 题

力学 · 涉及弹簧的平衡

STEP I 1993，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

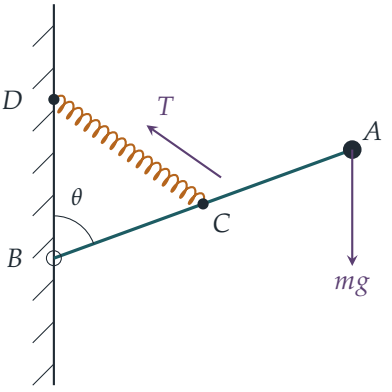
step.maths.org/questions/93-s1-q10

关键思路

对铰链 B 取力矩（moments）：这样可以完全消去 B 处未知的反作用力，只留下一条把弹簧张力与杆的角度联系起来的方程。这里的几何其实比表面看来容易处理，因为 $BD = BC = a$，所以三角形 BCD 是等腰三角形，当中每一个长度都可以用 B 处角度的一半来表示。

解答

我们把灯看成质点（particle），把杆看成轻而刚硬，把 B 处的铰链（hinge）看成光滑，并把弹簧看成轻而且遵从胡克定律（Hooke's law）。设 $\theta = \angle DBA$，即杆与向上的铅垂线 BD 之间的夹角。“离开墙壁”的意思是 $0 < \theta < \pi$：当 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 时，杆贴着墙壁。



弹簧的长度

由于 $BC = BD = a$，而两者之间的夹角是 θ，三角形 BCD 是等腰三角形。由 B 向 CD 作垂线，这条垂线既平分角 θ，亦平分边 CD，所以

$$CD = 2a\sin\tfrac{\theta}{2}, \qquad \text{由 } B \text{ 到直线 } CD \text{ 的距离} = a\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

根据胡克定律，弹簧的张力（tension）为

$$T = \frac{\lambda}{a}\left(2a\sin\tfrac{\theta}{2} - a\right) = \lambda\left(2\sin\tfrac{\theta}{2} - 1\right),$$

其中 T 若为负数，即表示弹簧受压缩并向外推。

对 B 取力矩

作用于“杆连灯”这个系统的力有：在 A 的重量 mg、在 C 沿 CD 方向的弹簧力 T，以及在 B 的反作用力（reaction），而后者对 B 没有力矩。重量沿铅垂方向作用，与墙壁的水平距离为 $2a\sin\theta$，它使杆向下转动（令 θ 增大）。张力则把 C 拉向 D，使杆转回墙壁的方向。要达至平衡（equilibrium），须有

$$T \cdot a\cos\tfrac{\theta}{2} = mg \cdot 2a\sin\theta = 4mga\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

当 $0 < \theta < \pi$ 时，我们有 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$，所以可以把它约去：

$$T = 4mg\sin\tfrac{\theta}{2}.$$

特别地，$T > 0$：弹簧必定被拉长，这合乎常理，因为总要有东西把灯撑起来。

> **想一想** 现在我们有两条关于 T 的表达式。把两者相等会得到甚么？所得的答案必须符合甚么条件，才能描述杆的一个真实位置？

记 $s = \sin\frac{\theta}{2}$。把 T 的两条表达式相等，

$$\lambda(2s-1) = 4mgs \quad\Longrightarrow\quad s(2\lambda - 4mg) = \lambda \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)},$$

前提是 $\lambda \neq 2mg$（若 $\lambda = 2mg$，方程便变成 $0 = \lambda$，这是不可能的）。由于 $0 < \theta < \pi$，真实的位置需要满足 $0 < s < 1$。

- 若 $\lambda < 2mg$，则 $s < 0$：无解。
- 若 $\lambda > 2mg$，则 $s > 0$，而且

$$s < 1 \iff \lambda < 2\lambda - 4mg \iff \lambda > 4mg.$$

所以当 $\lambda > 4mg$ 时，数值 $s = \lambda/\big(2(\lambda - 2mg)\big)$ 严格介乎 0 与 1 之间，从而在 $\theta \in (0, \pi)$ 内恰好有一个角度使力矩平衡。（事实上 $s > \frac{1}{2}$，所以弹簧确实是被拉长的。）这时合力由 B 处的反作用力承受，所以灯可以离开墙壁悬挂而处于平衡，正如题目所要求。反过来说，若 $\lambda \le 4mg$，则没有这样的位置。

该角度为

$$\angle DBA = \theta = 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2(\lambda - 2mg)}\right),$$

或者等价地，由于 $\cos\theta = 1 - 2s^2$，

$$\cos\angle DBA = 1 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda - 2mg)^2}.$$

验算

- 当 $\lambda \to \infty$ 时，弹簧无法伸长，所以 $CD \to a$，三角形 BCD 变成等边三角形。公式给出 $s \to \frac{1}{2}$，所以 $\theta \to 60°$。✓
- 当 $\lambda \to 4mg$ 由上方趋近时，$s \to 1$ 而 $\theta \to 180°$：弹簧太弱，灯一直下沉，最后贴着墙壁悬挂。
- 取 $\lambda = 6mg$：$s = \frac{3}{4}$，$\cos\theta = -\frac{1}{8}$，所以 $\theta \approx 97.2°$。把这个角度代入完整的向量力矩方程（弹簧力由坐标计算），所得净力矩为零。在 $0 < \theta < \pi$ 的范围内对净力矩作数值扫描，当 $\lambda > 4mg$ 时只找到一个根（例如 $\lambda = 5mg$ 时为 $112.9°$），而当 $\lambda \le 4mg$ 时则没有根。

常见错误

- 以整条杆的长度 $2a$，而不是 a，来计算由 B 到弹簧力作用线的距离。垂直距离是 $a\cos\frac{\theta}{2}$。
- 分解力而不取力矩：这样会引入 B 处反作用力的两个未知分量，却毫无得益。
- 忘记检查 $0 < \sin\frac{\theta}{2} < 1$，而条件 $\lambda > 4mg$ 正正是由此而来。

STEP 之外

这道题只问平衡是否存在。顺理成章的下一个问题是：这个平衡是否稳定？轻轻一碰之后，扰动会逐渐消失还是愈来愈大？要回答这个问题，可以写出势能（potential energy）$V(\theta)$（重力势能加弹性势能），再考察 $V''(\theta)$ 在平衡位置的正负号；这个想法贯穿大学一年级的力学，其后更贯穿整个动力系统（dynamical systems）理论。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对能量方法和稳定性有仔细的论述。

详细解答

STEP I 1993，第 11 题

力学 • 质心

> **STEP I 1993，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q11

关键思路

一个刚体（rigid body）从一点自由悬挂时，只受两个力作用：支承点的拉力和它本身的重量。两个力要互相平衡，必须作用在同一直线上，所以质心（centre of mass）必定悬在支承点的正下方。因此，整个问题归结为求出弯曲铁线的质心 G，然后留意到：在两个位置之间，物体转过的角度正是直线 GA 与 GB 之间的夹角。

解答

质心

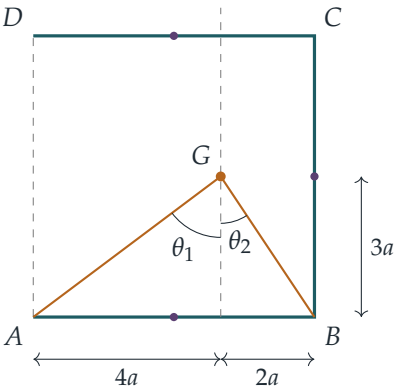
把铁线看成一根均匀的刚性幼棒，弯成 AB、BC、CD 三条边，每条边的重量同为 W，并挂在一口光滑的钉上或一条轻绳上。为了使数字都是整数，取正方形的边长为 $6a$，并在铁线所在的平面上建立坐标轴，使得

$$A = (0,0), \quad B = (6a,0), \quad C = (6a,6a), \quad D = (0,6a).$$

每条边都是均匀的幼棒，所以它的重量作用在中点：AB 的是 $(3a,0)$，BC 的是 $(6a,3a)$，CD 的是 $(3a,6a)$。三个重量相等，所以 G 就是三个中点的平均：

$$G = \left(\frac{3a + 6a + 3a}{3}, \frac{0 + 3a + 6a}{3} \right) = (4a,\ 3a).$$

（铁线对称于通过 BC 和 AD 两个中点的直线，因此 G 必定位于高度 $3a$ 处；需要计算的只有它的水平位置。）



图中通过 G 的垂直虚线与 BC 平行（亦与缺少了的边 AD 平行）。设 θ_1 为 GA 与这条虚线所成的角，θ_2 为 GB 在另一侧与它所成的角。从图中可以看出，

$$\tan\theta_1 = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}.$$

（事实上 $AG = 5a$：这是一个 3–4–5 三角形。）

先从 A 悬挂，再从 B 悬挂

当铁线从 A 悬挂并处于平衡（equilibrium）时，作用在它上面的力只有 A 处的反作用力（reaction），以及作用在 G 的总重量 $3W$。要使两者平衡，它们对 A 的力矩（moment）必须互相抵消，所以重量的作用线必须通过 A：直线 AG 是垂直的，而 G 在 A 的下方。由于 BC 与图中的虚线平行，此时 BC 与垂直方向成 θ_1 的倾角。

同样地，当铁线从 B 悬挂时，直线 BG 是垂直的，而 BC 则向另一边倾斜，与垂直方向成 θ_2 的倾角。

? **想一想** 为甚么 BC 的两个方向之间的夹角是 $\theta_1 + \theta_2$，而不是 $\theta_1 - \theta_2$?

从第一个位置转到第二个位置时，铁线是整体刚性地转动的，所以它上面的每一条直线都转过相同的角度。换一个说法：让铁线在纸上固定不动，改为让“向下”的方向转动。在第一个位置，向下的方向沿着 GA；在第二个位置，则沿着 GB。因此转过的角度就是两者之间的夹角 AGB。在图中，A 和 B 分别位于通过 G 的虚线的两侧，所以

$$\angle AGB = \theta_1 + \theta_2.$$

利用复角公式（addition formula），

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{2}{\frac{1}{9}} = 18.$$

θ_1 和 θ_2 都是锐角，所以 $0 < \theta_1 + \theta_2 < 180°$；又因为它的正切是正数，这个和其实是锐角。因此 BC 的两个方向之间的夹角是 $\tan^{-1} 18$，正如题目所求。

验算

- 以数值计算，$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 53.13°$，$\theta_2 = \tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 33.69°$，两者相加得 86.82°，而 $\tan^{-1} 18 \approx 86.82°$ 亦然。
- 把铁线换成 90 000 小段相等的部分，把它们的位置取平均而得 $G = (4a, 3a)$，然后每次把整个物体旋转，使 G 位于支承点下方，所得 BC 的两个像之间的夹角与上述结果相同，准确至小数点后九位。
- 检查 G 是否合理：它较接近 BC，而离缺少了的边 AD 较远，这是理所当然的，因为右边有一整条边的铁线，左边却完全没有。

常见错误

- 把 G 取在正方形的中心 $(3a, 3a)$。如果四条边齐全，这是对的；但边 AD 并不存在，没有东西把质心拉向左边。
- 把两个倾角相减而不是相加：从 A 悬挂时 BC 向一边倾斜，从 B 悬挂时则向另一边倾斜。

STEP 之外

“自由悬挂的物体静止时，质心位于支承点的下方”这个原理，正是实际上找出不规则平面图形质心的方法：把它先后从两点悬挂，看看两条铅垂线在哪里相交。在大学一年级的课程中，同一个想法会以势能（potential energy）的形式出现：平衡位置就是 G 的高度的驻点（stationary point），而稳定的平衡位置就是最低的那一个。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）讨论质心和刚体静力学（statics），当中还有更多类似的例子。

详细解答

STEP I 1993，第 12 题

力学 · 抛体的拦截

> **STEP I 1993，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s1-q12

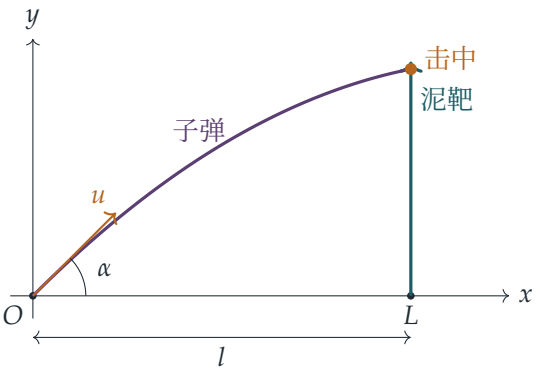
关键思路

击中的意思是子弹与泥靶在同一时刻位于同一位置。子弹到达通过发射器的铅垂线的时刻，只由它的水平运动决定，所以我们先求出这个时刻，再令两者的高度相等。在子弹飞行期间，重力把两个物体向下拉的距离完全相同，都是 $\frac{1}{2}gt^2$，因此这一项互相抵消，剩下一个简洁的线性条件。当 $T = 0$ 时，这个抵消更让我们可以用一个巧妙的角度看通整道题。

解答

模型

我们把泥靶和子弹都看成只在重力作用下自由运动的质点（particle），不计空气阻力（air resistance），并假设参赛者在包含发射器的铅垂平面内朝发射器的方向射击。把参赛者放在原点 O，x 轴水平指向位于 $x = l$ 的发射器 L，y 轴铅垂向上。时间 t 由步枪发射的一刻起计，所以泥靶此时已在空中飞行了时间 T，而在时刻 t 它已飞行了 $T + t$。



击中的条件

发射后的时刻 t，子弹位于

$$x_B = (u\cos\alpha)\,t, \qquad y_B = (u\sin\alpha)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

而泥靶在时间 T 之前以速率 v 向上射出，此时位于 $x = l$，高度为

$$y_C = v(T+t) - \tfrac{1}{2}g(T+t)^2 = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

子弹只可能在直线 $x = l$ 上与泥靶相遇，而它到达该处时 $(u\cos\alpha)\,t = l$，即

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha}.$$

（这里 $\cos\alpha > 0$：由于 $l > 0$，枪口垂直向上的步枪永远打不到发射器那边。）要击中，就需要在这一刻有 $y_B = y_C$。两边的 $-\frac{1}{2}gt^2$ 项互相抵消，所以

$$(u\sin\alpha)\,t = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + (v - gT)\,t.$$

代入 $t = l/(u\cos\alpha)$ 得

$$\frac{l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right) + \frac{(v - gT)\,l}{u\cos\alpha},$$

再把全式乘以 $\cos\alpha$，

$$l\sin\alpha - \left(vT - \tfrac{1}{2}gT^2\right)\cos\alpha = \frac{v - gT}{u}\,l,$$

这就是所要求的结果。

$T = 0$ 的情况

当 $T = 0$ 时，条件变成 $l\sin\alpha = vl/u$，而由于 $l > 0$，

$$\sin\alpha = \frac{v}{u}.$$

想一想 为甚么这必然导致 $v < u$，而不只是 $v \le u$?

我们需要 $\sin\alpha \le 1$，所以 $v \le u$。但 $v = u$ 就需要 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，这时 $\cos\alpha = 0$：子弹从 O 垂直向上飞，永远到不了直线 $x = l$。所以只有当 $v < u$ 时才可能击中。这时

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，故取正根，而击中发生于

$$t = \frac{l}{u\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

泥靶由 $t = 0$ 起在空中，直至 $vt - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 再次成立为止，即直至 $t = 2v/g$。因此，要在它落地之前击中它，就需要

$$\frac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}} < \frac{2v}{g} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{2v\sqrt{u^2 - v^2}}{g} > l,$$

其中我们乘上了正数 $\sqrt{u^2 - v^2}$。连同 $v < u$，这正是我们要证明的结论。

$T = 0$ 的情况有一个很漂亮的看法。当 $\sin\alpha = v/u$ 时，子弹速度的铅垂分量是 $u\sin\alpha = v$，与泥靶的相同，而两者所受的重力也一样。所以子弹和泥靶*在每一瞬间都处于同一高度*，唯一的问题是：子弹的水平速率 $\sqrt{u^2 - v^2}$ 能否在泥靶落下之前走完距离 l。

验算

- *无重力的极限情况*。若 $g = 0$ 且 $T = 0$，两个物体都沿直线运动，而条件 $\sin\alpha = v/u$ 正是匀速拦截时常见的“提前量”瞄准条件。
- *最大射程*。对固定的 u，上界 $2v\sqrt{u^2 - v^2}/g$ 在 $v = u/\sqrt{2}$ 时最大，其值为 u^2/g，即以速率 u 发射的抛体（projectile）的最大射程。这是合理的：当 $v = u/\sqrt{2}$ 时我们得到 $\alpha = 45°$，而击中恰好发生在子弹本应落回地面的一刻。
- *数值*。取 $g = 9.8$、$v = 20$、$T = 0.7$、$u = 120$ 及 $l = 60$（国际单位制），用数值方法解出击中所需的角度，得 $\alpha \approx 0.2987$ rad，而第一条恒等式的两边相符。把两个运动按时间逐步推算，子弹到达发射器时，子弹和泥靶的高度都是 17.13 m。对于 $T = 0$、$v = 20$ 及 $u = 100$，上界约为 400 m，而 $\alpha \approx 11.5°$。

常见错误

- 对两个物体使用同一个时间变量，却没有考虑延迟 T：泥靶的高度必须用 $T + t$ 计算。
- 忘记排除 $v = u$ 的情况，这时 $\alpha = 90°$，根本不可能击中。
- 只检查子弹能否到达发射器，却没有检查那一刻泥靶是否仍在空中。

STEP 之外

$\frac{1}{2}gt^2$ 的抵消，其实是一个深刻思想的特例：在以加速度 g 自由下落的参考系（frame）中，重力消失了，每个抛体都以恒定速度沿直线运动。这是把伽利略相对性（Galilean relativity）应用于加速参考系，而到了爱因斯坦（Einstein）手中，它成为广义相对论（general relativity）核心的等效原理（equivalence principle）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对相对运动和非惯性参考系（non-inertial frames）有细致的阐述。

详细解答

STEP I 1993，第 13 题

力学 · 功与功率

STEP I 1993，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

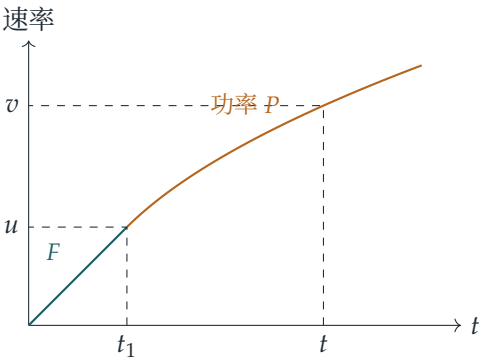
step.maths.org/questions/93-s1-q13

关键思路

运动分为两个阶段，每个阶段要用牛顿第二定律（Newton's second law）的不同形式。当力恒定时，加速度也恒定，所以 *suvat* 方程已足以解决一切。引擎一旦改以恒定功率（constant power）运作，驱动力便是 P/v，它会随速率而改变；诀窍是把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$（用来求时间）或 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$（用来求距离），使变量得以分离。

解答

把机车和列车合起来看成一个质量为 M 的质点（particle），沿笔直的水平路轨运动，且不受阻力。水平方向唯一的力是牵引力（tractive force）（重力和法向反作用力（normal reaction）都是垂直方向的，互相抵消）。下图是速率对时间的草图：先是一条直线，升至速率 u，然后是一条曲线，其斜率随速率上升而下降。



第一阶段：恒力

力恒为 F 时，加速度是 F/M。由静止出发，速率达到 u 的时刻是

$$t_1 = \frac{Mu}{F} = \frac{Mu^2}{P},$$

这里用了 $F = P/u$。由 $v^2 = u^2 + 2as$（这里速率由 0 增至 u），所走的距离是

$$s_1 = \frac{u^2}{2F/M} = \frac{Mu^2}{2F} = \frac{Mu^3}{2P}.$$

第二阶段：恒定功率

功率等于力乘以速度，所以速率为 w 时，牵引力是 P/w。留意当 $w = u$ 时，这个力是 $P/u = F$，所以引擎转换模式时，力不会突然跳变。由牛顿第二定律得

$$M\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{w}.$$

时间。 分离变量（separating the variables），得 $Mw\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}t$。由速率 u、时刻 t_1 积分至速率 v、时刻 t，

$$\frac{M}{2}\left(v^2 - u^2\right) = P\,(t - t_1).$$

（这其实就是功能原理（work–energy principle）：引擎所作的功是 $P(t - t_1)$，全部转化为动能（kinetic energy）。）所以

$$t = \frac{Mu^2}{P} + \frac{M}{2P}\left(v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(2u^2 + v^2 - u^2\right) = \frac{M}{2P}\left(u^2 + v^2\right),$$

正是所求。由于 $v \geq u$，速率 v 是在第二阶段之中（或刚好在其开始的一刻）达到的，所以我们可以使用第二阶段的方程。

> ? **想一想** 求距离时，自变量应该是 x，而不是 t。我们应怎样改写加速度？

由连锁律（chain rule），$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = w\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$。于是运动方程变成

$$Mw\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{w}, \qquad \text{即} \qquad Mw^2\,\mathrm{d}w = P\,\mathrm{d}x.$$

距离。 由 $w = u$ 积分至 $w = v$，第二阶段所走的距离 s_2 满足

$$\frac{M}{3}\left(v^3 - u^3\right) = P\,s_2, \qquad s_2 = \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right).$$

因此总距离是

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \frac{Mu^3}{2P} + \frac{M}{3P}\left(v^3 - u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(3u^3 + 2v^3 - 2u^3\right) \\ &= \frac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right). \end{aligned}$$

试卷上的一处误印。 试卷印出的答案把 u^3 写成了 u^2。这不可能是对的：Mv^3/P 是长度（功率的单位是 $\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$，而 Mv^3 的单位是 $\mathrm{kg\,m^3\,s^{-3}}$），但 Mu^2/P 却是时间，所以含 u 的一项也必须是三次方，两项才可以相加。正确的距离是 $\dfrac{M}{6P}\left(2v^3 + u^3\right)$，也就是我们上面证明了的结果。

验算

- 取 $v = u$：时间公式给出 $Mu^2/P = Mu/F$，距离公式给出 $Mu^3/(2P) = Mu^2/(2F)$，正好是第一阶段的结果，理应如此。
- 单位：Mv^2/P 是能量除以功率，即时间；Mv^3/P 是长度。误印正是这样露出马脚的。
- 取 $M = F = u = 1$（于是 $P = 1$）及 $v = 2$，公式给出 $t = 2.5$，距离为 $17/6 \approx 2.833$。以数值方法逐步模拟这个运动（速率低于某值时力为 F，该值就是 u，高于它时力为 P/w），所得的两个数值都与上述相同；而且对随机选取的 M、F、u 和 $v \geq u$，数值结果与公式的误差小于 10^{-7}；试卷上印有 u^2 的版本则并不吻合。

常见错误

- 忘记第一阶段，直接由静止开始对恒定功率的方程积分。第二阶段的方程只在 $w \geq u$ 时才成立；若由 $w = 0$ 开始使用，就等于说力是无限大。
- 对 x 积分时却用了 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$：求距离时，加速度必须写成 $w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$。
- 把第一阶段的时间写成 u/F：加速度是 F/M，不是 F。

STEP 之外

恒定功率阶段是一条一阶微分方程（first-order differential equation），以分离变量法求解；而把自变量由 t 换成 x，正是一般能量方法所用的同一诀窍：$w\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ 积分后得出动能，由此引出功能定理（work–energy theorem），再往后就是位势（potentials）和守恒量（conserved quantities）。低速时力设有上限，也正是现实中牵引的运作方式，因

为功率固定的摩打在静止时不可能提供无限大的力。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是循这个思路阐述功、能量和功率。

详细解答

STEP I 1993，第 14 题

概率与统计 · 指数分布的等候时间

STEP I 1993，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q14

关键思路

重要的不是蟾蜍先生的速率，而是他走完最后一公里所需的时间 T，而 $T = 1/V$。V 的密度函数看来不好处理，但它的累积分布函数（cumulative distribution function）却非常简单；把它转化为关于 T 的叙述，便可看出 T 服从参数为 α 的指数分布（exponential distribution）。此后，每个绿灯时段的概率都是两个指数函数之差，而把所有绿灯时段加起来，就得到一个等比级数（geometric series）。

解答

到达时间的分布

设 V 为速率，单位为公里每分钟，并设 $T = 1/V$ 为他到达交通灯的时间，以分钟为单位，由交通灯转绿的一刻起计。留意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{e}^{-\alpha/v} = \alpha v^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/v},$$

以及当 $v \to 0^+$ 时 $\mathrm{e}^{-\alpha/v} \to 0$，可知 V 的分布函数为

$$\mathrm{P}(V \le v) = \int_0^v \alpha u^{-2}\mathrm{e}^{-\alpha/u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\alpha/v} \qquad (v > 0).$$

（当 $v \to \infty$ 时它趋向 1，所以这确实是一个密度函数。）由于 $V > 0$，对 $t > 0$ 我们有 $T > t \iff 1/V > t \iff V < 1/t$，所以

$$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}\left(V < \tfrac{1}{t}\right) = \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

因此 T 服从参数为 α 的指数分布。

想一想 为甚么要用 T 而不用 V 来计算?

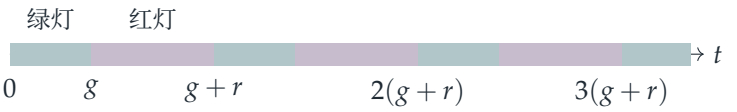
交通灯是以时间来描述的，所以我们关心的每个事件，都是 T 的取值所在的一个区间。若要直接把 V 的密度函数换算成 T 的密度函数，便须作变量代换（change of variable）；改为经由 $\mathrm{P}(T > t)$ 入手，则可避开这一步，一行便得出答案。

一个绿灯时段

在时间 0，交通灯转为绿灯。绿灯时段为 $[0, g)$，红灯时段为 $[g, g+r)$，然后绿灯时段为 $[g+r, (g+r)+g)$，如此类推。第 $(n+1)$ 个绿灯时段是 $n(g+r) \le t < n(g+r)+g$。由于 T 是连续的，是否包括端点并无分别，而

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(n(g+r) < T < n(g+r)+g\big) &= \mathrm{P}\big(T > n(g+r)\big) - \mathrm{P}\big(T > n(g+r)+g\big)\\ &= \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha(n(g+r)+g)},\end{aligned}$$

正如题目所求。（原试卷把第二个指数中的右括号印错了位置；该指数应为 $-\alpha\big(n(g+r)+g\big)$，如上所示。）以上推算对 $n = 0$ 同样成立，那就是第一个绿灯时段，此时交通灯还未曾转过红灯。



遇上绿灯的概率

他在绿灯时通过，当且仅当 T 落在其中一个绿灯时段之内。这些时段互不相交（disjoint），所以我们把它们的概率相加，包括 $n = 0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)} - \mathrm{e}^{-\alpha n(g+r)}\mathrm{e}^{-\alpha g}\right) = \left(1-\mathrm{e}^{-\alpha g}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}\right)^n\\ &= \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha g}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}},\end{aligned}$$

这里求了等比级数之和；该级数收敛（converges），因为 $0 < \mathrm{e}^{-\alpha(g+r)} < 1$（由于 $\alpha > 0$ 及 $g+r > 0$）。

极限

当 $\alpha \to \infty$ 时，$\mathrm{e}^{-\alpha g} \to 0$ 和 $\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)} \to 0$ 同时成立（因为 $g > 0, g+r > 0$），所以

$$\mathrm{P}(\alpha) \to \frac{1-0}{1-0} = 1.$$

这是合理的：α 很大表示蟾蜍先生开得非常快，几乎每次都能在第一个绿灯时段结束前通过。

当 $\alpha \to 0$ 时，分子和分母都趋向 0，所以要更小心处理。在分子和分母中分别写成 $1-\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x}-1)$：

$$\mathrm{P}(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha g}\left(\mathrm{e}^{\alpha g}-1\right)}{\mathrm{e}^{-\alpha(g+r)}\left(\mathrm{e}^{\alpha(g+r)}-1\right)} = \mathrm{e}^{\alpha r}\cdot \frac{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha g}-1}{\alpha g}}{\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha(g+r)}-1}{\alpha(g+r)}}\cdot \frac{g}{g+r},$$

其中我们把分子和分母同除以 α，并补上因子 g 和 $g+r$。当 $\alpha \to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\alpha r} \to 1$，而且 $\alpha g \to 0$ 和 $\alpha(g+r) \to 0$ 同时成立，所以由 $(\mathrm{e}^{x}-1)/x \to 1$ 可知两个分式各自趋向 1。因此

$$\mathrm{P}(\alpha) \to \frac{g}{r+g} \qquad \text{当} \alpha \to 0.$$

这时蟾蜍先生开得非常慢，他的到达时间分散在很多个周期之中，所以遇上绿灯的机会就只是每个周期中绿灯所占的比例。

验算

- 取 $\alpha = 0.7, g = 1, r = 2$，公式给出 $\mathrm{P}(\alpha) \approx 0.5737$。模拟 4×10^{5} 次车程，以求 $\mathrm{e}^{-\alpha/v}$ 的反函数的方法对 V 抽样，结果为 0.5744，而 $n = 0, 1, 2$ 各个绿灯时段的概率亦一一吻合。
- 取 $g = 1, r = 2$：$\mathrm{P}(10^{-4}) \approx 0.33337$，接近 $\frac{1}{3}$，而 $\mathrm{P}(10) \approx 0.99995$。
- 若 $r = 0$，交通灯永远是绿灯，而公式对每个 α 都给出 $\mathrm{P}(\alpha) = 1$，正该如此。

常见错误

- 漏掉 $n = 0$。第一个绿灯时段在任何红灯之前，所占的概率最大。
- 照抄试卷上印的指数 $-\alpha(n(g+r))+g$，那是 $-\alpha\big(n(g+r)+g\big)$ 的误印。
- 把 V 本身当作到达时间，或者尝试求 $\mathrm{E}(T)$。事实上这里的 $\mathrm{E}(V)$ 是无限大，但题目完全用不着它。

STEP 之外

通过分布函数把 V 的分布转化为 $T = g(V)$ 的分布，是变换随机变量（random variable）的标准方法。这里 V 服从逆指数分布（inverse-exponential distribution）。极限 $\alpha \to 0$ 是

一个普遍想法的小例子：一个分散在许多个周期之中的随机时间，落在各个阶段的机会与该阶段的长度成正比，这正是更新理论（renewal theory）的起点。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对随机变量的变换和指数分布都有论述。

详细解答

STEP I 1993，第 15 题

概率与统计 · 贝叶斯定理

STEP I 1993，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q15

关键思路

这是一道披着故事外衣的贝叶斯定理（Bayes' theorem）题目。窍门在于以真正的方向为条件，然后问：在每种情况下，那位土著给出这一连串答案的可能性有多大。Biscii 族人永远说谎，所以 Biscii 族人重复作答时，答案必定一致，而且必定指向错误的方向。因此，答案重复出现，会令你更有可能正在跟 Biscii 族人说话，这正是多问一次便可能推翻你原来决定的原因。

解答

只考虑 Ascii 族人

Ascii 族人每次回答问题时，说真话的概率是 $\frac{3}{4}$，且与之前的答案独立（independent）。这条问题只有两个可能的答案（左或右），所以两次答案相同，当且仅当两次都是真话或两次都是假话：

$$\mathrm{P}(\text{两次答案相同}) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16} + \tfrac{1}{16} = \tfrac{10}{16} = \tfrac{5}{8},$$

正如所求。其中“两次都是真话”的情况占了 $\frac{9}{16}$，所以根据条件概率（conditional probability）的定义，

$$\mathrm{P}(\text{说真话} \mid \text{两次答案相同}) = \frac{9/16}{10/16} = \frac{9}{10},$$

这就是第二个结果。

两次回答“左”

设 L 为“左是正确方向”这个事件（event），R 为“右是正确方向”这个事件。设 A 和 B 分别为土著是 Ascii 族人和 Biscii 族人的事件，其中 $\mathrm{P}(A) = \frac{11}{16}$，$\mathrm{P}(B) = \frac{5}{16}$，而土著属于哪一族与地理情况独立。船长起初对方向一无所知，所以我们取 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$。设 E_2 为土著两次都回答“左”的事件。

> **想一想** 为甚么求 $\mathrm{P}(E_2 \mid L)$ 比求 $\mathrm{P}(L \mid E_2)$ 容易?

一旦知道真正的方向，每一族的行为便完全确定，所以答案出现的概率很容易写出来。然后贝叶斯定理便会把这些概率倒转过来。

若左是正确的，Ascii 族人要两次都说真话才会两次回答“左”，概率是 $\frac{9}{16}$。Biscii 族人会说谎而回答“右”，所以不可能产生 E_2。因此

$$\mathrm{P}(E_2 \mid L) = \frac{11}{16} \cdot \frac{9}{16} + \frac{5}{16} \cdot 0 = \frac{99}{256}.$$

若右是正确的，Ascii 族人要两次都说谎才会两次回答“左”，概率是 $\frac{1}{16}$，而 Biscii 族人则必定两次都回答“左”。因此

$$\mathrm{P}(E_2 \mid R) = \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{16} + \frac{5}{16} \cdot 1 = \frac{11+80}{256} = \frac{91}{256}.$$

L 和 R 的先验概率（prior）相等，所以在贝叶斯定理中互相抵消：

$$\mathrm{P}(L \mid E_2) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{99}{256} + \frac{1}{2} \cdot \frac{91}{256}} = \frac{99}{99+91} = \frac{99}{190}.$$

这个值大于 $\frac{1}{2}$，所以左是较有可能的方向，船长应该向左走，而他走对的概率是 $\frac{99}{190}$。

三次回答“左”

设 E_3 为三次都回答“左”的事件。同样的推论仍然适用，只是现在 Ascii 族人给出三个独立的答案：

$$\mathrm{P}(E_3 \mid L) = \frac{11}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{5}{16} \cdot 0 = \frac{11}{16} \cdot \frac{27}{64} = \frac{297}{1024},$$
$$\mathrm{P}(E_3 \mid R) = \frac{11}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{5}{16} \cdot 1 = \frac{11}{1024} + \frac{320}{1024} = \frac{331}{1024}.$$

由于 $\mathrm{P}(E_3 \mid R) > \mathrm{P}(E_3 \mid L)$，而且先验概率相等，现在右才是较有可能的方向。确切地说，

$$\mathrm{P}(R \mid E_3) = \frac{331}{297+331} = \frac{331}{628} > \frac{1}{2}.$$

所以船长应该向*右*走，此时他走对的概率是 $\frac{331}{628}$。

想一想 第三个“左”怎么会令左变得更不可能?

每多一个“左”，Ascii 族人对 $\mathrm{P}(E \mid L)$ 的贡献便乘以 $\frac{3}{4}$。在 $\mathrm{P}(E \mid R)$ 中，Ascii 族人的一项会缩小至原来的 $\frac{1}{4}$，但 Biscii 族人的一项始终保持在 $\frac{5}{16}$。一长串完全相同的答案，正是 Biscii 族人会给出的，所以证据愈来愈倾向于说“这是个说谎者”。说真话的 Ascii 族人也会前后一致，但概率只有 $(\frac{3}{4})^n$，而这个值会逐渐趋向零。

验算

- 只回答一次“左”之后，似然（likelihood）分别是 $\frac{11}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{64}$（已知 L）和 $\frac{11}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{31}{64}$（已知 R），所以 $\mathrm{P}(L \mid \text{左}) = \frac{33}{64}$。数列 $\frac{33}{64} \approx 0.516$、$\frac{99}{190} \approx 0.521$、$\frac{297}{628} \approx 0.473$ 先升后跌，与上面的解释吻合。
- 回答次数很多时，$\mathrm{P}(L \mid E_n) \to 0$，因为 Biscii 族人的一项占主导。
- 我们以分数作精确穷举，并模拟了 10^6 次对话，核对了全部四个概率：模拟所得的值是 0.5214（精确值 $\frac{99}{190} \approx 0.5211$）和 0.5266（精确值 $\frac{331}{628} \approx 0.5271$）。

常见错误

- 忘记说明 $\mathrm{P}(L) = \mathrm{P}(R) = \frac{1}{2}$ 这个假设。若对方向没有任何先验概率，这条问题便无法作答。
- 把第一部分的 $\frac{9}{10}$ 套用到整个族群上。这个结果只适用于 Ascii 族人；Biscii 族人同样会两次给出相同的答案，而且每次都如此。
- 以为不论土著是哪一族人，他的三个答案都是独立的。只有在知道他属于哪一族（以及真正的方向）之后，这些答案才是独立的，这就是我们要先取条件的原因。

STEP 之外

这个计算是贝叶斯更新（Bayesian updating）的一个例子：比值 $\mathrm{P}(E \mid R)/\mathrm{P}(E \mid L)$ 称为似然比（likelihood ratio）或贝叶斯因子（Bayes factor），用来量度证据有多支持其中一个假设。由于土著属于哪一族是所有答案共有的隐藏变量（hidden variable），这些答案只是条件独立（conditionally independent），看似指向一方的证据，最终可能指向另一方。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门教材）对条件概率以及正是这一类的悖论有非常出色的论述。

详细解答

STEP I 1993，第 16 题

概率与统计 · 几何概率

STEP I 1993，第 16 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s1-q16

本题在 *Beyond STEP* 第 12.20 节蒲丰投针中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/buffon.html

关键思路

这就是蒲丰投针问题（Buffon's needle）。针会否跨过最近的那条线，只取决于针尖朝着该线伸出多远，而这段伸出的距离正是半根针在垂直方向上的投影（projection）。先固定针的中心与线的距离，单凭角度求出条件概率（conditional probability），然后再对距离取平均。第一部分的积分正是这个取平均的过程所产生的积分，这就是题目由它开始的原因。

解答

积分

设 $y = \cos^{-1} t$，则 $t = \cos y$，$\mathrm{d}t = -\sin y \,\mathrm{d}y$。当 $t = 0$ 时，$y = \frac{\pi}{2}$；当 $t = 1$ 时，$y = 0$。因此

$$\int_0^1 \cos^{-1} t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 y\,(-\sin y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y.$$

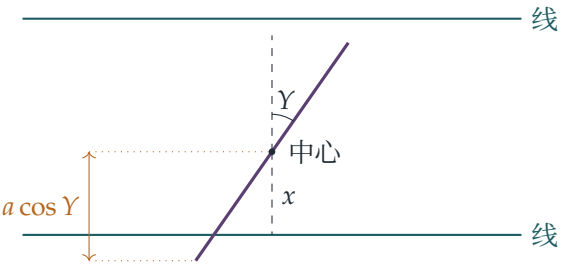
取 $u = y$ 和 $\mathrm{d}v = \sin y \,\mathrm{d}y$，以分部积分法（integration by parts）计算，

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} y \sin y \,\mathrm{d}y &= \Big[-y\cos y\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos y \,\mathrm{d}y \\ &= 0 + \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1,\end{aligned}$$

这正是所求的结果。

（另一做法：这个积分是 $y = \cos^{-1} t$ 与两条坐标轴之间的面积，而这个区域与 $t = \cos y$ 在 $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ 之下的区域相同，面积即 $\int_0^{\pi/2} \cos y \, \mathrm{d}y = 1$。）

已知 $X = x$ 时的概率



针的每一半长度为 a，并与各线的垂直线成角 Y，所以针的两端分别位于中心两侧，与中心的垂直距离为 $a\cos Y$。最近的线与中心相距 x，故此针跨过该线，当且仅当

$$a\cos Y \ \ge \ x.$$

（等号成立时，针尖刚好碰到线，这种情况的概率为零，所以是否把它计算在内并无影响。）

> ? **想一想** 怎样把 $a\cos Y \ge x$ 化为只涉及 Y 的条件?

由于 cos 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是递减的，答案视乎 x/a 这个值能否取到。

- 若 $x \ge a$，则 $a\cos Y \le a \le x$，而等号只在 $Y = 0$ 且 $x = a$ 时成立，所以概率为 0。
- 若 $0 \le x < a$，则 $\cos Y \ge x/a$ 等价于 $Y \le \cos^{-1}(x/a)$，其中 $\cos^{-1}(x/a) \in (0, \frac{\pi}{2}]$。由于 Y 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布（uniform），

$$\mathrm{P}(\text{跨线} \mid X = x) = \frac{\cos^{-1}(x/a)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}.$$

这里用到了 X 与 Y 的独立性（independence）：即使知道 $X = x$，Y 仍然在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布。

一般投掷的概率

现设 $a < b$。X 的概率密度（density）在 $[0, b]$ 上为 $1/b$。因为 $a < b$，有可能跨线的区间 $[0, a)$ 位于 $[0, b]$ 之内，而条件概率在 $[a, b]$ 上为零。根据全概率公式（law of total probability），

$$\mathrm{P}(\text{跨线}) = \int_0^b \mathrm{P}(\text{跨线} \mid X = x)\,\frac{1}{b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^a \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

代入 $x = at$，$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$，并利用第一部分的结果，

$$\mathrm{P}(\text{跨线}) = \frac{2a}{\pi b}\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2a}{\pi b},$$

这正是所求的结果。由于 $a < b$，针比线与线之间的间距 $2b$ 短，绝不可能碰到第二条线，所以“跨过某一条线”与“跨过最近的线”是同一事件。

验算

- 当 $a \to b$ 时，答案趋向 $2/\pi \approx 0.637$，小于 1，这是必然的：即使针与间距一样长，它仍然经常近乎平行于各线而落下。
- 答案与 a 成正比：把一根短针的长度加倍，跨线的机会也加倍，这与“跨线次数的期望值（expected number）是长度的线性函数”这一事实吻合。
- 按实际的几何情况进行模拟（中心在一条带状区域内均匀分布，角度均匀分布），取 $a = 1$、$b = 2$，投掷 4×10^5 次后得出 0.3183，而 $1/\pi \approx 0.31831$。以中点法则作数值积分（midpoint quadrature），得 $\int_0^1 \cos^{-1} t\,\mathrm{d}t = 1.0000000$。

常见错误

- 把 $a\cos Y$ 误写成 $a\sin Y$：这里的 Y 是由各线的垂直线量起，而不是由各线本身量起。
- 以公式 $\frac{2}{\pi}\cos^{-1}(x/a)$ 在整个 $[0, b]$ 上对条件概率积分；这个公式在 $x > a$ 时没有定义，而条件概率在该处为 0。
- 对 X 取平均时忘记乘上密度 $1/b$。

STEP 之外

蒲丰（Buffon）在十八世纪提出这个问题，它是几何概率（geometric probability）的经典例子：把概率当作参数空间中的面积来计算，这里的参数空间是矩形 $[0, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$。由于答案涉及 π，投针便可以为 π 提供一个（非常缓慢的）蒙地卡罗（Monte Carlo）估计。这个问题有一个漂亮的推广，称为“蒲丰面条”（Buffon's noodle）：利用期望值的线性性质（linearity of expectation）可以证明，任何形状的曲线，其跨线次数的期望值只取决于曲线的长度。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教科书）涵盖了这类连续联合分布（continuous joint distributions）与取条件的方法。

详细解答

STEP II 1993，第 1 题

纯数学 · 组合博弈策略

STEP II 1993，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q1

关键思路

一切都建基于一个计数上的事实。两位玩家都恰好有 9 可供分配，所以 Betty 不可能在每一块场地上都与 Adam 打和或胜过他，同时又在其中一块场地上明确取胜：那样她至少要用上 $9+1$。因此，每当 Betty 胜出，她必定是恰好赢两块场地而输掉第三块。掌握了这一点，第一部分就变成一套固定做法，而两个三元组的部分则变成简短的分情况讨论（case analysis）。

解答

全文中，“Betty 赢得场地 i”指 $b_i > a_i$，“Adam 赢得场地 i”指 $a_i > b_i$，而 $a_i = b_i$ 的场地则为打和。

一条引理：Betty 怎样才能胜出

设 Betty 的三元组（triple）击败 Adam 的三元组 (a_1, a_2, a_3)，其中 $a_1 + a_2 + a_3 = 9$。

- 她不可能三块场地全赢,因为那样需要对每个 i 都有 $b_i \geq a_i + 1$,于是 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 12$。
- 假设她恰好赢一块场地。由于她的得分比 Adam 多，Adam 的得分是 0，所以其余两块场地不是打和就是 Betty 赢。于是对每个 i 都有 $b_i \geq a_i$，而且至少有一处是严格不等式（strict inequality），因此 $b_1 + b_2 + b_3 \geq 9 + 1 = 10$。这是不可能的。

她的得分比 Adam 多，所以她至少得一分。因此她恰好赢两块场地。所以 Betty 击败 (a_1, a_2, a_3) 当且仅当（if and only if）对某一对场地 i, j 有

$$b_i \geq a_i + 1, \qquad b_j \geq a_j + 1,$$

并且她输掉余下的场地 k。留意输掉场地 k 是自动成立的，因为 $b_k = 9 - b_i - b_j \le 9 - a_i - a_j - 2 = a_k - 2$。

Betty 总能胜出

把场地重新编号，使得 $a_1 \ge a_2 \ge a_3$。那么 $3a_1 \ge a_1 + a_2 + a_3 = 9$，所以 $a_1 \ge 3$。Betty 放弃 Adam 最强的那块场地，而在另外两块场地上各比他多一：

$$(b_1, b_2, b_3) = (a_1 - 2,\ a_2 + 1,\ a_3 + 1).$$

这些都是非负整数（因为 $a_1 - 2 \ge 1$），而且和为 9。Betty 赢得场地 2 和场地 3，并输掉场地 1，因为 $a_1 - 2 < a_1$。她得 2 分而 Adam 得 1 分，所以她胜出。

Adam 可以确保自己永不胜出

取 $(a_1, a_2, a_3) = (9, 0, 0)$。Adam 不可能在场地 2 或场地 3 上得分，因为 $b_2, b_3 \ge 0$。所以他最多得一分，而且只能靠赢得场地 1 来取得，这即是说 $b_1 \le 8$。在这情况下 $b_2 + b_3 = 9 - b_1 \ge 1$，所以 Betty 在场地 2 或场地 3 上有一个正数项，因而至少得一分。要么 Adam 得 0 分，要么他得 1 分而 Betty 至少得 1 分。无论哪种情况，他的得分都不会多于 Betty，所以不论 Betty 怎样做，他都永不胜出。

（以穷举搜索（brute-force search）可知，$(9, 0, 0)$ 及其各种重新排列是具有这个性质的仅有三元组。面对任何其他三元组，Betty 只要作出某个愚蠢的选择，就会把胜利拱手让给 Adam。）

两个三元组：$(5, 3, 1)$ 和 $(3, 1, 5)$

我们需要证明没有任何三元组 (b_1, b_2, b_3) 能同时击败这两者。根据引理，Betty 面对每个三元组都需要赢两块场地。

对 $(5, 3, 1)$。赢得场地 1 和场地 2 要用上 $6 + 4 = 10 > 9$，这是不可能的。所以她必须赢得场地 3，再加上场地 1 或场地 2：

$$b_3 \ge 2 \quad \text{及} \quad (b_1 \ge 6 \ \text{或}\ b_2 \ge 4). \tag{A}$$

对 $(3, 1, 5)$。赢得场地 1 和场地 3 要用上 $4 + 6 = 10 > 9$，这是不可能的。所以她必须赢得场地 2，再加上场地 1 或场地 3：

$$b_2 \ge 2 \quad \text{及} \quad (b_1 \ge 4 \ \text{或}\ b_3 \ge 6). \tag{B}$$

? **想一想** 两个条件都涉及场地的选择。我们怎样把它们合并起来而不遗漏任何情况?

按 (B) 中的第二个选择分情况讨论。

- 若 $b_3 \geq 6$，则 $b_1 + b_2 \leq 3$，所以 $b_1 \geq 6$ 和 $b_2 \geq 4$ 都不可能成立，这与 (A) 矛盾。
- 若 $b_1 \geq 4$，则连同 (B) 中的 $b_2 \geq 2$ 和 (A) 中的 $b_3 \geq 2$，再加上 (A) 中的二择其一，可得

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 6 + 2 + 2 = 10 \qquad \text{或} \qquad b_1 + b_2 + b_3 \geq 4 + 4 + 2 = 10.$$

  两者都不可能，因为总和是 9。

每种情况都导致矛盾，所以没有单一个三元组能同时击败 $(5,3,1)$ 和 $(3,1,5)$。Adam 凭这一对三元组胜出，正如所求。

验算

总共只有 $\binom{11}{2} = 55$ 个三元组，所以一切都可以用穷举法检查。电脑证实，Adam 的 55 个三元组每一个都被 Betty 上述的做法击败，而且每一个致胜的回应都恰好赢两块场地。电脑亦列出击败 $(5,3,1)$ 的 13 个三元组和击败 $(3,1,5)$ 的 13 个三元组，并发现两张清单没有共同的三元组。举一个具体例子，$(4,2,3)$ 以 2–1 击败 $(3,1,5)$，但面对 $(5,3,1)$ 时它只赢得场地 3，并输掉场地 1 和场地 2，所以它以 1–2 落败。

常见错误

- 以 $(3,3,3)$ 作为 Adam “永不胜出”的三元组。Betty 可以出 $(2,2,5)$ 而以 1–2 落败，所以 Adam 凭它是可以胜出的。
- 忘记了 Betty 若只赢一块场地而胜出，就需要 Adam 一分不得，继而没有利用总和 9 来排除这个情况。
- 在两个三元组的部分，只检查几个自然想到的回应，例如 $(6,0,3)$ 或 $(0,2,7)$，而没有证明任何回应都行不通。

STEP 之外

布洛托上校博弈（Colonel Blotto）是博弈论（game theory）中的经典。由于 Betty 后行并掌握全部信息，她总能胜出，所以有趣的版本是让两位玩家同时行动。这时通常没有最佳的纯策略（pure strategy），而解答是一个混合策略（mixed strategy）：三元组上的一个概率分布（probability distribution），其存在由冯纽曼（von Neumann）的极小极大定理（minimax theorem）保证。本题中两个三元组的变体是朝这个方向迈出的第一步，

因为 Adam 的最佳防守就是把他的选择分散到几个三元组上。想做同类精神的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题集）。至于支撑混合策略的概率工具，可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入门）。

详细解答

STEP II 1993，第 2 题

纯数学 · 三角函数与代数函数的积分

STEP II 1993，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q2

关键思路

在第 (i) 部分，余弦的乘积不易积分，但和却很容易，所以我们用积化和差公式（factor formula）把乘积化为和。之后一切都取决于一个事实：除非 $k = 0$，否则 $\cos kx$ 在一个完整周期（period）上的积分为零。特殊情况正正就是 $m - n$ 或 $m + n$ 为零的情况。在第 (ii) 部分，我们把平方根内的式子合并成单一分数，再进行有理化（rationalise），从而把被积函数（integrand）拆成两个标准部分。

解答

第 (i) 部分

由积化和差公式 $2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$ 得

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\big[\cos\big((m-n)x\big) + \cos\big((m+n)x\big)\big].$$

因此我们需要对整数 k 求 $\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x$：

$$\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\dfrac{\sin kx}{k}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{\sin 2k\pi}{k} = 0, & k \neq 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 2\pi, & k = 0. \end{cases}$$

这里用到 k 是整数，所以 $\sin 2k\pi = 0$。当 $k = 0$ 时不能除以 k，因此这个情况要分开处理。

? **想一想** 共有多少个不同的情况？它们会否重叠？

$k = m - n$ 和 $k = m + n$ 各自或为零，或不为零，而两者同时为零只会在 $m = n = 0$ 时发生。于是有三个情况：

- $m \neq n$ 且 $m \neq -n$，即 $|m| \neq |n|$：两个积分都等于零，答案是 0。
- $m-n$、$m+n$ 之中恰好有一个为零，即 $|m| = |n| \neq 0$：其中一项贡献 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$，另一项贡献 0，所以答案是 π。
- $m = n = 0$：两项各贡献 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$。（直接来看，被积函数就是 1。）答案是 2π。

总括而言，

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & |m| \neq |n|, \\ \pi, & |m| = |n| \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

留意 $m = -n$ 与 $m = n$ 属于同一类，因为 cos 是偶函数（even function），$\cos(-nx) = \cos(nx)$。

第 (ii) 部分

被积函数 $\sqrt{1+1/x} = \sqrt{(x+1)/x}$ 只在 $(x+1)/x \geq 0$ 时才是实数，即 $x > 0$ 或 $x \leq -1$。我们先处理 $x > 0$。

$x > 0$ 的情况。 把根号内的分子和分母同乘以 $x+1$：

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}},$$

其中利用了 $x+1 > 0$ 来取 $(x+1)^2$ 的平方根。现在把分子拆开，使其中一部分是 x^2+x 的导数的一半：

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

想一想 怎样对 $1/\sqrt{x^2+x}$ 积分?

我们用配方法（completing the square）：$x^2+x = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$。然后标准结果 $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)$（在 $u > a > 0$ 时成立）可以应用，取 $u = x+\frac{1}{2}$ 和 $a = \frac{1}{2}$：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x}} = \ln\left(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right) + \text{常数} = \ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) + \text{常数}.$$

第一部分是 $\int \frac{1}{2}(2x+1)(x^2+x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}$。所以，当 $x > 0$ 时，

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) + C.$$

由于 $2x+1+2\sqrt{x^2+x} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2$，这也可以写成

$$\sqrt{x(x+1)} + \ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) + C.$$

用代换 (substitution) $x=\sinh^2 t$ 可以直接得出这第二个形式。被积函数变成 $2\cosh^2 t = 1+\cosh 2t$，其积分为 $t+\sinh t\cosh t$。

$x\le -1$ 的情况。 这时 $x+1\le 0$，所以 $\sqrt{(x+1)^2}=-(x+1)$，而

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = -\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}.$$

同样的拆法仍然适用，但现在 $x+\frac12<0$，所以我们需要 $\int (u^2-a^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}u = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|$，此式在 $|u|>a$ 时成立。当 $x<-1$ 时，

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{x^2+x} - \frac12 \ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

因为 $\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)=1$，这个对数项也可以写成 $+\frac12\ln\left|2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right|$。

验算

- 第 (i) 部分：取 $m=n=1$，被积函数是 $\cos^2 x$，其平均值为 $\frac12$，所以积分是 $\frac12\cdot 2\pi=\pi$，与预期相符。对每一对 $-6\le m,n\le 6$ 用数值方法（辛普森法则，Simpson's rule）计算，结果都与三个情况的公式吻合。
- 第 (ii) 部分：对答案求导。$\sqrt{x^2+x}$ 的导数是 $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$。$\frac12\ln(\cdots)$ 的导数是 $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$。两者相加得 $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$，正如所求。
- 数值上，$\int_1^3 \sqrt{1+1/x}\,\mathrm{d}x \approx 2.48547$，用辛普森法则和用公式 $\sqrt{12}-\sqrt{2}+\frac12\ln\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}$ 计算，结果一致。

常见错误

- 忘记 $m=-n\neq 0$ 的情况；它与 $m=n\neq 0$ 一样，答案是 π。
- 在 $k=0$ 时写出 $\dfrac{\sin kx}{k}$；这个情况需要另行处理。
- 没有检查正负号就写 $\sqrt{(x+1)^2}=x+1$，这会令 $x<-1$ 时的答案出错。

STEP 之外

第 (i) 部分说明函数 $1,\cos x,\cos 2x,\ldots$ 在 $[0,2\pi]$ 上是正交（orthogonal）的。这正是傅里叶级数（Fourier series）背后的事实：若 $f(x)=\sum a_n\cos nx$，乘以 $\cos mx$ 再积分，就能

抽出单独一个系数 a_m。同样的想法，即以积分扮演点积（dot product）的角色，是函数空间上许多线性代数（linear algebra）内容的基础。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）讲解正交性，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）则展示了傅里叶级数如何实际用于求解热方程（heat equation）。

详细解答

STEP II 1993，第 3 题

纯数学 · 里卡蒂微分方程

STEP II 1993，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q3

关键思路

两条方程都因为 y^2 项而成为非线性（nonlinear）方程，所以标准的一阶方程解法都不能直接套用。题目给出的代换（substitution）正是为了消去这个 y^2 项而设计的。在 (i) 中，把 y 写成 u'/u 的倍数，平方项便会互相抵消，剩下一条常系数的二阶线性方程。在 (ii) 中，$y = 1/x$ 刚好是一个精确解，而写成 $y = 1/x + 1/v$ 后，方程便化为关于 v 的一阶线性方程，可用积分因子（integrating factor）求解。

解答

第 (i) 部分

设 $y = -\dfrac{u'}{3u}$，其中 $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u''}{3u} + \frac{(u')^2}{3u^2}, \qquad \text{而} \qquad 3y^2 = 3 \cdot \frac{(u')^2}{9u^2} = \frac{(u')^2}{3u^2}.$$

于是那些麻烦的项互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = -\frac{u''}{3u}.$$

因此方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y - 3y^2 = -2$ 变成

$$-\frac{u''}{3u} + \frac{u'}{3u} = -2.$$

两边乘以 $-3u$（其中 $u \neq 0$，这本来就是 y 有定义所必需的），得

$$u'' - u' - 6u = 0.$$

辅助方程（auxiliary equation）为 $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$，所以 $m = 3$ 或 $m = -2$，而

$$u = A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}$$

其中 A 和 B 为常数，且不同时为零。于是 $u' = 3A\mathrm{e}^{3x} - 2B\mathrm{e}^{-2x}$，而

$$y = -\frac{u'}{3u} = \frac{2B\mathrm{e}^{-2x} - 3A\mathrm{e}^{3x}}{3\left(A\mathrm{e}^{3x} + B\mathrm{e}^{-2x}\right)}.$$

想一想 一阶方程应该只有一个任意常数（arbitrary constant）。为甚么我们会有两个?

其实只有 A 与 B 的比才有影响：把 u 乘以一个非零常数，并不会改变 u'/u。若 $A \neq 0$，把分子和分母同时除以 $A\mathrm{e}^{3x}$，并记 $K = B/A$：

$$y = \frac{2K\mathrm{e}^{-5x} - 3}{3\left(1 + K\mathrm{e}^{-5x}\right)} = \frac{2K - 3\mathrm{e}^{5x}}{3\left(\mathrm{e}^{5x} + K\right)},$$

其中 K 为任意常数。$A = 0$ 的情况给出常数解 $y = \frac{2}{3}$，它是这族解当 $K \to \infty$ 时的极限。取 $K = 0$ 则得另一个常数解 $y = -1$。作为验算，常数解满足 $-y - 3y^2 = -2$，即 $(3y-2)(y+1) = 0$。

第 (ii) 部分

设 $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{v}$。则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2},$$

因此

$$\begin{aligned} x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -1 - \frac{x^2 v'}{v^2}, \\ xy &= 1 + \frac{x}{v}, \\ x^2y^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}. \end{aligned}$$

把这三行相加，方程 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$ 变成

$$1 - \frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 1, \qquad \text{即} \qquad -\frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 0.$$

两边乘以 v^2/x^2（其中 $x \neq 0$，这是方程本身的要求），得线性方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}v = 1.$$

积分因子为 $\exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x^{-3}$（在 $x > 0$ 或 $x < 0$ 其中一个区间上；我们可以略去绝对值符号，因为积分因子乘以一个常数后同样适用）。故此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c \quad\Longrightarrow\quad v = cx^3 - \tfrac{1}{2}x = \frac{x\left(Kx^2 - 1\right)}{2},$$

其中 c 为任意常数，$K = 2c$。所以

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\left(Kx^2 - 1\right)} = \frac{Kx^2 + 1}{x\left(Kx^2 - 1\right)},$$

其中 K 为任意常数。取 $K = 0$ 得 $y = -1/x$。这个代换假设了 $1/v$ 存在，所以遗漏了 $y = 1/x$ 本身（“$v = \infty$”）。它同样是一个解，因为 $x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 + 1 = 1$，而且它是这族解当 $K \to \infty$ 时的极限。

验算

- 在 (i) 中，当 $x = 0$ 时，解的值为 $y(0) = \dfrac{2K - 3}{3(1 + K)}$。当 $x \to +\infty$ 时，$y \to -1$；当 $x \to -\infty$ 时，$y \to \frac{2}{3}$（当 $K \neq 0$）。所以解由一个常数解走向另一个常数解，正如我们所料。
- 在 (ii) 中，取 $K = 1$ 及 $x = 2$：$y = \frac{5}{6}$，$y'(2) = -\frac{31}{36}$。于是 $x^2y' + xy + x^2y^2 = -\frac{31}{9} + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} = 1$，符合要求。
- 我们以有限差分（finite differences）在数百个随机点及随机的 K 值上，对两个通解（general solution）作了数值验算。代入原方程所得的残差，在舍入误差范围内为零。

常见错误

- 在 (i) 的答案中保留两个常数 A、B，而没有留意到只有它们的比才有影响。
- 在 (ii) 中忘记了 x^2y^2 交叉项的因子 2，以致把 $3v/x$ 变成 $2v/x$，得出错误的积分因子。
- 遗漏了代换所无法得到的解 $y = 1/x$（或 (i) 中的 $y = \frac{2}{3}$）。

STEP 之外

形如 $y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ 的方程称为里卡蒂方程（Riccati equation）。本题的两个技巧都是普遍适用的。代换 $y = -u'/(ru)$ 总能把里卡蒂方程化为二阶线性方程。而如果你知道一个特解（particular solution）y_1，则 $y = y_1 + 1/v$ 总能给出一条关于 v 的一阶线性方程。里卡蒂方程与二阶线性方程之间的这种联系，在量子力学（quantum mechanics）和控制理论（control theory）中会再次出现。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）中有关于里卡蒂方程的习题。

详细解答

STEP II 1993，第 4 题

纯数学 · 偏斜线与最接近距离

STEP II 1993，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q4

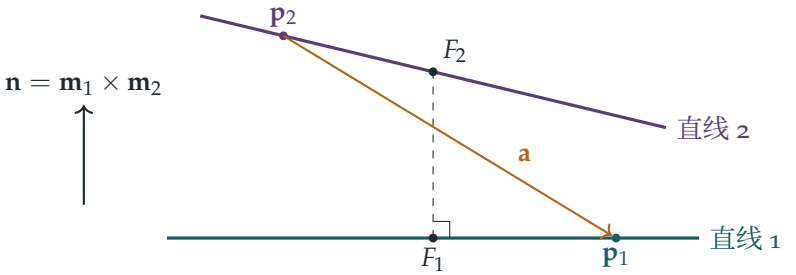
关键思路

由一条直线上的点连到另一条直线上的点的任何向量，沿公共法向量（common normal）$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ 的分量（component）都相同，因为沿任何一条直线移动，只会加上 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 的倍数，而这两个向量都与该法向量垂直。这个固定的分量就是最短距离。至于飞机的部分，窍门是在 A_2 的参考系（frame）中考虑：由 A_2 指向 A_1 的向量沿单一一条直线移动，所以最接近时的距离就是一点到一条直线的距离。

解答

两条直线之间的最短距离

设 $\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ 及 $\mathbf{n} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$，由于两条直线不平行，后者不是零向量，而且同时垂直于 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$。



草图显示了这两条直线（它们是异面直线（skew lines），所以不相交）、由 $\mathbf{p}_2$ 指向 $\mathbf{p}_1$ 的向量 $\mathbf{a}$，以及与 $\mathbf{n}$ 平行的公垂线（common perpendicular）F_1F_2。

由直线 2 上一点指向直线 1 上一点的一般向量是

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2.$$

由于 $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$，它沿单位法向量（unit normal）$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 的分量是

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

无论 t_1, t_2 怎样选取，结果都一样。向量的长度不会小于它的任何一个分量，所以 $|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}|$，而等号恰好在 $\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{n}$ 平行时成立。等号确实可以成立：$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}$ 不共面，所以它们构成一组基（basis），我们可以写成 $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 + \gamma\mathbf{n}$；取 $t_1 = -\alpha$、$t_2 = \beta$，便剩下 $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{n}$。这个选择给出草图中的垂足 F_1, F_2。从图中看，最短距离就是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{n}$ 方向上的“高度”。因此最短距离是

$$|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \frac{|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}.$$

第 (i) 部分

这里 $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$。把 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 换成它们的任何非零倍数，公式都不变，因为这些因子在分子和分母中互相约去，所以我们可以用 $(4, 3, 0)$ 和 $(0, -3, 1)$：

$$(4, 3, 0) \times (0, -3, 1) = (3, -4, -12), \qquad |(3, -4, -12)| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13.$$

于是 $(1, 1, 1) \cdot (3, -4, -12) = -13$，所以最短距离是 $13/13 = 1$。

第 (ii) 部分

在时间 t，两架飞机分别位于 $\mathbf{p}_1 + v_1 t\,\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{p}_2 + v_2 t\,\mathbf{m}_2$，所以由 A_2 指向 A_1 的向量是

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2.$$

由于 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ 不平行，$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$（除非两个速率都是零）。我们把飞行过程理解为包括所有时间，即 $t = 0$ 之前和之后。于是

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + t^2|\mathbf{w}|^2,$$

这是 t 的二次式，首项系数为正。配方（completing the square）后得

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{w}|^2\Big(t + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\Big)^2 + |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2},$$

所以最小值在 $t = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}/|\mathbf{w}|^2$ 时取得，其值为

$$d^2 = \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2\,|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2 - [(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2)]^2}{|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2},$$

这正是所求。从几何上看，d 是原点到直线 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$ 的距离，即 $|\mathbf{a}| \sin\theta$，其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{w}$ 之间的夹角。

第 (iii) 部分

先给出一个不需要任何代数运算的下界：在每一刻，A_1 都在直线 1 上，A_2 都在直线 2 上，所以由第 (i) 部分可知 $d \geq 1$。等号成立的话，两架飞机必须在同一时间分别位于垂足 F_1、F_2。

> **想一想** A_2 的机师真的可以做到这一点吗?

先求垂足。要求 $\mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2$ 同时垂直于 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$，并利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_1 = \frac{7}{5}$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$ 及 $\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$，解这两条线性方程便得

$$t_1 = -\tfrac{20}{13}, \qquad t_2 = \tfrac{\sqrt{10}}{13}.$$

A_1 在时间 $t_1/v_1 < 0$ 位于 F_1，但当 $v_2 > 0$ 时，A_2 在时间 $t_2/v_2 > 0$ 才位于 F_2。这两个时间永远不可能相同：F_1 在 $\mathbf{p}_1$ 的后方，而 F_2 在 $\mathbf{p}_2$ 的前方。所以若 A_2 沿 $\mathbf{m}_2$ 的方向飞行，$d = 1$ 这个值是达不到的。要知道可以达到甚么值，我们利用第 (ii) 部分。

设 $v_2 = \sqrt{10}\,\lambda v_1$，所以 λ 是经过缩放的速率比。于是

$$\mathbf{w} = v_1\big(\tfrac{1}{5}(4,3,0) - \lambda(0,-3,1)\big) = \tfrac{v_1}{5}(4,\ 3+15\lambda,\ -5\lambda),$$

而因子 $\frac{v_1}{5}$ 在 d^2 的公式中会约去。利用 $|\mathbf{a}|^2 = 3$，

$$\mathbf{a}\cdot(4,3+15\lambda,-5\lambda) = 7+10\lambda, \qquad |(4,3+15\lambda,-5\lambda)|^2 = 25+90\lambda+250\lambda^2,$$

所以

$$d^2 = 3 - \frac{(7+10\lambda)^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26+130\lambda+650\lambda^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1+5\lambda+25\lambda^2}{5+18\lambda+50\lambda^2}.$$

对最后一个分式 N/D 求导，导数的分子可以化简：

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (5+50\lambda)(5+18\lambda+50\lambda^2) - (1+5\lambda+25\lambda^2)(18+100\lambda) \\ &= 7+150\lambda+200\lambda^2 = (1+20\lambda)(7+10\lambda). \end{aligned}$$

所以，把 d^2 看成所有实数 λ 的函数时，它在 $\lambda = -\frac{7}{10}$ 取得极大值（此时 $\mathbf{a}\perp\mathbf{w}$ 而 $d=\sqrt{3}$），并在 $\lambda = -\frac{1}{20}$ 取得极小值，此时

$$d^2 = \frac{26}{5}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{5-\frac{9}{10}+\frac{1}{8}} = \frac{26}{5}\cdot\frac{13/16}{169/40} = 1.$$

这就是下界 $d = 1$，在 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ 时达到，与由垂足求得的 t_2/t_1 吻合。

所以两架飞机最接近时可以相距 $d = 1$，即两条直线之间的最短距离，而不能再近。要做到这一点，A_2 的机师须沿直线 2 以 $-\mathbf{m}_2$ 的方向、以速率 $\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ 飞行：用题目的记号，就

是 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$，这是沿 $\mathbf{m}_2$ 的速度而不是速率。这样两架飞机便会在同一刻到达公垂线的两个垂足。这重现了第 (i) 部分的答案，相信这正是考官的原意。留意答案只取决于比值 v_2/v_1。

*关于正速率的备注。*如果 v_2 必须是真正的速率，即 $v_2 > 0$ 及 $\lambda > 0$，那么 $(1+20\lambda)(7+10\lambda) > 0$，而 d^2 对 v_2 严格递增：

$$d^2 \to \frac{26}{25} \quad \text{当} v_2 \to 0^+, \qquad d^2 \to \frac{13}{5} \quad \text{当} v_2 \to \infty.$$

按这种理解，并不存在最佳速率：机师飞得愈慢，效果愈好，最接近时的距离可以任意接近 $\frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1.020$，即 $\mathbf{p}_2$ 到直线 $\mathfrak{l}$ 的距离，但永远达不到这个值。

验算

- (i) 中的公垂线：取 $t_1 = -\frac{20}{13}$、$t_2 = \frac{\sqrt{10}}{13}$ 时，连接两点的向量是 $\frac{1}{13}(-3,4,12)$，它与 $(3,-4,-12)$ 平行，长度恰好是 1。
- 用电脑对随机选取的速率以直接搜索法求 $|\mathbf{r}(t)|$ 的最小值，结果与 (ii) 中的公式吻合，误差在 10^{-6} 以内。电脑亦在 $[-2,2]$ 上扫描了 v_2/v_1：最小值是 $d^2 = 1.0000$，在 $v_2/v_1 \approx -0.1581 = -1/(2\sqrt{10})$ 时取得，而当 $v_2 > 0$ 时，d^2 由 1.04 开始上升。
- 极限情况：$v_2 = 0$ 时 A_2 是固定在 $\mathbf{p}_2$ 的一点，而 $3 - (\frac{7}{5})^2 = \frac{26}{25}$ 确实是 $\mathbf{p}_2$ 到直线 $\mathfrak{l}$ 的距离的平方。

常见错误

- 以“1，由第 (i) 部分可得”回答 (iii)，却没有检查两架飞机能否在同一刻到达公垂线的垂足。
- 忘记了 (ii) 中的公式不受 $\mathbf{w}$ 的缩放影响，结果带着 v_1 做了好几页代数运算。
- 在直线距离公式中漏掉绝对值，得出 -1。

STEP 之外

第 (ii) 部分是*正交投影*（orthogonal projection）的一个小例子：d 是 $\mathbf{a}$ 垂直于 $\mathbf{w}$ 的分量的长度，而 $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{w}|^2$ 是格拉姆行列式（Gram determinant），即以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{w}$ 为边的平行四边形面积的平方。大学第一门线性代数课程中的最小二乘法（least squares）拟合，正是建基于同一个投影概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对此有十分精彩的阐述。

详细解答

STEP II 1993，第 5 题

纯数学 · 极坐标曲线与弧长

> **STEP II 1993，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q5

关键思路

R 处的直角让我们只需用 OQ 和小角 $\delta\theta$，便可从直角三角形 ORQ 读出小三角形 PQR 的每一条边长。取 $Q \to P$ 时的极限（limit），弦（chord）PQ 便变成切线（tangent）。对于这条螺线，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 是 r 的常数倍，所以 $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ 处处相同，而弧长（arc length）的被积函数（integrand）只是一个指数函数。

解答

曲线与半径之间的夹角

点 R 位于直线 OP（的延长线）上，而 $\angle ORQ$ 是直角。在直角三角形 ORQ 中，斜边（hypotenuse）是 $OQ = r + \delta r$，O 处的角是 $\delta\theta$，所以

$$QR = (r + \delta r)\sin\delta\theta, \qquad OR = (r + \delta r)\cos\delta\theta.$$

由于 $OP = r$，我们有 $PR = OR - OP = (r + \delta r)\cos\delta\theta - r$。三角形 PRQ 的直角在 R，所以

$$\tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{(r + \delta r)\sin\delta\theta}{(r + \delta r)\cos\delta\theta - r}.$$

当 $\delta\theta$ 很小时，我们有 $\sin\delta\theta = \delta\theta + O(\delta\theta^3)$ 和 $\cos\delta\theta = 1 + O(\delta\theta^2)$，所以

$$\tan\angle QPR = \frac{r\,\delta\theta + \delta r\,\delta\theta + \cdots}{\delta r + O(\delta\theta^2)} = \frac{r\dfrac{\delta\theta}{\delta r} + \delta\theta + \cdots}{1 + O\left(\dfrac{\delta\theta^2}{\delta r}\right)},$$

其中省略号代表与已列出的项相比很小的项。当 $Q \to P$ 时，δr 和 $\delta\theta$ 都趋向 0，且 $\delta\theta/\delta r \to \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$。所以 $\delta\theta^2/\delta r = \delta\theta \cdot (\delta\theta/\delta r) \to 0$，同时 $\delta\theta \to 0$。因此

$$\tan\angle QPR \to r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

想一想 为甚么 $\angle QPR$ 的极限就是曲线与 OP 相交的角度?

角 QPR 是弦 PQ 与通过 P 的半径线之间的夹角。当 $Q \to P$ 沿曲线移动时，弦 PQ 便变成 P 处的切线。所以在极限之下，$\angle QPR$ 变成切线与 OP 之间的夹角，这正是“曲线与 OP 相交的角度”的意思。因此该角是

$$\tan^{-1}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right),$$

正如所求。

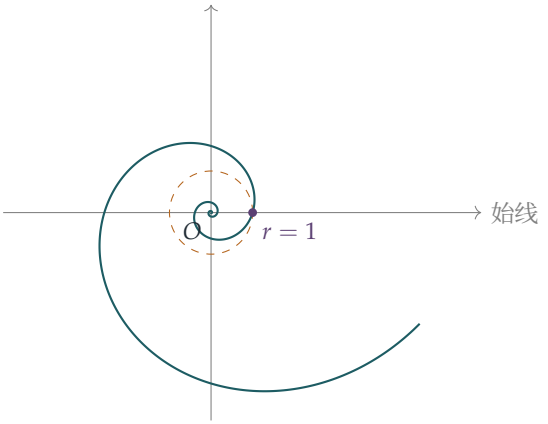
等角螺线

对于 $r = \mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cot\alpha\,\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha, \qquad \text{所以} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

因为 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，角 α 位于 $\tan^{-1}$ 的值域之内，所以 $\tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$。这个结果与 θ 无关，所以螺线在每一点都以角 α 与每条半径线相交。

草图。由于 $\cot\alpha > 0$，r 随 θ 稳定地增加。每转一整圈，r 便乘以固定的因子 $\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}$。当 $\theta \to -\infty$ 时，$r \to 0$，所以曲线绕原点无限多圈，却永远到不了原点。当 $\theta \to +\infty$ 时，它以逆时针方向向外盘旋。当 $\theta = 0$ 时，它在 $r = 1$ 处与始线（initial line）相交。草图采用 $\cot\alpha = 0.3$。



虚线圆是 $r = 1$。螺线在圆内的部分就是那无限向内卷绕的一段。

弧长

利用题目给出的公式和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = r\cot\alpha$，

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + r^2\cot^2\alpha = r^2\operatorname{cosec}^2\alpha, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha},$$

这里取正根，因为 s 随 θ 增加，而且 $\sin\alpha > 0$。

由 $r = 1$ 开始向外走的完整一圈，是从 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$。它的长度是

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1}{\cot\alpha} = \sec\alpha\left(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1\right).$$

$r \le 1$ 的部分对应 $\theta \le 0$，即 $-\infty < \theta \le 0$。它的长度是反常积分（improper integral）

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-T\cot\alpha}}{\sin\alpha\cot\alpha} = \sec\alpha,$$

因为 $\cot\alpha > 0$ 使得 $\mathrm{e}^{-T\cot\alpha} \to 0$。所以即使这部分绕原点无限多圈，它的总长度仍是有限的，就是 $\sec\alpha$。

验算

- 当 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 时，我们有 $\cot\alpha \to 0$，螺线变成单位圆，而每条半径都与它成直角相交。一圈的长度是 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1) \approx \sec\alpha\cdot 2\pi\cot\alpha = 2\pi\operatorname{cosec}\alpha \to 2\pi$，即圆周。
- 对 $\sec\alpha$ 有一个漂亮的几何验算：沿螺线由任意一点到原点的长度是 $r\sec\alpha$，这正是由该点到通过 O 且垂直于 OP 的直线的切线段长度。
- 数值上，取 $\alpha = 0.9$，把 2×10^5 条弦加起来，得出一圈的长度为 233.8349，内侧部分的长度为 1.608726。这些数值与 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1)$ 和 $\sec\alpha$ 吻合，至少准确至八位有效数字。

常见错误

- 写下 $PR = \delta r$ 和 $QR = r\,\delta\theta$ 而不解释原因。两者都只在一阶近似下成立，而极限论证正是这道题要考核的地方。
- 计算内侧部分时在 $[0, 2\pi]$ 上积分，而不是在 $(-\infty, 0]$ 上积分。$r \le 1$ 的部分包含无限多圈，而不是一圈。

STEP 之外

等角螺线 (equiangular spiral, 又称对数螺线) 是自相似 (self-similar) 的: 把它按 $e^{2\pi\cot\alpha}$ 或任何因子缩放，都会得到旋转后的同一条曲线。用复数表示，它是 $z = e^{(\cot\alpha+i)\theta}$，即一条直线在指数映射下的像，而夹角恒定这一点，源于 exp 是保角（conformal）的（即它保持角度不变)。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把这幅图像阐述得非常精彩。一条无限卷绕的曲线竟有有限的长度，这让人初次尝到大学第一门分析课程中会遇到的反常积分与收敛（convergence）问题的滋味。

详细解答

STEP II 1993，第 6 题

纯数学 · 矩阵代数的反例

> **STEP II 1993，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 7.1 节对矩阵不成立的法则中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/matrix-rules.html

关键思路

每一个断言对实数而言都是成立的，所以这道题其实是在问：普通代数里的哪些习惯，换成矩阵（matrix）之后仍然管用。有两件事会失效：矩阵乘法不一定可交换（commute），而且两个非零矩阵的乘积可以是零矩阵。只要精心挑选一对非常简单的矩阵，就能解决 (i) 和 (ii)；伴随矩阵（adjugate matrix）解决 (iii)；而一个重“根”再加上一点幂零（nilpotent）的变化，就解决 (iv)。

解答

以下一律以 $\mathbf{I}$ 表示 2×2 单位矩阵（identity matrix），以 $\mathbf{0}$ 表示零矩阵。

第 (i) 部分

错误。取

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

两者皆非零。于是

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}.$$

想一想 怎样才能找出这样的反例（counterexample），而不是单靠瞎猜？

我们想要 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{B}$ 的每一列都必须被 $\mathbf{A}$ 化为零。上面的矩阵 $\mathbf{A}$ 会把任何形如 $(0, y)^{\mathsf{T}}$ 的向量化为零，因此我们可以把 $\mathbf{B}$ 的各列都取成这个形式。然后只需检查 $\mathbf{BA}$ 会不会碰巧也等于零；采用最显而易见的选择时，它并不等于零。

第 (ii) 部分

错误。小心展开，并保持每个乘积的次序，

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2,$$

所以该断言恰好在 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 时成立。第 (i) 部分的两个矩阵不可交换，因此它们就是一个反例：在那里 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$。具体计算，

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中用到 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$。

第 (iii) 部分

正确。我们证明两个方向。

*若 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 有非零解，则 $\det \mathbf{A} = 0$。*我们证明其逆否命题（contrapositive）。假设 $\det \mathbf{A} \neq 0$。那么 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，而由 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$。所以唯一的解是零矩阵。

*若 $\det \mathbf{A} = 0$，则存在非零解。*设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

（即 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵）。乘出来，

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{X}$ 的元素就是 $\mathbf{A}$ 的元素重新排列，并改变了其中一些正负号，而 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$。证明至此完成。请留意这里用到了 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 这个假设：正是它保证伴随矩阵非零。

第 (iv) 部分

错误。对数而言，二次方程（quadratic）最多有两个根，但这个事实的证明用到“若 $pq = 0$，则 $p = 0$ 或 $q = 0$”，而第 (i) 部分刚刚说明了这一点对矩阵并不成立。因此，我们应该找

一个可以因式分解成完全平方的二次式。取 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$，两者皆非零。由于 $\mathbf{I}$ 与任何矩阵都可交换，

$$\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2,$$

所以我们需要 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$。任何满足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩阵 $\mathbf{N}$ 都可以用作 $\mathbf{X} - \mathbf{I}$，而这样的矩阵有无限多个。对每个实数 t，设

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\mathbf{X}_t^2 - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

每个 $\mathbf{X}_t$ 都非零，而不同的 t 值给出不同的矩阵。所以这个方程有无限多个解，而不是最多两个。

想一想 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 有甚么特别之处吗?

其实没有。取 $\mathbf{A} = -2\lambda\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{I}$（$\lambda \neq 0$ 为任意数），则每个 $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$（其中 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$）都是解。幂零矩阵本身就构成一个庞大的族：对所有实数 p、q，$\begin{pmatrix} pq & -p^2 \\ q^2 & -pq \end{pmatrix}$ 的平方都是 $\mathbf{0}$。关键只在于这个二次式可以分解成两个矩阵的乘积，而这样的乘积等于零的方式，远比数的情况多。

验算

亲手把每个反例乘出来：在 (i) 中，$\mathbf{AB}$ 的每个元素都是 0，而 $\mathbf{BA}$ 的左下角有一个 1。恒等式 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ 已用 1000 对随机整数矩阵测试过，而 $\mathbf{A}\operatorname{adj}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 且 $\operatorname{adj}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 亦已用 2000 个随机奇异矩阵（singular matrix）测试过。在 (iv) 中，试取 $t = 3$：$\mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\mathbf{X}_3^2 - 2\mathbf{X}_3 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$。

常见错误

- 展开 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ 时，当作 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 来处理。在 (ii) 中只写“错误”而不给出具体反例，得分甚少：题目要求的正是反例。
- 在 (iii) 中，只证明了“当且仅当”（if and only if）的其中一个方向。
- 在 (iv) 中，用求根公式或因式分解去“解”这个二次方程，然后断定 $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ 是唯一的根。因式分解本身没有问题，但 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$ 并不意味着 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$。

STEP 之外

2×2 实矩阵构成一个带有零因子的非交换环（*non-commutative ring with zero divisors*），而这道题的每一部分，都在考验一条在域（field）中成立、在这样的环中却失效的定律。第 (iii) 部分是线性代数（linear algebra）一条核心定理的 2×2 情形：一个方阵有非平凡的零空间（null space），当且仅当它的行列式（determinant）等于零。像 (iv) 中那些满足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩阵称为幂零矩阵，是若尔当标准形（Jordan normal form）的关键组成部分。线性代数方面可参考 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*，环论（ring theory）方面可参考 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*。

详细解答

STEP II 1993，第 7 题

纯数学 • 模 5 的无穷递降法

STEP II 1993，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q7

关键思路

等式右边是 5 的倍数，所以改以模（modulo）5 来考虑，方程便化为一个小规模的有限验算：平方数模 5 只可能是 0、1 或 4 $(\mathrm{mod}\ 5)$。一旦迫使 a 和 b 都是 5 的倍数，方程便迫使 c 也是 5 的倍数，而把各数全部除以 5 就得到一个更小的解。非零整数不可能无止境地被 5 整除，这正是费马（Fermat）的无穷递降法（infinite descent）。

解答

a 和 b 可被 5 整除

把模 5 的每个剩余（residue）逐一平方：

$x \pmod 5$	0	1	2	3	4
$x^2 \pmod 5$	0	1	4	4	1
$2x^2 \pmod 5$	0	2	3	3	2

所以 $b^2 \equiv 0, 1$ 或 4，而 $2a^2 \equiv 0, 2$ 或 3 $(\mathrm{mod}\ 5)$。由于 $5c^2 \equiv 0 \pmod 5$，我们需要

$$2a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

现在列出所有组合：

$2a^2 + b^2$	$b^2 \equiv 0$	$b^2 \equiv 1$	$b^2 \equiv 4$
$2a^2 \equiv 0$	**0**	1	4
$2a^2 \equiv 2$	2	3	1
$2a^2 \equiv 3$	3	4	2

表中唯一等于 0 的一格，就是 $2a^2 \equiv 0$ 且 $b^2 \equiv 0$ 的那一格。由第一个表可见，只有当 $x \equiv 0$ 时才有 $x^2 \equiv 0 \pmod 5$（换句话说，5 是质数（prime），所以 $5 \mid x^2$ 蕴含 $5 \mid x$）。因此 $a \equiv 0$ 且 $b \equiv 0 \pmod 5$：a 和 b 都可被 5 整除，这正是所要证明的。

唯一的解是 $a = b = c = 0$

设 $a = 5p$ 及 $b = 5q$，其中 p, q 为整数。代入后得

$$25(2p^2 + q^2) = 5c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 5(2p^2 + q^2).$$

所以 $5 \mid c^2$，而由于 5 是质数，故 $5 \mid c$。设 $c = 5r$。于是 $25r^2 = 5(2p^2 + q^2)$，即

$$2p^2 + q^2 = 5r^2.$$

这又是原来的方程。所以若 (a, b, c) 是一个解，则三个数都可被 5 整除，而且 $(a/5,\ b/5,\ c/5)$ 也是一个整数解。

> **想一想** 为甚么“可以一直除以 5”就迫使所有数都等于零?

重复运用这一步。从一个解 (a, b, c) 出发，经过 n 步之后，我们得到整数解 $(a/5^n,\ b/5^n,\ c/5^n)$，所以 5^n 整除 a、b 和 c 每一个，而且这对每一个 $n \geq 1$ 都成立。

然而，非零整数 m 只能被 5 整除有限次：若 $5^n \mid m$ 且 $m \neq 0$，则 $5^n \leq |m|$，而当 n 足够大时这便不成立。所以 a、b、c 没有一个可以是非零的。

同一个论证也可以写成递降的形式：假设存在 $c \neq 0$ 的解，并从中选取 $|c|$ 为正数而又尽可能小的一个。那么 $(a/5, b/5, c/5)$ 也是一个解，并且 $0 < |c/5| < |c|$，矛盾。所以 $c = 0$，于是 $2a^2 + b^2 = 0$ 迫使 $a = b = 0$，因为两项都是非负的。

因此，唯一的整数解是 $a = b = c = 0$。

验算

- 逐一检查全部 25 对剩余 $(a, b) \bmod 5$：只有 $(0, 0)$ 使得 $2a^2 + b^2 \equiv 0$。
- 以电脑搜索所有 $|a|, |b| \leq 300$，发现 $2a^2 + b^2 = 5c^2$ 除了 $a = b = c = 0$ 之外并无其他解。
- 试与 $a^2 + b^2 = 5c^2$ 比较，这个方程确实有非平凡解，例如 $(1, 2, 1)$：在这情况下 $1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$，所以第一部分的剩余论证不再成立，而这正是应有的结果。

常见错误

- 没有说明理由，就由 $5 \mid a^2$ 推断 $5 \mid a$。这个结论是对的，因为 5 是质数（或可由表得出），但必须写明。
- 忘记证明 c 同样可被 5 整除。缺少这一步，$(a/5, b/5, c/5)$ 就未必是整数解，递降也就无从开始。
- 写到“可以再除以 5”就停笔。必须说明为甚么重复整除会迫使各数为零，证明才算完整。

STEP 之外

这就是费马的*无穷递降法*，同一方法可以证明 $\sqrt{2}$ 是无理数，以及 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有非平凡解。像 $2a^2 + b^2 = 5c^2$ 这类方程，在数论中有系统的研究：勒让德（Legendre）定理以二次剩余（quadratic residue）为工具，给出 $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ 有非平凡整数解的确切条件。在本题中，障碍在于 -2 不是模 5 的平方数。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 一书涵盖同余（congruence）、二次剩余和递降法。

详细解答

STEP II 1993，第 8 题

纯数学 · 以数学归纳法证明算术几何平均不等式

> **STEP II 1993，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 3.2 节倒过来的 *AM–GM* 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/am-gm-backwards.html

关键思路

两项的不等式（inequality）其实只是说一个平方必定非负。要由 2^m 项推到 2^{m+1} 项，可把整列数分成长度各为 2^m 的两半，对每一半使用归纳假设（induction hypothesis），然后对两个半列的平均数使用两项的不等式。这样只证明了项数是 2 的幂时的算术平均—几何平均不等式（AM–GM）；最后一部分用一个巧妙的技巧（出自柯西（Cauchy））补上缺口：用这列数本身的平均数（mean）来填充这列数，这样既不改变平均数，也不影响乘积的任何要紧之处。

解答

两项的情况

展开得

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$，而且等号恰好在 $a_1 = a_2$ 时成立。留意这个结果对任何两个正数都成立；下文我们会把它用在 a_1 和 a_2 以外的数上。

归纳法

设 $P(m)$ 为以下命题：$(*)$ 对每一列 2^m 个正数都成立。$m=1$ 的情况就是刚刚证明的两项不等式。

现在假设 $P(m)$ 成立，并取 2^{m+1} 个正数 $a_1,\dots,a_{2^{m+1}}$。记 $N=2^m$，把它们分成各有 N 项的两半，其平均数分别为

$$X=\frac{a_1+\cdots+a_N}{N},\qquad Y=\frac{a_{N+1}+\cdots+a_{2N}}{N}.$$

对每一半应用 $P(m)$，得

$$a_1\cdots a_N\le X^N\qquad\text{及}\qquad a_{N+1}\cdots a_{2N}\le Y^N.$$

这里所有的量都是正数，所以可以把这两个不等式相乘：

$$a_1\cdots a_{2N}\le X^NY^N=(XY)^N.$$

由于 X 和 Y 都是正数，两项的不等式给出 $XY\le\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$。因为 $t\mapsto t^N$ 在 $t>0$ 时是递增（increasing）的，把两边同时取 N 次方后，不等号的方向不变：

$$(XY)^N\le\left(\frac{X+Y}{2}\right)^{2N}.$$

最后，$\dfrac{X+Y}{2}=\dfrac{(a_1+\cdots+a_N)+(a_{N+1}+\cdots+a_{2N})}{2N}$ 正是全部 $2N=2^{m+1}$ 个数的平均数。把以上各个不等式合起来，得

$$a_1\cdots a_{2^{m+1}}\le\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

这就是 $P(m+1)$。根据归纳法（induction），$(*)$ 对所有正整数 m 都成立。

> **想一想** 像这样把两个不等式相乘，是否合理?

若 $0<p\le q$ 且 $0<r\le s$，则 $pr\le qr\le qs$，当中先后用到 r 和 q 是正数。没有正数这个条件，结论便可能不成立（例如 $-3\le1$ 及 $-3\le1$，但 $9>1$），这就是条件 $a_i>0$ 如此重要的原因。

填充至 2 的幂

题目印出的定义是 $b_1=a_2$，这必定是 $b_1=a_1$ 的误印：我们取 $b_i=a_i$（$1\le i\le n$）及 $b_i=A$（$n<i\le2^m$）。每个 b_i 都是正数（因为 A 是若干正数的平均数）。它们的和是

$$b_1+\cdots+b_{2^m}=(a_1+\cdots+a_n)+(2^m-n)A=nA+(2^m-n)A=2^mA,$$

所以各 b_i 的平均数恰好是 A。它们的乘积是 $a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n}$。因此对各 b_i 应用 $(*)$，便得

$$a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n} \le A^{2^m},$$

这正是所要证明的。

算术平均—几何平均不等式

给定任何正整数 n，选取 m 使得 $2^m > n$（由于 $2^m \to \infty$，这是办得到的），于是上一步适用。两边除以正数 A^{2^m-n}，得

$$a_1 \cdots a_n \le A^n.$$

两边都是正数，而 $t \mapsto t^{1/n}$ 在 $t > 0$ 上递增，所以取 n 次方根，得

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

这就是算术平均—几何平均不等式。（假如 n 刚好是 2 的幂，我们也可以直接引用 $(*)$，但选取 $2^m > n$ 便毋须另外分情况处理。）

验算

试取 $n = 3$，$a = (1,2,6)$：$A = 3$，而取 $m = 2$ 时，填充后的一列数是 $(1,2,6,3)$，其平均数是 3，乘积是 $36 \le 3^4 = 81$；除以 3 得 $12 \le 27 = A^3$，所以 $\sqrt[3]{12} \approx 2.29 \le 3$。此外，当所有 a_i 都相等时，所用到的每个不等式都变成等式，这与预期相符。用电脑以精确的有理数运算，对数千列随机数检验 $m \le 6$ 时的 $(*)$ 以及 $n \le 40$ 时的最终不等式，并没有发现任何反例。

常见错误

- 把归纳假设一次过用在全部 2^{m+1} 项上：归纳假设只涵盖长度为 2^m 的数列，所以必须分成两半。
- 忘记检查填充后的一列数的平均数仍然是 A；这正是用 A 而不用其他数来填充的全部意义所在。
- 取 n 次方根或作除法时，没有指出有关的量都是正数。

STEP 之外

这种“向前—向后”归纳法就是柯西对算术平均—几何平均不等式的证明：先对 2 的幂证明，再回头降到每一个 n。算术平均—几何平均不等式也是琴生不等式（Jensen's inequality）

应用于凹函数（concave function）ln 时的特殊情况，而一整族的幂平均（power-mean）不等式、赫尔德（Hölder）不等式和闵可夫斯基（Minkowski）不等式，都是由同样的想法发展出来的；这些都是大学一年级分析学（analysis）的基本工具。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）从一开始就运用这类不等式，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则提供更多 STEP 风格的练习。

详细解答

STEP II 1993，第 9 题

纯数学 · 复数的辐角

STEP II 1993，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q9

关键思路

按照 $0 \le \arg z < 2\pi$ 的约定，“虚部（imaginary part）为正”即是“辐角（argument）严格介乎 0 与 π 之间”。复数（complex number）相加就是向量（vector）相加，而若干个全部指向同一个开半平面（open half-plane）的向量，其和仍然留在该半平面内；只要旋转一下，使 z_1 或 z_3 落在实轴上，题目的不等式就正正是这个事实。至于最后一部分，积的辐角等于各辐角之和（可相差 2π 的倍数），而刚证明的不等式把两者之差严格困在 0 与 2π 之间。

解答

虚部为正

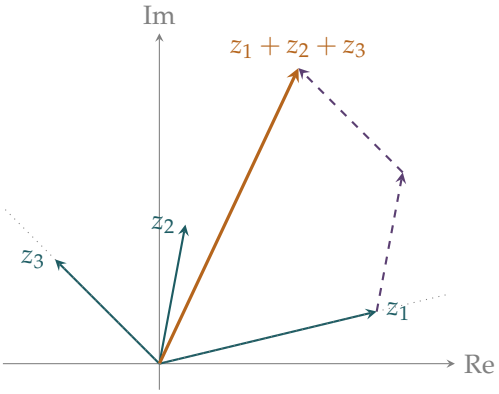
设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r > 0$ 且 $0 \le \theta < 2\pi$。那么 $\operatorname{Im} z = r\sin\theta > 0$ 当且仅当 $\sin\theta > 0$，而在 $[0, 2\pi)$ 上，这当且仅当

$$0 < \arg z < \pi.$$

所以 z 位于上半平面（upper half-plane），而它的辐角永不等于 0 或 π（否则 z 便是实数）。

图示

设 $\theta_k = \arg z_k$，于是 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$。把 z_1、z_2、z_3 画成由原点出发的箭嘴；然后把它们首尾相接，便到达 $z_1 + z_2 + z_3$。



路径的每一步相对于前一步都是逆时针转向（因为 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$），而且每一步都指向上半平面。路径起初沿着角度为 θ_1 的射线前进，然后向它的左方弯曲，所以终点严格位于该射线的逆时针方向；从另一端回望，路径的最后一步角度为 θ_3，而在此之前的一切都位于角度为 θ_3 的射线的顺时针方向。所以和位于角度为 θ_1 与 θ_3 的两条射线之间的楔形区域内。

要把这个想法严格写出来，可乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$，即把所有东西顺时针旋转 θ_1：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}(z_1+z_2+z_3) = r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} + r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\theta_1)},$$

其中 $r_k = |z_k| > 0$。第一项是正实数，其余两项的角度都在 $(0,\pi)$ 内，所以虚部为正。因此右边的虚部为正，它的辐角 α 满足 $0 < \alpha < \pi$。于是 $\theta_1 + \alpha$ 是 $z_1+z_2+z_3$ 的一个辐角，而由于 $\theta_1 < \theta_1 + \alpha < \theta_1 + \pi < 2\pi$，这正是落在 $[0,2\pi)$ 范围内的那个辐角。所以 $\arg(z_1+z_2+z_3) > \theta_1$。

同样地，乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_3}$ 得 $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_3)} + r_3$，其中首两个角度都在 $(-\pi,0)$ 内，所以这个数的虚部为负，可以写成 $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$，其中 $0 < \beta < \pi$。于是 $z_1+z_2+z_3 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\beta)}$，其中 $-\pi < \theta_3 - \beta < \theta_3 < \pi$。和的虚部为正，所以它的辐角在 $(0,\pi)$ 内，并且与 $\theta_3 - \beta$ 相差 2π 的倍数；由于两个数都在长度为 2π 的区间 $(-\pi,\pi)$ 内，它们必定相等。所以 $\arg(z_1+z_2+z_3) = \theta_3 - \beta < \theta_3$，综合起来就是

$$\arg z_1 < \arg(z_1+z_2+z_3) < \arg z_3.$$

积与和

设 $\varphi = \arg(z_1+z_2+z_3)$，由上一部分可知 $\theta_1 < \varphi < \theta_3$。复数相乘时辐角相加，所以

$$z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)},$$

而 $\arg(z_1z_2z_3)$ 就是 $[0,2\pi)$ 内与 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ 相差 2π 的倍数的那个数。

想一想 和 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ 可以是 $(0,3\pi)$ 内的任何数，所以我们不知道应该减去 2π 的哪一个倍数。怎样才可以避开这个问题，根本不必知道?

我们不必知道：只需要知道，假如 $\arg(z_1z_2z_3)=\varphi$，那么

$$D=\theta_1+\theta_2+\theta_3-\varphi$$

是 2π 的倍数。现在利用 $\theta_1<\varphi<\theta_3$ 来估计 D 的上下界：

$$D>\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_3=\theta_1+\theta_2>0,$$
$$D<\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_1=\theta_2+\theta_3<2\pi,$$

第一行用到 $\theta_k>0$，第二行用到 $\theta_k<\pi$。所以 $0<D<2\pi$，而严格介乎 0 与 2π 之间并没有 2π 的倍数。因此 $\arg(z_1z_2z_3)$ 永不等于 $\arg(z_1+z_2+z_3)$。

验算

以图中的例子 $z_1=2.5+0.6\mathrm{i}$、$z_2=0.3+1.6\mathrm{i}$、$z_3=-1.2+1.2\mathrm{i}$ 来说，三个辐角约为 0.236、1.385 和 2.356，而 $\arg(z_1+z_2+z_3)=\arg(1.6+3.4\mathrm{i})\approx1.131$，确实介乎第一个与最后一个之间。以 200 000 组随机选取的三个复数（模（modulus）介乎 e^{-4} 与 e^{4} 之间）作测试，两条不等式和 $0<D<2\pi$ 每一次都成立，而积与和从未指向同一方向。

要明白上半平面这个条件为何重要，可试试 $z_1=z_2=z_3=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$，即把大小次序放宽至容许相等：积是 1，而和指向 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 的方向，与 $D=4\pi/3$ 吻合。若让三个角度都趋近 π，D 就会被推向 2π，可见 $\theta_k<\pi$ 这个上界确实发挥了作用。

常见错误

- 直接写 $\arg(z_1z_2z_3)=\theta_1+\theta_2+\theta_3$：只要这个和等于或大于 2π，这就是错的。我们只能说两者在模 2π 的意义下相等。
- 声称 $\arg(z_1+z_2+z_3)$ 是各个 θ_k 的某种平均值。事实并非如此（模的大小有影响）；真正成立的只是它严格介乎 θ_1 与 θ_3 之间。

STEP 之外

第一个事实其实是说，开半平面（事实上任何角度小于 π 的楔形区域）是一个凸锥（*convex cone*）：其中的向量的正系数组合仍然留在其中。凸锥在线性规划（linear programming）和最优化（optimisation）中占有核心地位；而最后一部分要设法绕过的 arg 的多值性（multivaluedness），在复分析（complex analysis）的入门课程中会引出支割线（branch

cut）和复对数（complex logarithm）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以优美的几何方式阐述了这两个概念。

详细解答

STEP II 1993，第 10 题

纯数学 · 二次型与圆锥曲线

STEP II 1993，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q10

关键思路

一条关于 x 和 y 的二次方程之所以繁复，原因有二：一是 xy 交叉项（cross term），二是一次项。矩阵 $\mathbf{P}$ 处理前者，因为 $\mathbf{PAP}$ 是对角矩阵（diagonal matrix）。平移向量 $\mathbf{a}$ 处理后者：我们选取它，把原点移到圆锥曲线（conic）的中心，使所有关于 $\mathbf{x}_1$ 的一次项互相抵消。余下的就是纯粹的“平方和 = 常数”。

解答

对角化

首先，

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{PAP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix},$$

这是对角矩阵，正如所求。另外留意 $\mathbf{P}$ 是对称（symmetric）矩阵，所以 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$。这一点稍后便会用到。

代入

设 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}$。则 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}$，而且

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a}.\end{aligned}$$

中间两项相等，因为它们各自都是 1×1 矩阵，所以等于自身的转置（transpose），而 $(\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{a})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1$，这里用到 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{P}$ 都是对称矩阵。此外 $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$。于是方程变成

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \left(2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{P}\mathbf{x}_1 + \left(\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11\right) = 0.$$

想一想 “一个合适的向量 $\mathbf{a}$”需要做到甚么？

目标方程 $3x_1^2 - y_1^2 = c$ 没有只含 x_1 或 y_1 的一次项，所以中间的括号必须为零。由于 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵，$2\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (2\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\mathrm{T}}$，所以我们需要

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b} = \begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}.$$

这里 $\det\mathbf{A} = -11 - 64 = -75 \neq 0$，所以恰好有一个解：

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix}11 & -8\\-8 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix} = -\frac{1}{75}\begin{pmatrix}-75\\75\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

（验算：$\mathbf{A}\mathbf{a} = \begin{pmatrix}-1-8\\8-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-3\end{pmatrix}$。）

常数项

取这个 $\mathbf{a}$，便有 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{b}\right) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}$，所以常数项是

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} - 11 = \tfrac{1}{2}(18-6) - 11 = -5.$$

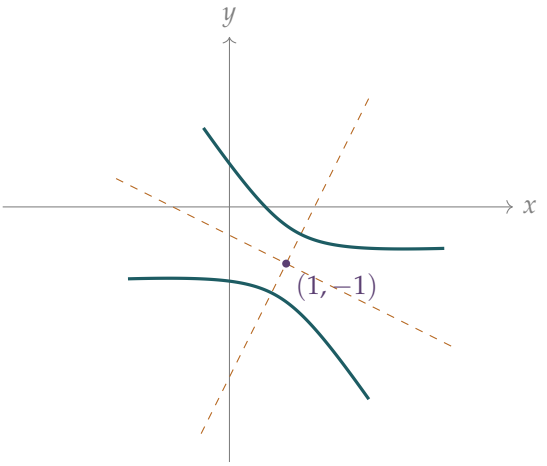
二次项是

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}75 & 0\\0 & -25\end{pmatrix}\mathbf{x}_1 = 75x_1^2 - 25y_1^2.$$

所以方程变成 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5 = 0$。两边除以 25，得

$$3x_1^2 - y_1^2 = \tfrac{1}{5}, \qquad \text{所以} c = \tfrac{1}{5}.$$

把代换逐项写出来，就是 $x = x_1 + 2y_1 + 1$，$y = 2x_1 - y_1 - 1$。原方程是 $-x^2 + 16xy + 11y^2 + 18x + 6y - 11 = 0$，所以这条曲线是一条双曲线（hyperbola），中心在 $(1,-1)$。$\mathbf{P}$ 的两个列向量 $(1,2)$ 和 $(2,-1)$ 互相垂直，所以它们给出双曲线的对称轴。



虚线是对称轴，方向分别为 $(1,2)$ 和 $(2,-1)$。

想一想 为甚么 $\mathbf{P}$ 不是旋转（rotation）?

它的两个列向量互相垂直，但长度各为 $\sqrt{5}$，所以 $\mathbf{P}^2 = 5\mathbf{I}$，而不是 $\mathbf{I}$。这就是 $\mathbf{PAP}$ 的对角元素是 75 和 -25 的原因：它们是 $\mathbf{A}$ 的特征值（eigenvalue）15 和 -5 的 5 倍。这个比例因子在这里无关重要，因为它只是把二次部分乘以 5。

验算

- $\mathbf{A}$ 的迹（trace）和行列式（determinant）分别是 10 和 -75，所以它的特征值是 15 和 -5。这与 $75/5$ 和 $-25/5$ 吻合。
- 取 $x_1 = y_1 = 0$。则 $(x,y) = (1,-1)$，原方程左方为 $-1-16+11+18-6-11 = -5$，与 $75x_1^2 - 25y_1^2 - 5$ 一致。
- 取 $x_1 = 1$，$y_1 = 1$。则 $(x,y) = (4,0)$，而 $-16+72-11 = 45 = 75-25-5$。

我们亦在 1000 个随机有理点上，精确地验证了恒等式 左方 $= 25\left(3x_1^2 - y_1^2 - \frac{1}{5}\right)$。

常见错误

- 忘记交叉项 $\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{PA}\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{AP}\mathbf{x}_1$ 相等，因而漏掉因子 2，得出 $\mathbf{Aa} = -\mathbf{b}$。
- 停在 $75x_1^2 - 25y_1^2 = 5$ 便答 $c = 5$，没有把全式除到题目要求的形式。

STEP 之外

这是主轴定理（principal axes theorem）的缩影。每个实对称矩阵都可以用一个正交矩阵（orthogonal matrix）对角化（这里是 $\mathbf{P}/\sqrt{5}$）。所以每条圆锥曲线，以及三维空间中的每个二次曲面（quadric surface），都可以通过一次旋转（或反射）和一次平移化为标准形式。同样的想法亦可藉黑塞矩阵（Hessian matrix）为多元函数的驻点（stationary point）分类。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教科书）有一章讲对称矩阵和正定性（positive definiteness），写得很好。

详细解答

STEP II 1993，第 11 题

力学 · 有二次阻力的运动

STEP II 1993，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

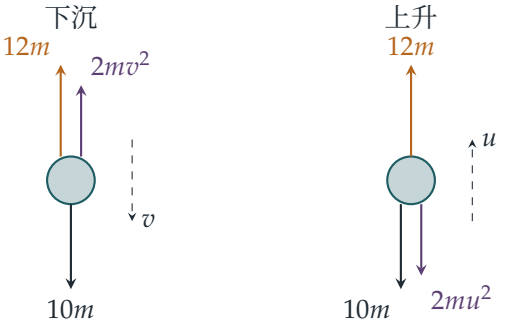
step.maths.org/questions/93-s2-q11

关键思路

物体一旦进入液体,浮力(buoyancy)便大于重力,因此除了与 v^2 成正比的阻力(resistance)之外，还有一个恒定的向上净力。阻力永远与运动方向相反，所以物体掉头时阻力的方向亦随之反转，下沉和上升两个阶段须各自列出运动方程（equation of motion）。两条方程都可以干净利落地分离变量。求时间时用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，求距离时用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$。

解答

我们把物体模拟为一个质点（particle）。在液体中，物体的重量为 $10m$ N，方向向下，而浮力为 $\frac{6}{5}\times 10m = 12m$ N，方向向上，故两者合起来是 $2m$ N 的净力，方向向上，不论物体向哪个方向运动都是如此。阻力 $2mv^2$ N 的方向则与速度相反。



下沉阶段

取向下为正，设 x 为液面以下的深度，v 为向下的速率。由牛顿第二定律（Newton's second law）得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10m - 12m - 2mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2(1+v^2).$$

设物体以速率 $V > 0$ 进入液体。分离变量（separating the variables），并由入水一刻（$t = 0$，$v = V$）积分至停止下沉的一刻（$t = T_1$，$v = 0$）：

$$\int_V^0 \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^{T_1} \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad T_1 = \tfrac{1}{2}\arctan V.$$

由于对任何有限的 V 都有 $\arctan V < \frac{\pi}{2}$，故 $T_1 < \frac{1}{4}\pi$：无论物体入水时有多快，它都会在入水后不足 $\frac{1}{4}\pi$ 秒内停止下沉。（此外，整个过程中 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \le -2$，所以它必定会停下来。）

$V = 1$ 时到达的深度

此时 $T_1 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{\pi}{8}$。要求深度，可把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$：

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -2(1+v^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_1^0 \frac{v\,\mathrm{d}v}{1+v^2} = -2\int_0^D \mathrm{d}x,$$

所以 $-\frac{1}{2}\ln 2 = -2D$，最大深度为

$$D = \tfrac{1}{4}\ln 2 \text{ 米},$$

正如题目所求。

上升阶段

在深度 D 处，物体瞬时静止，但 $2m$ N 的向上净力依然存在，所以物体开始上升。这时阻力的方向向下。取向上为正，设 y 为由最低点起计上升的高度，u 为向上的速率：

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 12m - 10m - 2mu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2(1-u^2).$$

想一想 为甚么不能沿用下沉阶段的方程，只让 v 变成负数？

不论 v 的正负，$-2mv^2$ 这一项永远指向上方。物体一旦上升，阻力必须指向下方，所以方程也要改变。（若要用单一条方程，便须写成 $-2mv|v|$。）还要留意，整个上升过程中 $u < 1$：u 由 0 开始，而只有当 $u < 1$ 时才有 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} > 0$，所以 u 只能趋近终端速率（terminal speed）1 ms^{-1}。这保证了下文的 $1-u^2$ 为正数。

回到液面时的速率。利用 $u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2(1-u^2)$，由 $y = 0$，$u = 0$ 积分至 $y = D$，$u = U$：

$$\int_0^U \frac{u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = 2\int_0^D \mathrm{d}y \qquad \Longrightarrow \qquad -\tfrac{1}{2}\ln(1-U^2) = 2D = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

所以 $1-U^2=\frac{1}{2}$，物体回到液面时的速率为 $U=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ms}^{-1}$。

上升所需时间。利用 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2(1-u^2)$，并以部分分式（partial fractions）$\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+u}+\dfrac{1}{1-u}\right)$ 处理：

$$T_2=\frac{1}{2}\int_0^U\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{4}\Big[\ln\frac{1+u}{1-u}\Big]_0^U=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

最后一步是把分子和分母同乘以 $\sqrt{2}$。

总时间。物体在进入水池后

$$T_1+T_2=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\ \text{秒}$$

再次到达液面，正如题目所求。

验算

- 由于 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$，上升时间为 $T_2=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\approx 0.4407\,\mathrm{s}$，总时间 $\approx 0.3927+0.4407=0.8334\,\mathrm{s}$。
- 以数值方法逐步计算这个运动（龙格－库塔法（Runge–Kutta），阻力写成 $-2v|v|$），得出停止下沉的时间为 $0.39270\,\mathrm{s}$，深度为 $0.17329\,\mathrm{m}=\frac{1}{4}\ln 2$，回到液面的速率为 $0.70711\ \mathrm{ms}^{-1}$，回到液面的时间为 $0.83339\,\mathrm{s}$，全部吻合。
- 回到液面的速率小于入水速率，这是必然的：阻力在来回两段路程上都作负功。

常见错误

- 物体回升时仍把阻力当作向上，这样会得出 $2m+2mu^2$ 的向上净力，上升也会快得多。
- 忘记浮力大于重力，以致把净力（以向下为正）写成 $+2m$，而非 $-2m$。
- 求深度时用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，或求时间时用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，结果卡在积分上。

STEP 之外

二次阻力（quadratic drag）令运动方程变成非线性，但方程仍然是可分离变量的，这就是为何下沉时出现 arctan，而上升时出现 $\tanh^{-1}$（事实上 $T_2=\frac{1}{2}\tanh^{-1}U$）。上升时物

体趋近 $1\ \mathrm{ms}^{-1}$ 的终端速率，此时阻力与向上净力互相平衡。大学一年级的课程会有系统地处理这类模型，包括像 $\dot{u} = 2(1 - u^2)$ 这类方程的相线（phase line）图像。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）讨论取决于速度的力，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）则讨论可分离变量方程及自治方程（autonomous equations）。

详细解答

STEP II 1993，第 12 题

力学 · 摩擦力与刚体

> **STEP II 1993，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q12

关键思路

球体被卡在墙与斜面之间，所以它一旦移开，就必定与其中一方失去接触。如果它在两个接触点同时滑动，球心便保持不动，球体只是绕着球心自转。弄清楚它会向哪个方向转动，就知道每个摩擦力（friction）的方向。之后只需处理三条方程（两条分解力的方程和一条力矩方程），未知数为 N_1、N_2 和 m。至于第二部分，只要选对取力矩的点，一行就能得出答案。

解答

模型与摩擦力的方向

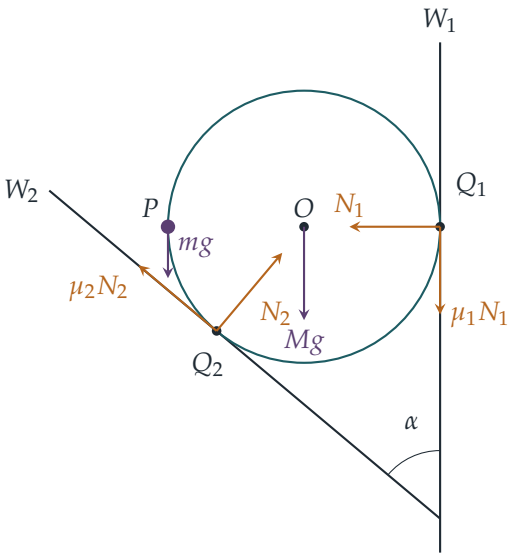
我们把球体视为均匀的刚体（rigid body）球，把质点（particle）视为固定在 P 的点质量。Q_1 和 Q_2 两处的接触面都是粗糙的。设法向反作用力（normal reaction）为 N_1（水平，指离墙壁）和 N_2（垂直于斜面，通过球心 O）。

由于 PQ_1 是水平直径，质点位于与 O 水平距离为 r 之处，在远离墙壁的一侧。因此它的重量对 O 的力矩（moment）为 mgr，使球体朝 P 下降的方向转动，而接触点上的力必须与之平衡。

> ? **想一想** 每个接触点上的摩擦力朝哪个方向?

如果球体在两点都滑动，它仍与两个面保持接触，所以 O 固定不动，球体绕 O 朝 P 下降的方向转动。于是与 P 相对的点 Q_1 沿墙壁向上移动，而 Q_2 则沿斜面向下移向墙角。摩擦力阻碍滑动，所以在 Q_1 处沿墙壁向下，在 Q_2 处沿斜面向上。由于两点都即将滑动，两处的摩擦力都达到极限（limiting）：$F_1 = \mu_1 N_1$ 和 $F_2 = \mu_2 N_2$。两个摩擦力对 O 的力

矩都与质点的力矩相反，这正是应有的情况。



两个接触点同时滑动

斜面与铅垂线成角 α，所以它的法线与水平线成角 α。于是 N_2 的分量为指向墙壁的 $N_2\cos\alpha$ 和向上的 $N_2\sin\alpha$，而沿斜面向上的摩擦力 $\mu_2 N_2$ 的分量为指离墙壁的 $\mu_2 N_2\sin\alpha$ 和向上的 $\mu_2 N_2\cos\alpha$。

沿水平方向分解：

$$N_1 = N_2\cos\alpha - \mu_2 N_2\sin\alpha = N_2(\cos\alpha - \mu_2\sin\alpha). \tag{1}$$

沿铅垂方向分解：

$$N_2\sin\alpha + \mu_2 N_2\cos\alpha - \mu_1 N_1 = (M+m)g. \tag{2}$$

对 O 取力矩：两个法向反作用力都通过 O，Mg 也是。两个摩擦力沿切线作用，与 O 的距离为 r。所以

$$mgr = \mu_1 N_1 r + \mu_2 N_2 r \quad\Longrightarrow\quad mg = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2. \tag{3}$$

把 (1) 代入 (3) 和 (2)：

$$mg = N_2\big(\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha\big),$$
$$(M+m)g = N_2\big(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - \mu_1\cos\alpha + \mu_1\mu_2\sin\alpha\big).$$

从第二式减去第一式，得

$$\begin{aligned} Mg &= N_2\big(\sin\alpha + \mu_2\cos\alpha - 2\mu_1\cos\alpha + 2\mu_1\mu_2\sin\alpha - \mu_2\big) \\ &= N_2\big((2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2\big). \end{aligned}$$

把 mg 的方程除以这条方程，N_2 和 g 便会约去：

$$m = \frac{\mu_2 + \mu_1\cos\alpha - \mu_1\mu_2\sin\alpha}{(2\mu_1\mu_2+1)\sin\alpha + (\mu_2 - 2\mu_1)\cos\alpha - \mu_2}\,M,$$

这正是所要求的结果。

要令这个结果在物理上有意义，我们需要 $N_1 > 0$，由 (1) 可知这即是 $\mu_2 < \cot\alpha$。如果 μ_2 比这个值大，Q_2 处的摩擦力会把球体拉离墙壁，那就是最后一部分的情况。

绕 Q_2 滚动

现在球体在 Q_2 处不滑动，而是即将绕 Q_2 转动（沿斜面向上滚动），所以球心会远离墙壁，Q_1 处的接触即将消失。在即将滚动的一刻，$N_1 = 0$，因此 Q_1 处的摩擦力也是零。

> ? **想一想** Q_2 处的摩擦力现在是未知的，我们该怎样处理?

我们对 Q_2 取力矩，这样 Q_2 处的反作用力和摩擦力都会消失，只剩下两个重量。从 Q_2 起量度水平距离。由于 OQ_2 垂直于斜面，它与水平线成角 α，所以 O 与 Q_2 的水平距离为 $r\cos\alpha$，在靠墙的一侧。质点在 O 之外再远 r，朝远离墙壁的方向，所以它与 Q_2 的水平距离为 $r - r\cos\alpha$，在另一侧。要令力矩平衡，

$$Mg\,r\cos\alpha = mg\,r(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad m = \frac{M\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{M}{\sec\alpha - 1},$$

其中最后一步是把分子和分母同除以 $\cos\alpha$。这就是所求的结果。

验算

- 在两种情况的分界上，即 $N_1 = 0$，亦即 $\mu_2 = \cot\alpha$ 时，两个答案应该一致。把 $\mu_2 = \cos\alpha/\sin\alpha$ 代入第一条公式，不论 μ_1 是甚么，分子都变成 $\cot\alpha$，分母都变成 $(1-\cos\alpha)/\sin\alpha$。所以 $m = M\cos\alpha/(1-\cos\alpha)$，与第二个答案吻合。
- 当 $\alpha = 60^\circ$ 时，第二个答案给出 $m = M$。当 $\alpha = 60^\circ$、$\mu_1 = 0.2$、$\mu_2 = 0.3$ 和 $M = 1$ 时，第一个答案给出 $m \approx 0.561$。我们用电脑就这些数值以及 2000 个随机个案，检查过力和力矩的平衡。
- 如果两个接触面都是光滑的（$\mu_1 = \mu_2 = 0$），第一条公式给出 $m = 0$：没有任何东西能抵抗质点的力矩，一如所料。

常见错误

- 弄错摩擦力的方向。先判断球体会怎样转动，再判断每个接触点会向哪个方向滑动。

- 忘记两个反作用力都通过球心，所以它们不会出现在对 O 的力矩方程中。
- 在最后一部分仍保留墙壁的摩擦力。球体一旦即将离开墙壁，$N_1 = 0$，所以该处的摩擦力是零。

STEP 之外

这类题目涉及多个可能滑动或滚动的接触点，是带约束（constraints）的刚体力学的起点。每个接触点都给出一组不等式（$|F| \le \mu N$、$N \ge 0$），而你要找出其中哪些是以等式成立的。同样的分情况讨论也出现在机械人学（robotics）中，用来判断机械手能否抓稳物件。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对静力学（statics）和刚体的转动有细致的讲解。

详细解答

STEP II 1993，第 13 题

力学 · 简谐运动

STEP II 1993，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q13

关键思路

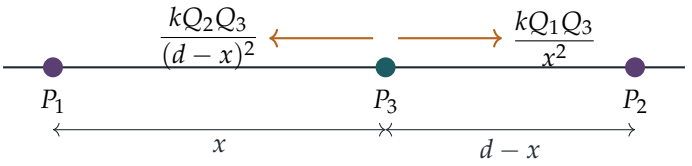
为运动中的小珠设置坐标，写出它所受的净力（net force）：两个方向相反的平方反比（inverse-square）斥力。两力互相抵销之处就是平衡位置（equilibrium position）。至于振动，令小珠偏离平衡位置一个微小的 y，对两个力都使用题目给出的近似式，常数项便会因平衡条件而互相抵销，只剩下一个与 y 成正比的回复力（restoring force）。这正是简谐运动（simple harmonic motion）的方程。

（题目说 P_3 在“P_1 与 P_3 之间”移动；这是试卷的笔误，应为“P_1 与 P_2 之间”。）

解答

模型。各小珠均视为质点（particle）；金属线光滑且水平，所以 P_3 的重量与法向反作用力（normal reaction）都垂直于金属线，对沿线的运动毫无影响。沿金属线方向的力，就只有作用于 P_3 的两个电斥力（固定的小珠已被固定在原位，所以毋须理会它们所受的力）。

由 P_1 起向 P_2 方向量度 x，于是 P_3 与 P_1 的距离为 x，与 P_2 的距离为 $d-x$，其中 $0<x<d$。



P_1 把 P_3 推向 P_2（正方向），而 P_2 则把它推回去，所以沿金属线应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$m\ddot{x} = \frac{kQ_1Q_3}{x^2} - \frac{kQ_2Q_3}{(d-x)^2}. \qquad (*)$$

平衡位置

在平衡位置 $x = a$，$(*)$ 的右边等于零。由于 k 和 Q_3 均为正数，可以两边除以 kQ_3：

$$\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{(d-a)^2} \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{d-a}{a}\right)^2 = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

a 和 $d-a$ 都是正数（小珠位于两颗固定小珠之间），所以取正平方根：

$$\frac{d-a}{a} = \frac{\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{Q_1}\,(d-a) = \sqrt{Q_2}\,a \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}},$$

这正是所要求的结果。为方便起见，记 $S = \sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}$ 及 $b = d-a$，于是

$$a = \frac{d\sqrt{Q_1}}{S}, \qquad b = \frac{d\sqrt{Q_2}}{S}.$$

留意小珠停在较接近*较弱*电荷的一边，这是合理的。

微小振动

设 $x = a+y$，其中 y 很小，于是 $d-x = b-y$ 而 $\ddot{x} = \ddot{y}$。利用题目给出的近似式（以及把 y 换成 $-y$、a 换成 b 后的同一近似式），

$$\frac{1}{(a+y)^2} \approx \frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}, \qquad \frac{1}{(b-y)^2} \approx \frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}.$$

代入 $(*)$：

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &\approx kQ_3\left[Q_1\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2y}{a^3}\right) - Q_2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2y}{b^3}\right)\right] \\ &= kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2}\right) - 2kQ_3\left(\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3}\right)y. \end{aligned}$$

> **想一想** 不含 y 的各项会怎样？

它们正好就是平衡条件，所以 $\frac{Q_1}{a^2} - \frac{Q_2}{b^2} = 0$，这些项互相抵销。在平衡位置附近展开时，这种情况必然出现：按定义，零阶的力就是零。

现在利用 a 和 b 的表达式化简 y 的系数：

$$\frac{Q_1}{a^3} = \frac{Q_1 S^3}{d^3 Q_1^{3/2}} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_1}}, \qquad \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3\sqrt{Q_2}},$$

所以

$$\frac{Q_1}{a^3} + \frac{Q_2}{b^3} = \frac{S^3}{d^3}\cdot\frac{\sqrt{Q_2}+\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1Q_2}} = \frac{S^4}{d^3\sqrt{Q_1Q_2}}.$$

因此

$$\ddot{y} \approx -\omega^2 y, \qquad \omega^2 = \frac{2kQ_3S^4}{md^3\sqrt{Q_1Q_2}} > 0.$$

这就是简谐运动的方程，所以在位移很小时，P_3 围绕 $x = a$ 作近似的简谐运动。（若在 $y = y_0$ 处由静止释放，其运动为 $y \approx y_0 \cos \omega t$。）周期（period）为

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} &= 2\pi\sqrt{\frac{md^3\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3S^4}} = \frac{2\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}} \\ &= \frac{\pi d}{S^2}\sqrt{\frac{4md\sqrt{Q_1Q_2}}{2kQ_3}} = \frac{\pi d}{(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^2}\sqrt{\frac{2md\sqrt{Q_1Q_2}}{kQ_3}}, \end{aligned}$$

这就是所要求的结果。

验算

- **对称性：**当 $Q_1 = Q_2$ 时，得 $a = d/2$，即中点，理应如此。周期公式对 Q_1 和 Q_2 是对称的，这也是应有的性质（对调两个电荷只是把整幅图反射过来）。
- **量纲（dimensions）：**kQQ'/r^2 是力，所以 $kQ_3\sqrt{Q_1Q_2}$ 的量纲是力 $\times$ 长度^2。于是 $md\sqrt{Q_1Q_2}/(kQ_3)\cdot d^2/(\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2})^4$ 的量纲为 质量 $\times$ 长度/力 $=$ 时间^2。没有问题。
- **数值：**取 $Q_1 = 4$、$Q_2 = 1$、$d = 3$ 及 $k = Q_3 = m = 1$，得 $a = 2$（验证：$4/2^2 = 1/1^2$）及 $T = 2\pi/\sqrt{3} \approx 3.628$。对多组随机选取的常数，由一个极小的位移出发以数值方法对 $(*)$ 积分，所得周期与公式吻合，误差小于 10^4 分之一。

常见错误

- 只展开两个力的其中一个：两个力都取决于 y，而且两者都对回复力有贡献（符号相同）。
- 弄错 $1/(b-y)^2$ 中 y 项的符号：在题目给出的近似式中把 y 换成 $-y$，得到的是 $+2y/b^3$。
- 在平衡条件中取负平方根，这样小珠便会落在线段 P_1P_2 之外。

STEP 之外

我们所做的就是线性化（linearisation）：在势能（potential）$V(x)$ 的稳定平衡点附近，运动近似为简谐运动，其中 $\omega^2 = V''(a)/m$。这里 $V = kQ_3\big(Q_1/x + Q_2/(d-x)\big)$，你可以验证 $V''(a)$ 给出相同的 ω^2。把这个想法推广到多个坐标，就会引出振动的简正模式（normal modes），那是大学一年级动力学的核心课题。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对平衡点附近的微小振动有清晰的讲解。

详细解答

STEP II 1993，第 14 题

力学 · 反弹与恢复系数

STEP II 1993，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q14

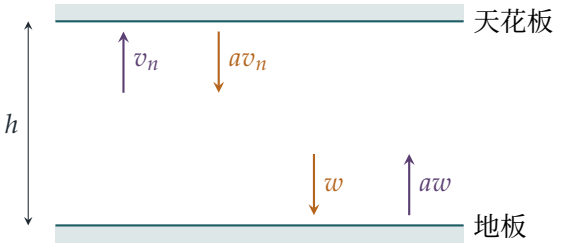
关键思路

在两次碰撞之间，球只受重力作用而自由运动，因此 $v^2 = u^2 \pm 2gh$ 把它在地板和天花板处的速率联系起来，而每次碰撞都把速率乘以 a。追踪一个完整循环（天花板、地板、再回到天花板），便得到球在天花板处的动能（kinetic energy）所满足的线性递推关系（linear recurrence），我们把它平移到不动点（fixed point）来求解。球能第 n 次到达天花板，当且仅当该能量为正数，再取对数便得出所求的上界。

解答

我们把球视为沿铅垂方向运动的质点，不计空气阻力，并取 $0 < a < 1$（上界的分母含有 $\ln a$，而且若 $a = 1$，球会永远不停地撞击天花板）。设 v_n 为球第 n 次撞击天花板前一刻的速率，并设

$$E_n = \frac{v_n^2}{2gh}, \qquad \text{于是} \qquad \tfrac{1}{2}mv_n^2 = mgh\,E_n.$$



第一次撞击天花板

球离开地板时 $u^2 = 2kgh$，并克服重力上升高度 h，所以

$$v_1^2 = 2kgh - 2gh = 2gh(k-1), \qquad E_1 = k - 1 > 0,$$

由于 $k > 1$，这是正数；因此球必定至少到达天花板一次。

一个完整循环

第 n 次撞击天花板后的一刻，球以速率 av_n 向下运动（对固定的天花板应用牛顿实验定律（Newton's experimental law））。它下落高度 h，因此以速率 w 到达地板，其中

$$w^2 = a^2 v_n^2 + 2gh.$$

它以速率 aw 向上反弹，并上升高度 h。若它能回到天花板，它在该处的速率满足

$$v_{n+1}^2 = a^2 w^2 - 2gh = a^4 v_n^2 + 2gh\,(a^2 - 1).$$

除以 $2gh$，得

$$E_{n+1} = a^4 E_n + (a^2 - 1).$$

只要右边为正数，此式便成立；若右边为零或负数，球便再也回不到天花板。

> ? **想一想** 形如 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 的递推关系应怎样求解?

先找出满足 $E = a^4 E + (a^2 - 1)$ 的常数解 E：

$$E = \frac{a^2 - 1}{1 - a^4} = \frac{a^2 - 1}{(1 - a^2)(1 + a^2)} = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

减去这个不动点便可消去常数项：设 $F_n = E_n + \dfrac{1}{1 + a^2}$，则 $F_{n+1} = a^4 F_n$。因此 $F_n = a^{4(n-1)} F_1$，而由于 $F_1 = (k-1) + \dfrac{1}{1 + a^2}$，

$$E_n = a^{4n-4}\left(k - 1 + \frac{1}{a^2 + 1}\right) - \frac{1}{a^2 + 1} = a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}.$$

乘以 mgh，可知第 n 次撞击天花板前一刻的动能为

$$mgh\left(a^{4n-4}(k-1) + \frac{a^{4n-4} - 1}{a^2 + 1}\right),$$

正如所求。

撞击天花板的次数

球只有在到达天花板时速率为正，才会第 n 次撞击天花板，即必须有 $E_n > 0$。（若球第 n 次撞击天花板，则之前每一次它也都撞击了天花板，所以上面的公式适用。）把 $E_n > 0$ 乘以 $a^2+1>0$，

$$a^{4n-4}\big((k-1)(a^2+1)+1\big) > 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a^{4n-4}\big(a^2(k-1)+k\big) > 1.$$

两边皆为正数，所以可以取对数：

$$(4n-4)\ln a + \ln\big[a^2(k-1)+k\big] > 0.$$

> **想一想** 除以 $4\ln a$ 时，不等号的方向应怎样?

由于 $0<a<1$，我们有 $\ln a<0$，所以除以 $4\ln a$ 时不等号要反转：

$$n-1 < -\frac{\ln\big[a^2(k-1)+k\big]}{4\ln a}, \qquad \text{即} \qquad n < 1 - \frac{\ln\big[a^2(k-1)+k\big]}{4\ln a}.$$

因此，若球撞击天花板 N 次，则不等式在 $n=N$ 时成立，于是

$$N < 1 - \frac{\ln[a^2(k-1)+k]}{4\ln a}.$$

特别地，撞击天花板的次数不会超过这个值，这正是我们要证明的。（事实上 E_n 随 n 递减，所以 N 恰好等于严格小于该上界的正整数的个数。）

验算

- $n=1$：公式给出 $mgh(k-1)$，与由能量守恒（energy conservation）得出的 $\frac{1}{2}m(2kgh)-mgh$ 吻合。
- n 很大时：$E_n \to -\frac{1}{1+a^2} < 0$，所以球最终确实无法再到达天花板；既然每次碰撞都损失能量，结果必然如此。
- 数值验算：取 $k=6$、$a=0.9$、$h=2\,\mathrm{m}$、$m=1\,\mathrm{kg}$ 及 $g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，逐步模拟得出在天花板处的动能依次为 98、60.57、36.02 J，与公式相符。球撞击天花板 6 次，而上界约为 6.48。

常见错误

- 忘记速率在天花板和地板两处都要乘以 a，结果每个循环得出 a^2 而非 a^4。
- 除以 $\ln a$ 时没有把不等号反转。
- 把恢复系数（restitution）用在动能而非速率上：每次碰撞时能量是乘以 a^2，而不是乘以 a。

STEP 之外

递推关系 $E_{n+1} = a^4 E_n + c$ 是一阶线性差分方程（first-order linear difference equation）。减去不动点这个技巧，正是为线性常微分方程（ODE）求特别积分（particular integral）的离散版本，它在迭代映射（iterated maps）及其稳定性的研究中会再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）对碰撞和能量损失有更一般的论述。

详细解答

STEP II 1993，第 15 题

概率与统计 · 中心极限定理

STEP II 1993，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q15

本题在 *Beyond STEP* 第 13.6 节累积起来的误差中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch13/errors-add-up.html

关键思路

总误差是许多微小而独立的误差之和，每个数各有一个。因此，先求出单独一个数的误差的平均值（mean）和方差（variance），再把所有数的结果加起来，然后利用中心极限定理（Central Limit Theorem）把总误差视为近似服从正态分布（normal distribution）。两部电脑之间的全部差别都来自平均值：一部机器的误差平均而言互相抵销，另一部的误差却全都偏向同一方。

解答

一个数的误差

设某数为 $a = m + U$，其中 $m = \lfloor a \rfloor$ 是整数，U 是它的小数部分（fractional part），且 $U \sim \mathrm{U}[0,1)$。我们把误差定义为（近似值）$-$（真实值）；正负号的约定并不影响误差的大小。

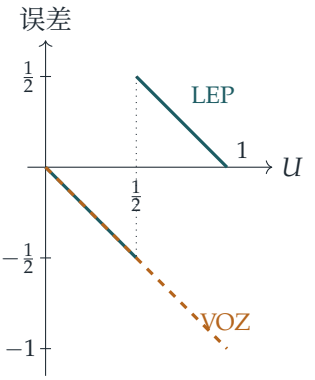
LEP（四舍五入，*rounding*）。若 $U < \frac{1}{2}$，该数会被换成 m，误差为 $-U$；若 $U \geq \frac{1}{2}$，该数会被换成 $m+1$，误差为 $1-U$。所以误差为

$$X = \begin{cases} -U, & 0 \leq U < \frac{1}{2}, \\ 1-U, & \frac{1}{2} \leq U < 1, \end{cases}$$

它以恒定的密度取 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 内的每一个值：X 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上服从均匀分布（uniform distri-

bution）（即图中的锯齿形）。

VOZ（截尾，*truncation*）。该数会被换成 m，所以误差为 $Y=-U$，在 $(-1,0]$ 上服从均匀分布。



在长度为 1 的区间上的均匀分布，不论区间位于何处，方差都是 $\frac{1}{12}$。所以

$$\mathrm{E}(X)=0,\quad \mathrm{Var}(X)=\tfrac{1}{12};\qquad \mathrm{E}(Y)=-\tfrac{1}{2},\quad \mathrm{Var}(Y)=\tfrac{1}{12}.$$

（顺带记下：$\mathrm{Var}(U)=\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$。）

把 1500 个数相加

答案的误差等于各个数的误差之和，因为电脑把近似值相加时是完全准确的。各个小数部分互相独立（independent），所以各个误差亦互相独立，它们的方差可以相加。对于 $n=1500$ 个数，

$$\mathrm{Var}(\text{总误差})=\frac{1500}{12}=125,\qquad \text{标准差}\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11.18.$$

根据中心极限定理，1500 个独立同分布（independent, identically distributed）的误差之和非常接近正态分布。

LEP。总误差 E_L 近似服从 $\mathrm{N}(0,125)$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|E_L|>15)&\approx \mathrm{P}\left(|Z|>\frac{15}{\sqrt{125}}\right)=\mathrm{P}(|Z|>1.342)\\&=2\big(1-\Phi(1.342)\big)\approx 2(1-0.9102)\approx 0.18.\end{aligned}$$

这里毋须作连续性校正（continuity correction）：这些误差是连续随机变量（continuous random variable），而不是整数。

VOZ。总误差 E_V 近似服从 $\mathrm{N}(-750,125)$。只有当 $E_V\geq -15$ 时，误差的大小才不超过 15，而这个值比平均值高出

$$\frac{-15-(-750)}{\sqrt{125}}=\frac{735}{11.18}\approx 66$$

个标准差（standard deviation）。这个概率完全可以忽略不计，所以

$$\mathrm{P}(|E_V| > 15) \approx 1.$$

截尾永远向下偏，平均每次偏 $\frac{1}{2}$，所以加了 1500 个数之后，VOZ 的答案大约相差 750。

想一想 两部机器所产生的误差方差相同。为甚么答案却相差这么远?

总误差的离散程度是一样的，大约是 ± 11，但它的中心却不一样。LEP 的误差以 0 为中心，所以总误差在 0 附近徘徊。VOZ 的误差平均值全都是 $-\frac{1}{2}$，所以偏差（bias）与 n 成正比地增长，而随机的离散程度只按 $\sqrt{n}$ 的速度增长。偏差轻易胜出。

LEP 可以做多少次加法?

假设 LEP 把 n 个数相加。它的总误差近似服从 $\mathrm{N}\left(0, \frac{n}{12}\right)$，而我们需要

$$\mathrm{P}(|E_L| < 10) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \;\geq\; 0.9 \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95.$$

由于 Φ 是递增函数，而且 $\Phi(1.6449) = 0.95$，上式即

$$\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.6449 \iff n \leq 12\left(\frac{10}{1.6449}\right)^2 \approx 443.5.$$

这个概率随 n 增加而下降，所以当 $n \leq 443$ 时它仍然不小于 0.9，到 $n = 444$ 时才首次跌破 0.9。因此 LEP 可以把 **443** 个数相加。（如果你把一次“加法”理解为使用一次 $+$ 号，那么把 443 个数相加需要用 442 次；只要说明你采用哪一种理解，两种都可以接受。）

验算

- 1.342 这个数值合理吗？总误差 15 比一个标准差（11.18）略多，而正态分布中约有 18% 的部分距离平均值超过 1.34 个标准差。这大致吻合。
- 数值检验。模拟 10^5 批、每批 1500 个四舍五入后的数，得出 $\mathrm{P}(|E_L| > 15) \approx 0.179$。按均匀分布之和的精确分布计算得 0.1797，而正态近似所得的亦是 0.1797。至于第二部分，精确概率在 $n = 443$ 时为 0.90019，在 $n = 444$ 时为 0.89981，印证了这个分界点。

常见错误

- 把 LEP 的误差当作在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上均匀分布：四舍五入可以向上或向下，所以误差是在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上均匀分布。

- 忘记 VOZ 每个数的误差平均值是 $-\frac{1}{2}$，因而得出与 LEP 相同的答案。
- 在最后一部分用了 $\Phi(z) = 0.9$ 而不是 0.95：事件 $|E| < 10$ 是双侧的，所以每边尾部各占 0.05。

STEP 之外

这是浮点运算（floating-point arithmetic）中舍入误差（rounding error）的经典分析：无偏的舍入法令累积误差按 $\sqrt{n}$ 的速度增长，而有偏的规则则令它按 n 的速度增长。这正是 IEEE 754 标准采用“逢半取偶”（round half to even）而不是逢半必进的原因。n 个均匀分布随机变量之和有一个精确的分布（Irwin–Hall 分布），观察它变成正态分布的速度有多快，是认识中心极限定理的一个好途径；Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）证明了这条定理，并对它加以讨论。

详细解答

STEP II 1993，第 16 题

概率与统计 • 泊松过程

> **STEP II 1993，第 16 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q16

关键思路

这里有两个互相独立的随机来源：巴士带来一个几何分布（geometric distribution）的等候时间，而乘客则构成一个泊松过程（Poisson process）。先对第一班巴士到站的时间取条件（condition）。一旦知道这个时间，候车人数就只是一段已知长度时间内的泊松计数。第 (iii) 部分接着运用全概率定理（law of total probability），而真正的问题是：只凭统计表和计算机，怎样把所得的无穷和计算至两位有效数字。

解答

以 8:00 之后的分钟数来量度时间。设 T 为第一班巴士到站的时间，并设 X_t 为在 $(0,t]$ 内到达的乘客人数。乘客过程是速率为每分钟 4 人的泊松过程，所以 $X_t \sim \mathrm{Po}(4t)$。巴士只可能在 $t = 1,2,3,\ldots$ 到站（“刚过八时”表示可能在 8:00 到站的那班巴士已经来过并开走了），而且巴士与乘客互相独立。

第 (i) 部分

第一班巴士在 8 时 n 分到站，当且仅当第 $1,2,\ldots,n-1$ 分钟都没有巴士到站，而第 n 分钟有巴士到站。这些事件互相独立，所以

$$\mathrm{P}(T = n) = \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}\tfrac{1}{4}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

因此 T 服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的几何分布。（验算一下：这些概率之和为 $\frac{1}{4}\big/\left(1-\frac{3}{4}\right) = 1$。）

第 (ii) 部分

在 8:05 候车的人，正是在 $(0,5]$ 内到达的那些人。没有人离开过，因为 8:05 之前没有巴士到站。所以我们要求的是在 $T=5$ 的条件下 X_5 的分布。

> **想一想** 知道第一班巴士在 8:05 到站，会否改变乘客人数的分布？

不会。事件 $T=5$ 只取决于巴士，而巴士与乘客互相独立。所以对 $T=5$ 取条件并不改变 X_5 的分布，即 $X_5 \sim \mathrm{Po}(4\times 5)=\mathrm{Po}(20)$。因此

$$\mathrm{P}(m \text{ 人候车} \mid T=5)=\frac{\mathrm{e}^{-20}\,20^m}{m!},\qquad m=0,1,2,\ldots$$

第 (iii) 部分

巴士未能接载所有人，当且仅当候车人数超过 25，即 $X_T \geq 26$。设 F 为这个事件。对 T 取条件，并如 (ii) 般运用独立性，

$$\mathrm{P}(F)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(T=n)\,\mathrm{P}(X_n\geq 26)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}\tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}\big(\mathrm{Po}(4n)\geq 26\big).$$

现在我们需要一个方案，把这个无穷和化为有限的工作量，而误差要远低于 0.005。我们要的是两位有效数字，而答案最后会是 0.1 这个数量级。

第 1 步：改为处理补事件，令尾项容易处理。 记 $w_n=\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}\tfrac{1}{4}$ 及 $q_n=\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 25)$。由于 $\sum w_n=1$，

$$\mathrm{P}(F)=1-\sum_{n=1}^{\infty}w_n\,q_n.$$

这个形式较好，因为当 n 很大时 q_n 极小。当 $n\geq 11$ 时，平均值 $4n\geq 44$ 远高于 25。由于 q_n 随 n 增加而递减（时间愈长，乘客愈多），

$$\sum_{n\geq 11}w_nq_n\leq q_{11}\sum_{n\geq 11}w_n=q_{11}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{10}.$$

用正态近似（normal approximation）可得 $q_{11}\approx\Phi\big((25.5-44)/\sqrt{44}\big)=\Phi(-2.79)\approx 0.003$，所以这个尾项小于 0.0002，可以略去。这样便只剩下十项。

第 2 步：最初几项。 当 $n=1$ 和 $n=2$ 时（平均值为 4 和 8），有 26 名或以上乘客的可能性极低，在远超所需的准确度之内 $q_1=q_2=1$，所以这两项的贡献是 $w_1+w_2=\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{16}$。

第 3 步：中间各项查表。 当 $n=3,4,5$ 时（平均值为 12、16、20），直接从累积泊松分布表读出 $q_n=\mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n)\leq 25)$；这类表通常涵盖至平均值 20。如果表中也列出平均值 24 和 28，则 $n=6,7$ 亦可查表。

第 4 步：较大的平均值用正态近似。 对于余下直至 10 的 n（平均值最大为 40），使用 $\mathrm{Po}(\mu) \approx \mathrm{N}(\mu, \mu)$ 并作连续性校正（continuity correction）：

$$q_n \approx \Phi\left(\frac{25.5 - 4n}{\sqrt{4n}}\right),$$

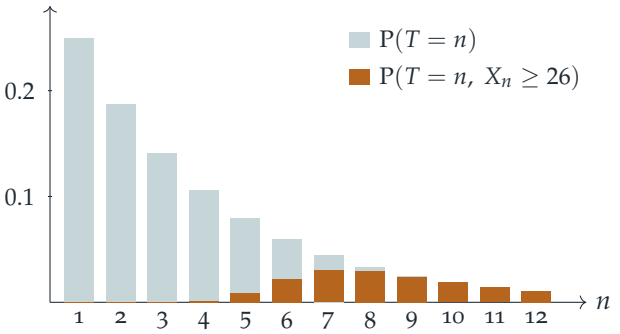
其中 Φ 的值从正态分布表读出。这些平均值已经够大，近似效果良好。更重要的是，权重 w_n 本身已经很小（$w_8 \approx 0.033$，$w_{10} \approx 0.019$），所以 q_n 即使有千分之几的误差，对 $\mathrm{P}(F)$ 的影响也小于 0.001。

第 5 步：合并。 用计算机算出 $w_1, \ldots, w_{10}$，并计算

$$\mathrm{P}(F) \approx 1 - \sum_{n=1}^{10} w_n q_n,$$

然后舍入至两位有效数字。每个被略去或作近似的部分最多约为 0.001，所以除非总和刚好非常接近舍入的分界，否则舍入是稳妥的。万一真的如此，这个方法也清楚显示应该改进哪几项。

题目并没有要求我们实际计算，但算出来的结果是 $\mathrm{P}(F) \approx 0.19$。下图显示这个概率来自何处：大部分来自第一班巴士在 8:06 至 8:10 到站的情况，这时预期的候车人数为 24 至 40，接近或超过载客量。



验算

- 在 (i) 中，各概率之和为 1，而且 $\mathrm{P}(T = 1) = \frac{1}{4}$，与预期相符。
- 在 (ii) 中，候车人数的平均值为 20，即每分钟四人、共五分钟。
- 在 (iii) 中，精确的和（由电脑计算）为 0.1904。以蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation）模拟 2×10^5 个早上，得 0.189。上述查表加正态近似的方法得 0.1912。三者舍入后都是 0.19。

常见错误

- 分界值差了一。只有当候车人数为 26 或以上时，巴士才未能接载所有人，所以我们需要的概率是 $1 - \mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n) \leq 25)$，而不是 $1 - \mathrm{P}(\mathrm{Po}(4n) \leq 24)$。
- 把候车人数当作 $\mathrm{Po}(4\,\mathrm{E}[T]) = \mathrm{Po}(16)$。等候时间是随机的，所以必须把泊松概率对 T 取平均，而不是把平均时间代入。
- 让和式保持无穷，却没有说明为何可以截断。你必须证明被略去的尾项小得不足以影响第二位有效数字。

STEP 之外

候车人数 X_T 是一个平均值本身随机的泊松计数，即泊松分布的一个混合（mixture）。由于 T 服从几何分布，X_T 的母函数（generating function）原来有一个简洁的闭合形式；而像这样的取条件论证，正是排队论（queueing theory）的基础，也是大学第一门概率课程中复合分布（compound distribution）和混合分布（mixed distribution）的基础。怎样截断一个和式并估计误差的上界，这个问题就是数值分析（numerical analysis）的起点。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）以合适的程度讲解泊松过程和母函数。

详细解答

STEP III 1993，第 1 题

纯数学 · 弧长与体积

> **STEP III 1993，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q1

关键思路

二倍角公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 可把这条参数曲线（parametric curve）直接化为直角坐标（Cartesian）形式，而 θ 的取值范围则清楚告诉我们所得的是抛物线（parabola）的哪一段。至于长度，$\sqrt{1+16x^2}$ 是采用双曲代换（hyperbolic substitution）的典型信号，因为 $1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$。只要留意到 P 的两端都落在旋转轴上，体积便只是一个普通的旋转体体积（volume of revolution）。

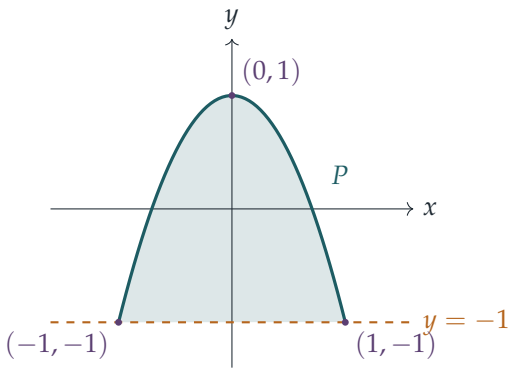
解答

曲线及其略图

由于 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 而 $x = \sin\theta$，

$$y = 1 - 2x^2.$$

因此 P 上每一点都在抛物线 $y = 1 - 2x^2$ 上。当 θ 由 $-\pi/2$ 变到 $\pi/2$ 时，$x = \sin\theta$ 由 -1 稳定地递增至 1，每个值恰好取一次。所以 P 正是该抛物线上 $-1 \le x \le 1$ 的那段弧。它由 $(-1,-1)$ 上升至顶点（vertex）$(0,1)$，再下降至 $(1,-1)$，并且对称于 y 轴。



P 的长度

以直角坐标形式计算，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x$，所以

$$\text{长度} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x,$$

这里用到被积函数（integrand）是偶函数（even function）这个事实。（若用参数形式的公式 $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\theta$，代入 $x=\sin\theta$ 后会得到同一个积分。）

想一想 哪一个代换可以令 $\sqrt{1+16x^2}$ 化简?

我们希望 $16x^2$ 成为一个 $\sinh^2$，所以设 $4x = \sinh u$。于是 $4\,\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$，而 $\sqrt{1+16x^2} = \cosh u$（取正值，因为 $\cosh u > 0$）。积分限 $x = 0, 1$ 变为 $u = 0$ 和 $u = \alpha$，其中 $\alpha = \sinh^{-1} 4$。注意 $\sinh\alpha = 4$ 及 $\cosh\alpha = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$。利用 $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$，

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\alpha \cosh u \cdot \tfrac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int_0^\alpha (1+\cosh 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[u + \tfrac{1}{2}\sinh 2u\Big]_0^\alpha = \tfrac{1}{4}(\alpha + \sinh\alpha\cosh\alpha) \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\sinh^{-1} 4 + 4\sqrt{17}\big). \end{aligned}$$

所以 P 的长度是 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4$，正如题目所求。

体积

P 的两端都在直线 $y=-1$ 上，所以当 P 绕这条直线旋转时，会扫出一个封闭曲面。它所包围的立体，正是把 P 与 $y=-1$ 之间的阴影区域旋转所得的立体。在位置 x 处的切片是一个圆盘，其半径为

$$y - (-1) = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)\ (\geq 0 \text{ 当} |x| \leq 1).$$

因此

$$V = \pi\int_{-1}^{1} 4(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x = 8\pi\int_{0}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right)\mathrm{d}x$$
$$= 8\pi\left(1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}\right) = 8\pi\cdot\tfrac{8}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

验算

- 当 $\theta = 0$ 时得 $(0,1)$，当 $\theta = \pm\pi/2$ 时得 $(\pm1,-1)$，与 $y = 1-2x^2$ 吻合。
- 长度 $\sqrt{17}+\frac{1}{4}\sinh^{-1}4 \approx 4.6468$ 应该略大于由 $(\pm1,-1)$ 到 $(0,1)$ 的两条直线弦的总长度，即 $2\sqrt{5}\approx 4.472$。事实确是如此。用中点法则（midpoint rule）在 $[-\pi/2,\pi/2]$ 上计算 $\int\sqrt{\cos^2\theta+4\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$，同样得到 4.64678。
- 帕普斯定理（Pappus's theorem）：该区域的面积为 $\int_{-1}^{1}(2-2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$，其形心（centroid）在旋转轴上方 $\frac{4}{5}$ 处。所以 $V = 2\pi\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{3} = \frac{64\pi}{15}\approx 13.404$，这也与数值积分的结果相符。

常见错误

- 误把曲线绕 x 轴旋转，用了半径 y 而不是 $y+1$。
- 忘记了 $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u$ 中的因子 $\frac{1}{4}$，或者没有把 $\sinh 2\alpha$ 化简，未有写成 $2\sinh\alpha\cosh\alpha = 8\sqrt{17}$。

STEP 之外

弧长（arc length）让我们初次窥见曲线的微分几何（differential geometry）。如果以弧长 s 来量度曲线上的位置，速率便恒为 1，而方向随 s 转动的快慢就是**曲率**（curvature）。对抛物线 $y = 1-2x^2$ 而言，曲率在顶点处最大。像上面那样的双曲代换，在大学一年级的微积分中随处可见。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多这种风格的题目。

详细解答

STEP III 1993，第 2 题

纯数学 · 拐点与极坐标面积

STEP III 1993，第 2 题

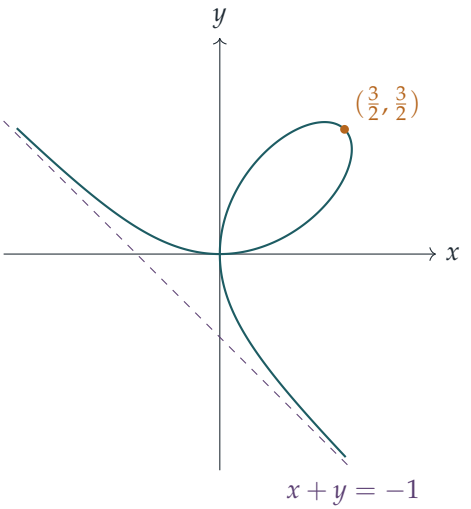
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q2

关键思路

在拐点（point of inflection）处，二阶导数必须为零（并且变号），所以 (i) 的计划是用隐函数微分法（implicit differentiation）求出 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，再看它何时可以为零。代数运算看似繁重，但曲线本身的方程会把分子化简成非常简洁的式子。至于 (ii)，三次项与 xy 项的次数不同，所以改用极坐标（polar coordinates）后可以约去因子 r^2，而 r 就成为 θ 的显函数。

解答



草图显示了这条曲线（笛卡儿叶形线，folium of Descartes）：第一象限内有一个环圈，第

二和第四象限内各有一条分支趋近渐近线（asymptote）$x+y=-1$。

第 (i) 部分

把 $x^3+y^3=3xy$ 对 x 作隐函数微分，

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{N}{D},\quad N=y-x^2,\ D=y^2-x,$$

只要 $D\neq 0$ 即成立。对这个商求导，并利用 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=y'-2x$ 和 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2yy'-1$，其中 $y'=N/D$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y'-2x)D-N(2yy'-1)}{D^2}=\frac{(N-2xD)-\left(2yN^2/D-N\right)}{D^2}\\&=\frac{2\left(ND-xD^2-yN^2\right)}{D^3}.\end{aligned}$$

现在把括号展开：

$$\begin{aligned}ND&=x^3+y^3-x^2y^2-xy,\\xD^2&=xy^4-2x^2y^2+x^3,\\yN^2&=y^3-2x^2y^2+x^4y,\end{aligned}$$

所以

$$ND-xD^2-yN^2=3x^2y^2-xy-xy^4-x^4y=-xy\left(1+x^3+y^3-3xy\right).$$

在 C 上有 $x^3+y^3-3xy=0$，所以括号内的值就是 1，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

想一想 这个式子在哪里可能为零？公式失效的那些点又如何处理？

二阶导数只有在 $x=0$ 或 $y=0$ 时才为零。在 C 上，$x=0$ 迫使 $y^3=0$，而 $y=0$ 迫使 $x^3=0$；无论哪种情况，我们都身处原点，而我们可以假设原点不是拐点。在原点和满足 $y^2=x$ 的点以外，二阶导数连续而且不为零，所以它不可能变号：这些地方没有拐点。

余下的是满足 $D=y^2-x=0$ 的点，在这些点上 y 不是 x 的可微函数。假如 N 在那里也是零，我们就有 $x=y^2$ 和 $y=x^2$，所以 $x=x^4$，得出 $(0,0)$ 或 $(1,1)$；但 $(1,1)$ 不在 C 上，因为 $1+1\neq 3$。因此在原点以外的每一个这样的点上都有 $N\neq 0$：切线是铅垂的，我们应该把 x 看成 y 的函数。C 的方程对 x 和 y 是对称的，所以把上面运算中两个字母的角色互换，便得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{-2xy}{(x^2-y)^3},$$

这个式子有定义（因为 $x^2 - y = -N \neq 0$），而且不为零（因为在原点以外 $xy \neq 0$）。所以曲线在这些点上同样不会改变弯曲的方向。

因此 C 没有拐点。

第 (ii) 部分

设 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。那么

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta,$$

而当 $r \neq 0$ 时，我们可以除以 r^2：

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时，分子和分母都非负（而且分母为正），所以 $r \geq 0$，并且恰好在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时 $r = 0$。因此当 θ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，该点绕环圈走了一周，起点和终点都是原点。面积是

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

把分子和分母同时除以 $\cos^6\theta$（当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时为正），

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1 + \tan^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

代入 $u = \tan\theta$，$\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，其中 u 由 0 变到 ∞，

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(1+u^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

这个广义积分（improper integral）收敛，因为当 $u \to \infty$ 时原函数（antiderivative）趋向 0。所以环圈的面积是 $\frac{3}{2}$。

验算

- 环圈的顶端位于 $y = x$ 之处：由 $2x^3 = 3x^2$ 得 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$，与原点的距离为 $\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$。一个长度如此、阔度约为 1 的环圈，面积应该在 1 至 2 之间，与结果吻合。
- 利用参数式（parametrisation）$x = \frac{3t}{1+t^3}$，$y = \frac{3t^2}{1+t^3}$（直线 $y = tx$ 与 C 相交于该点），我们在随机选取的点上比较了 $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$ 与由参数式求得的二阶导数，并检查了曲率（curvature）在任何一条分支上都不变号。
- 对 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 用中点法则作数值积分，以及沿参数化的环圈用鞋带公式（shoelace formula）求和，两者都得出 1.500000。

常见错误

- 把二阶导数完全展开，却始终没有留意到 $x^3 + y^3 - 3xy$ 就藏在其中；这一步化简正是全题的关键。
- 忘记了切线铅垂的那些点，在那里 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 是没有定义，而不是等于零。
- 计算面积时把 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 误写成 $\frac{1}{2}\int r\,\mathrm{d}\theta$。

STEP 之外

隐函数微分法的依据是隐函数定理（implicit function theorem）：在任何满足 $\partial F/\partial y \neq 0$ 的点附近，方程 $F(x,y)=0$ 确实把 y 定义为 x 的光滑函数。在原点，两个偏导数（partial derivative）都为零，那是一个奇点（singular point），有两条分支在该处相交，这就是它需要特别处理的原因。叶形线也是一条有理曲线（rational curve），可以用通过其二重点（double point）的直线 $y = tx$ 来参数化，这个想法通向代数几何（algebraic geometry）。至于这一切背后的分析学，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）。

详细解答

STEP III 1993，第 3 题

纯数学 · 矩阵的 LU 分解

STEP III 1993，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q3

关键思路

把 $\mathbf{M}$ 写成一个下三角矩阵（lower-triangular matrix）乘以一个上三角矩阵（upper-triangular matrix）（即 *LU 分解*（LU decomposition）），整个问题就化为一连串只含一个未知数的方程。把 $\mathbf{AB}$ 乘开，再按合理的次序逐项对照：这样每条新方程都只含一个未知数，既求出各个数值，也同时得出它们的唯一性（uniqueness）。三角矩阵的逆矩阵（inverse）亦容易求出，而 $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$ 则可拆成两个容易求解的三角方程组。

先提一个警告。试卷上印的是 $e = 1$，但这是印刷错误：正确的值是 $e = -1$。若 $e = 1$，$\mathbf{AB}$ 最底一行就会是 $(3, 10, 1)$，而不是 $(3, 8, 7)$。以下一律采用 $e = -1$。

解答

求 A 和 B

乘开后得

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & ap & aq \\ b & bp + c & bq + cr \\ d & dp + e & dq + er + f \end{pmatrix}.$$

令上式等于 $\mathbf{M}$，并按以下次序逐一处理各元素，使每条方程都只剩下一个未知数。

- 元素 $(1,1)$：$a = 1$。
- 元素 $(1,2)$、$(1,3)$：$ap = 3$ 及 $aq = 2$，所以 $p = 3$，$q = 2$（因为 $a = 1$）。
- 元素 $(2,1)$、$(3,1)$：$b = 4$，$d = 3$。
- 元素 $(2,2)$：$bp + c = 13$，所以 $c = 13 - 12 = 1$。

- 元素 $(2,3)$：$bq + cr = 5$，所以 $8 + r = 5$，得 $r = -3$（用到 $c = 1$）。
- 元素 $(3,2)$：$dp + e = 8$，所以 $9 + e = 8$，得 $e = -1$。
- 元素 $(3,3)$：$dq + er + f = 7$，所以 $6 + 3 + f = 7$，得 $f = -2$。

每个未知数都是由一条其余各量均已知的方程迫出来的，而过程中只曾除以 $a = 1$ 和 $c = 1$，两者皆不为零。因此，若 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$，各未知数就必须取这些值。反过来，这些值确实满足全部九条方程。所以解存在而且唯一：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a = 1$，$b = 4$，$c = 1$，$d = 3$，$e = -1$，$f = -2$，$p = 3$，$q = 2$，$r = -3$。

想一想 唯一性从何而来？我们只是找到了一个解而已。

唯一性来自推导的次序。整个过程中没有任何一步需要作出选择。每条方程都是关于单一个新未知数的线性方程，而且系数不为零，所以恰好只有一个解。因此，任何符合题目所给形式并满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$ 的 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$，都必定是上面那一对。（$\mathbf{B}$ 对角线上的 1 十分重要：没有它们，我们就可以把 $\mathbf{A}$ 放大、同时把 $\mathbf{B}$ 缩小。）

逆矩阵

要求 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，我们由上而下解 $\mathbf{Au} = \mathbf{v}$：

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - 4u_1 = -4v_1 + v_2, \\ -2u_3 &= v_3 - 3u_1 + u_2 = -7v_1 + v_2 + v_3 \implies u_3 = \tfrac{1}{2}(7v_1 - v_2 - v_3). \end{aligned}$$

要求 $\mathbf{B}$ 的逆矩阵，我们由下而上解 $\mathbf{Bw} = \mathbf{u}$：

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3, \\ w_2 &= u_2 + 3w_3 = u_2 + 3u_3, \\ w_1 &= u_1 - 3w_2 - 2w_3 = u_1 - 3u_2 - 11u_3. \end{aligned}$$

读出各系数，得

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

乘开即可确认 $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$。留意下（上）三角矩阵的逆矩阵仍然是下（上）三角矩阵。

联立方程

这组联立方程（simultaneous equations）就是 $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{v} = (7, 18, 25)^{\mathrm{T}}$。由于 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$，

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

注意次序：$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$。首先，

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -28 + 18 \\ \frac{1}{2}(49 - 18 - 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

然后

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 + 30 - 33 \\ -10 + 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以唯一解是

$$x = 4, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

解之所以唯一，是因为 $\mathbf{M}$ 可逆（invertible）：$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (1 \cdot 1 \cdot (-2))(1) = -2 \neq 0$。

验算

代回原式：$4 - 3 + 6 = 7$，$16 - 13 + 15 = 18$，$12 - 8 + 21 = 25$。三条方程全部成立。我们亦以精确分数验证了 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$，以及 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 确实是 $\mathbf{M}^{-1}$；它最底一行是 $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$。若采用试卷所印的 $e = 1$，乘积 $\mathbf{AB}$ 最底一行是 $(3, 10, 1)$，由此可确认那是印刷错误。

常见错误

- 相信试卷所印的 $e = 1$，然后硬要 $(3, 2)$ 和 $(3, 3)$ 两个元素吻合。务必把你求得的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 重新相乘核对。
- 用了 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ 而不是 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$。
- 只证明了这些值可行，却没有论证不可能有其他值。

STEP 之外

这就是 *LU 分解*，也是电脑实际求解线性方程组（linear systems）的方法。高斯消去法（Gaussian elimination）其实就是作出分解 $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ 的过程。分解完成后，每换一个新的

右方向量，只需做一次前向代入（forward substitution）和一次回代（back substitution），毋须重新消元。一般而言，可能要先作行交换（row swap），这样得到的是 $\mathbf{PM} = \mathbf{LU}$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 用了一整章围绕这个想法展开。

详细解答

STEP III 1993，第 4 题

纯数学 · 级数求和

STEP III 1993，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q4

关键思路

每个级数（series）其实都是我们熟悉的级数，只是换了个样子。求级数之和的惯常做法，是认出它是某个标准展开式（对数、等比级数（geometric series）或其导数（derivative））在某一点的取值，又或者把通项拆开，使各项在求和时逐项相消（telescope）。因此在每一部分，我们都要问：它可能是哪一个标准级数？要乘上甚么、怎样求导或怎样重排，才能把它化成那个形式？

解答

第 (i) 部分

奇数分母 $1,3,5,\ldots$ 令人想到只剩下奇次幂的对数级数。当 $|x|<1$ 时，

$$\ln(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\cdots,\qquad \ln(1-x)=-x-\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{3}-\cdots,$$

两式相减便消去偶次幂：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

题目的级数是 $\sum x^{2n}/(2n+1)$，其中 $x=\frac{1}{2}$。这里的幂是偶数次，所以我们除以 x（因为 $x\neq 0$，这样做是容许的）：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，此点位于收敛区间（interval of convergence）之内，$\frac{1+x}{1-x}=\frac{3/2}{1/2}=3$ 而 $\frac{1}{2x}=1$，所以

$$1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots=\ln 3.$$

第 (ii) 部分

系数以 4 为周期重复：$x^{4k}, x^{4k+1}, x^{4k+2}, x^{4k+3}$ 的系数分别是 $2,-1,0,-1$。于是我们把每四项归为一组：

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}\left(2-x-x^3\right)=\frac{2-x-x^3}{1-x^4},$$

这是公比为 x^4 的等比级数，由于 $|x^4|<1$，它是收敛的。这样分组是合理的，因为原来的级数在 $|x|<1$ 时绝对收敛（converges absolutely）：它各项的绝对值不超过 $2|x|^m$。

现在化简。分子在 $x=1$ 时等于零，所以 $1-x$ 是它的因式：

$$2-x-x^3=(1-x)(x^2+x+2),\qquad 1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2).$$

约去 $1-x$（因为 $|x|<1$，它不等于零），

$$\frac{x^2+x+2}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

代入 $x=-1$ 得 $2=2A$，所以 $A=1$。于是 $x^2+x+2-(1+x^2)=x+1=(Bx+C)(1+x)$，所以 $B=0$ 及 $C=1$。因此

$$2-x-x^3+2x^4-\cdots=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}.$$

这个结果很容易验证：$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$ 加上 $1-x^2+x^4-\cdots$，所得的系数正是 $2,-1,0,-1,2,\ldots$，符合要求。

第 (iii) 部分

把通项写成

$$\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}}=\frac{1}{2}\,r\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}.$$

想一想 我们以前在哪里见过 $\sum ry^{r-1}$?

它是等比级数的导数。当 $|y|<1$ 时，把 $\sum_{r=0}^{\infty} y^r=\frac{1}{1-y}$ 逐项求导（在收敛区间之内这样做是成立的），得

$$\sum_{r=1}^{\infty} ry^{r-1}=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

取 $y=\frac{2}{3}$，其值为 $\frac{1}{(1/3)^2}=9$。我们的和由 $r=2$ 开始，所以要减去 $r=1$ 的一项，即 1：

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}}=\frac{1}{2}(9-1)=4.$$

第 (iv) 部分

由于 $r(r^2-1)=(r-1)r(r+1)$ 是三个连续整数之积，我们尝试把它写成两个相邻的“成对”分数之差：

$$\frac{1}{(r-1)r}-\frac{1}{r(r+1)}=\frac{(r+1)-(r-1)}{(r-1)r(r+1)}=\frac{2}{r(r^2-1)}.$$

因此求和时各项逐项相消。由 $r=2$ 加至 N，除了首尾两项之外，其余各项全部抵消：

$$\sum_{r=2}^{N}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{N(N+1)}.$$

当 $N\to\infty$ 时，最后一项趋向 0，所以

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{2}.$$

验算

- (i)：首四项之和为 $1+0.0833+0.0125+0.0022\approx 1.098$，已经很接近 $\ln 3\approx 1.0986$。
- (ii)：当 $x=0$ 时，两边都等于 2。当 $x=\frac{1}{2}$ 时，闭合形式（closed form）给出 $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$，与部分和（partial sums）的数值吻合。
- (iii)：最初几项是 $\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{16}{27},\ldots$；部分和缓缓上升，趋向 4。
- (iv)：加至 $N=4$ 的部分和是 $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}=\frac{9}{20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}$，与公式吻合。

常见错误

- 在 (i) 中忘记除以 x：$\sum x^{2n+1}/(2n+1)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 的值是 $\frac{1}{2}\ln 3$，而不是 $\ln 3$。
- 在 (iii) 中由 $r=1$ 开始求和，却忘记减去原本没有的第一项，结果得出 $\frac{9}{2}$。
- 在 (iv) 中误用 $\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}$ 来相消：这样拆开的是 $\frac{2}{r^2-1}$，而不是 $\frac{2}{r(r^2-1)}$。

STEP 之外

我们刚才不假思索便做了的几步（在 (ii) 中把各项重新分组，以及在 (iii) 中把幂级数（power series）逐项求导），正是大学第一门分析（analysis）课程要严格论证的内容。幂

级数在其收敛半径（radius of convergence）之内绝对收敛，并且可以逐项求导；但若一个级数只是条件收敛（converges conditionally），重排它的各项便可能改变它的和（黎曼（Riemann）重排定理）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对这两点都有仔细的论述。

详细解答

STEP III 1993，第 5 题

纯数学 · 群与四元数

STEP III 1993，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q5

本题在 *Beyond STEP* 第 6.7 节四元数群中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/quaternions.html

关键思路

这个运算看似随意，但第一部分的四个乘积显示了它的结构：形如 $(z,0)$ 的数对相乘时与普通复数（complex number）无异，而第二个位置则像一个满足 $j^2=-1$ 的新符号 j，凡被它越过的数都会变成共轭（conjugate）。有了这四个乘积，S_1 的八个元素就只是 $(u,0)$ 和 $(0,u)$，其中 $u\in\{1,i,-1,-i\}$。因此，封闭性（closure）、逆元（inverse）和阶（order）都可由几行一般的论证得出，毋须列出有 64 项的运算表。

解答

结合律与交换律

记 $z=(z_1,z_2)$、$w=(w_1,w_2)$、$u=(u_1,u_2)$。以下会一直用到 $(ab)^*=a^*b^*$、$(a\pm b)^*=a^*\pm b^*$ 和 $a^{**}=a$。首先，

$$z\circ w=(z_1w_1-z_2w_2^*,\ z_1w_2+z_2w_1^*),$$

所以 $(z\circ w)\circ u$ 的两个分量是

$$(z_1w_1-z_2w_2^*)u_1-(z_1w_2+z_2w_1^*)u_2^*=z_1w_1u_1-z_1w_2u_2^*-z_2w_1^*u_2^*-z_2w_2^*u_1,$$
$$(z_1w_1-z_2w_2^*)u_2+(z_1w_2+z_2w_1^*)u_1^*=z_1w_1u_2+z_1w_2u_1^*+z_2w_1^*u_1^*-z_2w_2^*u_2.$$

另一方面，$w \circ u = (w_1u_1 - w_2u_2^*,\ w_1u_2 + w_2u_1^*)$，所以 $z \circ (w \circ u)$ 的两个分量是

$$z_1(w_1u_1 - w_2u_2^*) - z_2(w_1u_2 + w_2u_1^*)^* = z_1w_1u_1 - z_1w_2u_2^* - z_2w_1^*u_2^* - z_2w_2^*u_1,$$
$$z_1(w_1u_2 + w_2u_1^*) + z_2(w_1u_1 - w_2u_2^*)^* = z_1w_1u_2 + z_1w_2u_1^* + z_2w_1^*u_1^* - z_2w_2^*u_2.$$

两组右式逐项相同，所以 $\circ$ 满足结合律（associative）。

它并不满足交换律（commutative）。例如，

$$(0,1) \circ (i,0) = (0-0,\ 0+1\cdot i^*) = (0,-i), \qquad (i,0) \circ (0,1) = (0-0,\ i\cdot 1+0) = (0,i).$$

四个乘积

把零代入定义，得

$$(z,0) \circ (w,0) = (zw,\ 0), \qquad (z,0) \circ (0,w) = (0,\ zw),$$
$$(0,z) \circ (w,0) = (0,\ zw^*), \qquad (0,z) \circ (0,w) = (-zw^*,\ 0).$$

集合 S_1

设 $U = \{1, i, -1, -i\}$。那么

$$S_1 = \{(u,0) : u \in U\} \cup \{(0,u) : u \in U\},$$

其中 A, C, E, G 属第一类，B, D, F, H 属第二类。

封闭性。集合 U 在乘法、取复共轭（$i^* = -i$）和取负之下都是封闭的。根据四个乘积，S_1 中两个元素的乘积是 $(zw,0)$、$(0,zw)$、$(0,zw^*)$ 或 $(-zw^*,0)$，其中 $z, w \in U$。zw 和 $\pm zw^*$ 都属于 U，所以每个乘积都属于 S_1。

单位元（identity）。对任意 $(w_1,w_2) \in S$，

$$(1,0) \circ (w_1,w_2) = (w_1,\ w_2), \qquad (w_1,w_2) \circ (1,0) = (w_1,\ w_2\cdot 1^*) = (w_1,w_2),$$

所以 $A = (1,0)$ 是双边单位元，而且它属于 S_1。

逆元与阶。对第一类元素，$(z,0) \circ (w,0) = (zw,0)$，所以它们的表现与 U 中的复数完全一样。因此 A 的阶是 1，逆元是它本身；$E = (-1,0)$ 的阶是 2，逆元是它本身；$C = (i,0)$ 和 $G = (-i,0)$ 的阶都是 4，并且互为逆元。

想一想 第二类元素的平方是甚么？

根据四个乘积中的最后一个，对 $u \in U$，

$$(0,u) \circ (0,u) = (-uu^*,\ 0) = (-|u|^2,\ 0) = (-1,0) = E.$$

所以 B, D, F, H 的平方都是 E。由于 E 的阶是 2，这四个元素的阶都是 4。至于逆元，$(0,u)\circ(0,w)=(-uw^*,0)$ 等于 $(1,0)$，当且仅当 $w^*=-1/u=-u^*$（用到 $uu^*=1$），即 $w=-u$。再检查另一个次序，$(0,-u)\circ(0,u)=(uu^*,0)=(1,0)$ 同样成立。所以 $(0,u)$ 的逆元是 $(0,-u)$。

总结如下：

元素	A	B	C	D	E	F	G	H
逆元	A	F	G	H	E	B	C	D
阶	1	4	4	4	2	4	4	4

群（group）。至此四条公理都已齐备。S_1 在 $\circ$ 之下封闭。这个运算在整个 S 上满足结合律，在 S_1 上自然也满足。$A\in S_1$ 是单位元，而且每个元素在 S_1 中都有逆元。所以 S_1 在 $\circ$ 之下是一个群，阶为 8。它不是阿贝尔群（abelian group）：$B\circ C=H$，但 $C\circ B=D$。

子群与矩阵

利用以上的乘积，$B=(0,1)$ 的各次幂是

$$B^2=E,\qquad B^3=E\circ B=(-1,0)\circ(0,1)=(0,-1)=F,\qquad B^4=E\circ E=A.$$

所以 $\{A,B,E,F\}=\{B^0,B^1,B^2,B^3\}$ 是由 B 生成的循环子群（cyclic subgroup）。它是封闭的，因为 $B^m\circ B^n=B^{m+n}$，而指数可以模 4 化简；它也包含 A，以及每个 B^k 的逆元 B^{4-k}。所以它是一个阶为 4 的子群。

设 $M=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$。那么

$$M^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I,\qquad M^3=-M,\qquad M^4=I,$$

所以由 M 生成的群是 $\{I,M,-I,-M\}$，同样是阶为 4 的循环群。任何两个同阶的循环群都是同构（isomorphic）的。这里的映射

$$A\mapsto I,\quad B\mapsto M,\quad E\mapsto -I,\quad F\mapsto -M,$$

即 $B^k\mapsto M^k$，是一个双射（bijection），并且满足 $B^m\circ B^n=B^{m+n}\mapsto M^{m+n}=M^mM^n$。所以这两个群确实同构。

验算

▶ 元素的阶整除群的阶：1, 2, 4 这些阶全都整除 8；对于子群，2 和 4 都整除 4。

- 从复数的角度看：$(z,0)\circ(w,0)=(zw,0)$，所以 $C\circ C=(i^2,0)=E$，正好对应 $i^2=-1$。
- 用电脑作了简短的核对：以 10 000 组随机的复数对三元组验证了结合律；建立了完整的 8×8 运算表，确认了封闭性、单位元、上述的逆元和阶，以及 $B\circ C=H\neq D=C\circ B$；并确认了 $B^k\mapsto M^k$ 保持乘法。

常见错误

- 忘记取共轭：$(0,z)\circ(w,0)$ 是 $(0,zw^*)$，不是 $(0,zw)$。不可交换性正是由此而来。
- 只用一个数值例子来说明结合律成立。一个例子可以说明某条定律*不成立*，但要证明它成立，就必须作一般的展开。
- 因为一个群由复数对组成、另一个由矩阵组成，就断定两者“不同构”。同构关乎乘法的结构，而不是元素本身是甚么。

STEP 之外

这个运算就是哈密顿（Hamilton）的*四元数*（quaternion）乘法。数对 (z_1,z_2) 代表 z_1+z_2j，其中 $j^2=-1$ 而 $jz=z^*j$。群 S_1 就是*四元数群*（quaternion group）$Q_8=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$。它是每个子群都是正规子群（normal subgroup）的最小非阿贝尔群，而它与另一个阶为 8 的非阿贝尔群（正方形的对称群）的分别，在于它只有一个阶为 2 的元素。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）涵盖了低阶群和四元数。

详细解答

STEP III 1993，第 6 题

纯数学 · 阿根图上的轨迹

> **STEP III 1993，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q6

关键思路

对圆而言，$|z-k|=r$ 是最自然的描述；利用 $|u|^2=uu^*$ 把它平方，便得到一条只含 z 和 z^*、不带平方根的方程。轨迹（locus）一旦写成这种形式，像 $w=z/(z-1)$ 这样的莫比乌斯映射（Möbius map）就很容易处理：先求逆，把 z 用 w 表示，然后代入、消去分母，再与一般形式比较，读出新的圆心和半径。

解答

圆的方程

P 在圆上，当且仅当它与 K 的距离为 r，即 $|z-k|=r$。两边平方，并利用 $|u|^2=uu^*$ 及 $(z-k)^*=z^*-k^*$，

$$r^2=(z-k)(z^*-k^*)=zz^*-kz^*-k^*z+kk^*,$$

所以 $zz^*-kz^*-k^*z+kk^*-r^2=0$，正是所求。

反过来，任何形如 $ww^*-cw^*-c^*w+cc^*-s^2=0$（其中 $s>0$）的方程都表示 $|w-c|^2=s^2$，所以它是圆心为 c、半径为 s 的圆。下文会用这一点来辨认圆。

P 的轨迹

以 OA 为直径的圆，圆心为 i（即 0 与 $2i$ 的中点），半径为 1。取 $k=i$、$k^*=-i$、$kk^*=1$ 及 $r=1$，由第一部分得

$$zz^*+iz-iz^*=0. \qquad (*)$$

Q_1 的轨迹 L

留意 $z=1$ 不在圆上（它与 i 的距离是 $\sqrt{2}$），所以对每一点 P，$w_1 = z/(z-1)$ 都有定义。把 w_1 记作 w。从 $w(z-1)=z$ 解出 z，得

$$z = \frac{w}{w-1}, \qquad z^* = \frac{w^*}{w^*-1},$$

而且 $w \neq 1$，因为 $w=1$ 就要求 $z = z-1$。代入 $(*)$：

$$\frac{ww^*}{(w-1)(w^*-1)} + \frac{iw}{w-1} - \frac{iw^*}{w^*-1} = 0.$$

各项乘以 $(w-1)(w^*-1)$（它不等于零），

$$\begin{aligned} 0 &= ww^* + iw(w^*-1) - iw^*(w-1) \\ &= ww^* + iww^* - iw - iww^* + iw^* \\ &= ww^* - iw + iw^*. \end{aligned}$$

所以 L 的方程是

$$w_1 w_1^* - iw_1 + iw_1^* = 0.$$

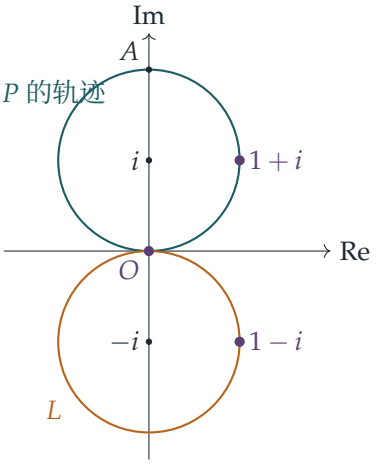
要辨认它，可与一般形式比较：我们需要 $-k^* = -i$ 及 $-k = i$，所以 $k = -i$；于是 $kk^* = 1$，而常数项 $kk^* - r^2$ 等于 0，所以 $r = 1$。因此 L 是圆心为 $-i$、半径为 1 的圆，即 $|w_1 + i| = 1$。它是 P 所在的圆对实轴（real axis）的反射，而且同样通过原点。

> **想一想** 这个圆上的每一点是否真的都能取到，还是只取到其中一部分?

以上每一步都可以逆推。若 $w \neq 1$ 在 $|w+i|=1$ 上，则 $z = w/(w-1)$ 满足 $(*)$，所以它是圆上的一点 P，并且 $w_1 = w$。唯一可能取不到的点是 $w=1$，但它不在 L 上，因为 $|1+i| = \sqrt{2}$。所以轨迹是整个圆。

Q_2 的轨迹

对 $|z-i|=1$ 取共轭（conjugate），得 $|z^*+i|=1$，因为 $|u^*| = |u|$ 而 $(z-i)^* = z^* + i$。所以 $w_2 = z^*$ 满足 $|w_2 + i| = 1$。当 z 走遍以 i 为圆心的整个圆时，z^* 走遍以 $-i$ 为圆心的整个圆。换个说法，对 $(*)$ 取共轭得 $z^*z - iz^* + iz = 0$，这正是以 $w = z^*$ 代入的 L 的方程。所以 Q_2 的轨迹也是 L。



Q_1 与 Q_2 何时重合

我们需要 $\dfrac{z}{z-1} = z^*$，即

$$z = zz^* - z^*.$$

在圆上，由 $(*)$ 得 $zz^* = iz^* - iz$。代入，

$$z = iz^* - iz - z^* \quad \Longrightarrow \quad (1+i)z = (i-1)z^*.$$

其中一个解是 $z = 0$。否则 $z^* \neq 0$，而

$$\frac{z}{z^*} = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

设 $z = \rho e^{i\theta}$，其中 $\rho > 0$，上式即 $e^{2i\theta} = i$，所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$：P 在直线 $y = x$ 上。这条直线与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$（即 $x^2 + y^2 = 2y$）相交于 $2x^2 = 2x$ 之处，即 $x = 0$ 或 $x = 1$。非零的那一点是 $z = 1 + i$。

逐一验证：$z = 0$ 给出 $w_1 = 0 = z^*$；而 $z = 1 + i$ 给出

$$w_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i = z^*.$$

所以 Q_1 与 Q_2 重合，当且仅当 P 是原点或点 $1 + i$。这正是 $y = x$ 与圆相交的两点，而 $Q_1 = Q_2$ 的共同位置是 0 和 $1 - i$。

验算

- 取一个样本点：$P = 2i$（即点 A）给出 $w_1 = \frac{2i}{2i-1} = \frac{4-2i}{5}$，而 $|w_1 + i| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$，所以它在 L 上。

- 数值上,我们在 $|z-i|=1$ 上随机取了 10^4 个点,确认 $z/(z-1)$ 和 z^* 都满足 $|w+i|=1$,误差在 10^{-9} 以内。再沿圆周扫描 2×10^5 个点，寻找满足 $\left|z/(z-1)-z^*\right|<10^{-3}$ 的点，结果只找到 $z=0$ 和 $z=1+i$。

常见错误

- 没有先把 $z=0$ 分开处理就除以 z^*，因而漏掉 $P=O$ 这个解。
- 得出 $z/z^*=i$ 便就此停笔：这只确定了 P 的方向，你还要求出该直线与圆的交点。
- 把 $ww^*-iw+iw^*=0$ 与一般形式对照时，弄错 k 的正负号。w^* 的系数是 $-k$，所以 $k=-i$，而不是 i。

STEP 之外

映射 $z\mapsto z/(z-1)$ 是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation），这类映射总是把圆和直线映到圆和直线。这里的像圆恰好是原来那个圆的镜像，所以取共轭会得出同一个轨迹。取共轭本身会把定向（orientation）反转，所以它不是莫比乌斯变换；但把它与莫比乌斯映射复合，便得到“反莫比乌斯”（anti-Möbius）映射，当中包括对圆的反射。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以优美的几何手法讲解莫比乌斯映射、反演（inversion）和保圆性质。

详细解答

STEP III 1993，第 7 题

纯数学 · 双曲函数联立方程

STEP III 1993，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q7

关键思路

把两个二倍角的 sinh 展开。第二条方程随即直接以 y 表示 $\cosh x$，再用它去除第一条方程，便可同样以 y 表示 $\sinh x$。利用恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 可把 x 完全消去，剩下一条只含 $\sinh^2 y$ 的方程。之后要做的，就是找出三次方程（cubic）中合适的那个根，并以数值方法把它准确定出。

解答

消去 x

利用 $\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u$，两条方程变成

$$2\sinh x \cosh x = \cosh y, \qquad 2\sinh y \cosh y = 2\cosh x.$$

由第二条方程得

$$\cosh x = \sinh y \cosh y.$$

由于 $\cosh x \geq 1 > 0$，我们可以把第一条方程除以 $2\cosh x$：

$$\sinh x = \frac{\cosh y}{2\sinh y \cosh y} = \frac{1}{2\sinh y},$$

其中除以 $\cosh y$ 并无问题，因为 $\cosh y > 0$；而 $\sinh y \neq 0$，因为 $\sinh y \cosh y = \cosh x \neq 0$。

现在把两者代入 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$。设 $t = \sinh^2 y$，则 $\cosh^2 y = 1 + t$：

$$t(1+t) - \frac{1}{4t} = 1.$$

两边乘以 $4t$（它不等于零），得 $4t^2 + 4t^3 - 1 = 4t$，即

$$4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

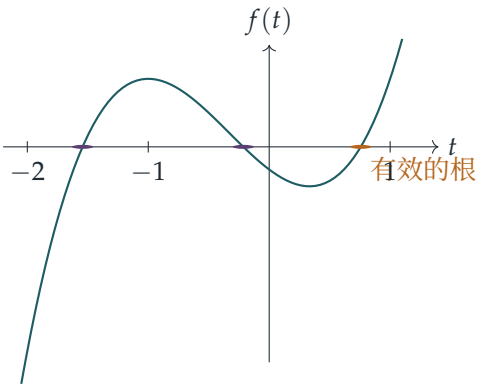
所以 $t = \sinh^2 y$ 是题目所给三次方程的一个根，正如所求。

最多只有一个有效解

设 $f(t) = 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1$。由于 $t = \sinh^2 y$ 而 $\sinh y \neq 0$，有效的根必须满足 $t > 0$。现在

$$f(-2) = -9, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 3,$$

所以根据介值定理（intermediate value theorem），这个三次方程在 $(-2, -1)$、$(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 每个区间内各有一个根。三次方程最多有三个根，所以这些就是全部的根，而且恰好只有一个根是正数。



? **想一想** 一个正的 t 给出两个值 $\sinh y = \pm\sqrt{t}$。为甚么只有一个能保留下来?

由 $\cosh x = \sinh y \cosh y$ 以及 $\cosh x > 0$、$\cosh y > 0$，可知必须有 $\sinh y > 0$。所以 $\sinh y = +\sqrt{t}$，而由于 sinh 是严格递增（strictly increasing）的，这恰好给出一个 y，且 $y > 0$。因此，这个三次方程最多给出一个有效的 y（然后 $\sinh x = 1/(2\sinh y)$ 便唯一地确定 x，因为 sinh 是一对一（one-to-one）的）。

确定 t 的位置并计算其值

我们有

$$f(0.7) = 1.372 + 1.96 - 2.8 - 1 = -0.468 < 0,$$
$$f(0.8) = 2.048 + 2.56 - 3.2 - 1 = 0.408 > 0,$$

所以根据介值定理，正根位于 0.7 与 0.8 之间。

我们使用牛顿–拉弗森迭代法（Newton–Raphson iteration）

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad f'(t) = 12t^2 + 8t - 4,$$

以中点 $t_0 = 0.75$ 为起始值。这里 $f(0.75) = -0.0625$，$f'(0.75) = 8.75$，所以

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.75 + \frac{0.0625}{8.75} = 0.7571429, \\ t_2 &= 0.7570685, \\ t_3 &= 0.75706846, \end{aligned}$$

而 t_4 与 t_3 在所示的各位数字上完全一致。为确认六位小数，我们检查正负号的变化

$$f(0.7570680) < 0 < f(0.7570690),$$

所以根位于该区间内，而

$$t = 0.757068 \text{ （准确至六位小数）}.$$

（另一个较慢但完全可行的方法：把方程重新整理为 $t^2(4t+4) = 4t+1$，即 $t = \sqrt{(4t+1)/(4t+4)}$。在根的附近，右边的导数（derivative）约为 0.16，所以这个迭代收敛（converge），每一步增加略少于一位准确的小数。）

求 y 和 x

取正平方根，$\sinh y = \sqrt{0.7570685} = 0.870097$，所以

$$y = \operatorname{arsinh}(0.870097) = \ln\bigl(0.870097 + \sqrt{1.757068}\bigr) = 0.786474,$$

并且

$$\sinh x = \frac{1}{2\sinh y} = 0.574649, \qquad x = \ln\bigl(0.574649 + \sqrt{1.330221}\bigr) = 0.546965.$$

代入原来的方程验算：

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 1.325545 = \cosh y, \\ \sinh 2y &= 2.306704 = 2\cosh x, \end{aligned}$$

所以两条方程都成立。准确至四位小数，

$$x = 0.5470, \qquad y = 0.7865.$$

验算

- 三次方程的另外两个根约为 -0.2140 和 -1.5431：两者皆为负数，正如论证所要求。三个根的乘积是 $\frac{1}{4}$，这与 $0.757068 \times 0.2140 \times 1.5431 \approx 0.250$ 吻合。
- 直接在 $y \in [-5, 5]$ 上作数值搜索，由第二条方程取 $x = \pm \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2}\sinh 2y)$ 并检验第一条方程，结果只找到一个解，位于 $y \approx 0.7865$，且 $x > 0$。
- 若取负值 $\sinh y = -\sqrt{t}$，则 $\sinh y \cosh y < 0$，这绝不可能等于 $\cosh x$：这样便可迅速确认它确实无效。

常见错误

- 过早平方（例如把原来的两条方程都平方），之后却忘记舍去不合适的正负号。
- 两个迭代值一旦在六位小数上一致便停止迭代，而没有检查舍入区间两端的正负号变化。
- 先把 t 舍入至六位小数，然后才取平方根和对数。应保留额外的位数，只在最后才把 x 和 y 舍入。

STEP 之外

这里的两种迭代收敛的速度相差甚远。不动点迭代（fixed-point iteration）$t \mapsto g(t)$ 是线性收敛的，每一步误差大约缩小至原来的 $|g'(\text{根})|$ 倍；而牛顿–拉弗森迭代法则是二次收敛（quadratic convergence）的，每一步正确的位数大约增加一倍。要把这一点说得严谨，需要用到均值定理（mean value theorem）和泰勒定理（Taylor's theorem），而这正是数值分析（numerical analysis）的起点。至于背后的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）。

详细解答

STEP III 1993，第 8 题

纯数学 · 三维空间中的平面与直线

STEP III 1993，第 8 题

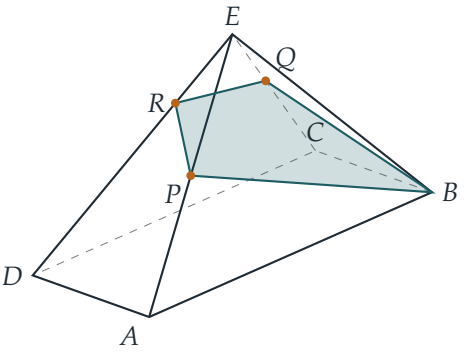
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q8

关键思路

每条斜棱都是连接底面一个顶点与 E 的线段，所以斜棱上的每一点都有简单的参数式（parametric form）。因此 P、Q 和 R 可以一下子全部写出来，而通过 B、P 和 Q 的平面可以写成一条线性方程，其系数由代入这几点而得。至于第二部分，判断平行四边形（parallelogram）最简洁的方法，是检查两条对角线是否互相平分（bisect）；只需看一个坐标，便足以说明这个条件不成立。

解答



求 γ

棱 AE 由所有形如 $(ta, 0, (1-t)a)$ 的点组成，其中 $0 \le t \le 1$，因为沿着这条棱有 $x+z=a$。同样地，CE 是 $\{(-ta, 0, (1-t)a)\}$，而 DE 是 $\{(0, -ta, (1-t)a)\}$。所以

$$P = \big(\lambda a,\, 0,\, (1-\lambda)a\big), \qquad Q = \big(-\mu a,\, 0,\, (1-\mu)a\big), \qquad R = \big(0,\, -\gamma a,\, (1-\gamma)a\big).$$

我们设平面 BPQ 的方程为

$$px + qy + rz = a.$$

B、P、Q 三点不共线（collinear），所以它们确定唯一的一个平面。只要能找到满足全部三个条件的 p, q, r，这条方程就是该平面的方程。逐点代入：

$$\begin{aligned} B:&\quad qa = a, && \text{所以} q = 1,\\ P:&\quad p\lambda + r(1-\lambda) = 1,\\ Q:&\quad -p\mu + r(1-\mu) = 1. \end{aligned}$$

要消去 p，可把 P 的方程乘以 μ，把 Q 的方程乘以 λ，然后相加：

$$r\big(\mu - \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu\big) = \lambda + \mu, \qquad \text{所以} \qquad r = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}.$$

分母是 $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$，所以这样做没有问题。（下文用不着，但顺带一提：$p = (\lambda-\mu)/(\lambda+\mu-2\lambda\mu)$。）

现在 R 位于这个平面上，所以

$$-\gamma + r(1-\gamma) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(1+r) = r-1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \frac{r-1}{r+1}.$$

把各项通分，公分母为 $\lambda+\mu-2\lambda\mu$：

$$r-1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}, \qquad r+1 = \frac{2(\lambda+\mu-\lambda\mu)}{\lambda+\mu-2\lambda\mu},$$

因此

$$\gamma = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu},$$

这正是所求。

值得留意的是 $0 < \gamma < 1$，所以 R 确实位于棱 DE 上，并且严格地在 D 与 E 之间。它为正数是显然的。至于 $\gamma < 1$，分母比分子大了 $\lambda+\mu-2\lambda\mu = \lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$。

$BPRQ$ 不是平行四边形

想一想 按给定次序排列的四个点是否构成平行四边形，最快捷的判断方法是甚么？

四边形 $BPRQ$ 是平行四边形，当且仅当它的对角线 BR 与 PQ 互相平分，即

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}.$$

（这等价于 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QR}$，即有一组对边相等且平行。）比较等式两边的 y 坐标：

$$\text{左边：}\ a-\gamma a=(1-\gamma)a, \qquad \text{右边：}\ 0+0=0.$$

两者必须相等，这就迫使 $\gamma=1$。但我们已证明 $\gamma<1$；事实上，$\gamma=1$ 会令 R 落在 E 上。所以两条对角线永远不会互相平分，$BPRQ$ 不可能是平行四边形。 ■

为求完整，补充一点：四边形的顶点确实是按 B,P,R,Q 的次序环绕排列的，因为平面依循环次序 EB,EA,ED,EC 与四条斜棱相交。即使把这几点另行配对，也无济于事。$B+P=Q+R$ 和 $B+Q=P+R$ 在 y 坐标上都需要 $a=-\gamma a$，而由于 $\gamma>0$，这是不可能的。

也可以从几何角度看出同一结论：BP 位于面 ABE 上，而 QR 位于面 CDE 上。这两个面相交于通过 E 且与 AB 平行的直线。分别位于这两个平面上的两条平行线，必定与这条公共直线平行。所以 $BP\parallel QR$ 会迫使 $BP\parallel AB$，而由于 $P\neq A$，这是不可能的。

验算

- 对称情况 $\lambda=\mu$：公式给出 $\gamma=\lambda/(2-\lambda)$。取 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$，结果是 $\frac{1}{3}$。直接计算：$p=0$，$r=2$，平面为 $y+2z=a$，它与 DE 相交于 $(0,-\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$，与预期相符。
- 极限 $\lambda,\mu\to1$：$P\to A$，$Q\to C$，平面变成底面，而 $\gamma\to1$，所以 $R\to D$，正如所料。
- 一个简洁的改写是 $\dfrac{1-\gamma}{\gamma}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}+\dfrac{1-\mu}{\mu}$，很容易用数值来检验。例如 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{2}{5}$ 给出 $\gamma=\frac{2}{7}\approx0.2857$。
- 我们随机选取了 2000 组 a,λ,μ，以分数作精确计算，核实了公式、$0<\gamma<1$ 以及关于平行四边形的结论。我们另外用独立的方法求出 R，即利用叉积（cross product）求平面的法向量（normal）。

常见错误

- 把 AE 的参数式写错：在 AE 上，坐标满足 $x+z=a$ 及 $y=0$，所以 P 的 z 坐标是 $(1-\lambda)a$，而不是 λa。
- 只在平面图上用斜率来检验 $BP\parallel QR$。这个四边形位于一个倾斜的平面上，所以应该用三维向量来处理。

► 忘记证明 $\gamma < 1$，而这正是平行四边形的论证所需要的。

STEP 之外

求平面与直线的交点，是解线性方程组（linear system）最简单的情况。由于 $EP : PA = (1-\lambda) : \lambda$，其他棱上的情况亦类似，所以结果说明

$$\frac{ER}{RD} = \frac{EP}{PA} + \frac{EQ}{QC'},$$

这是一个不依赖坐标的命题，对任何通过 B 的平面都成立。因为它只用到直线上的比，所以对每一个以平行四边形为底的棱锥（pyramid）都成立：任何这样的棱锥都可以经仿射映射（affine map）变成本题的棱锥。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对平面、法向量和线性方程组有完整而严谨的阐述。

详细解答

STEP III 1993，第 9 题

纯数学 · 平方和不等式

STEP III 1993，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q9

关键思路

这里的每一条不等式（inequality），其实都是“平方和（sum of squares）非负”这句话的变装。第 (i) 部分是最简单的情形 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$，而其后各部分的做法，是把 $(a_i - a_j)^2$ 对所有数对求和，再数清楚每个平方项和每个乘积项各出现多少次。一旦得到一般形式 (iv)，把 $(\sum a_i)^2$ 展开成平方项加交叉项（cross terms），便可推出 (v)。

全文沿用以下记号：

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad P = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

其中第二个和式遍历满足 $1 \leq i < j \leq n$ 的 $\binom{n}{2}$ 个数对。

解答

第 (i) 部分

由于实数的平方非负，

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2,$$

所以 $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$，等号成立当且仅当 $a_1 = a_2$。

第 (ii) 部分

把 (i) 分别应用于三个数对，然后相加：

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3,$$
$$a_3^2 + a_1^2 \geq 2a_3a_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

每个平方项恰好在其中两行出现，所以相加后得

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2),$$

再除以 2 便得所求结果。换一个写法，$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right] \geq 0$，等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3$。

第 (iii) 部分

现在满足 $1 \leq i < j \leq 4$ 的数对 (i, j) 共有六个。把 (i) 应用于每一个数对：

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i^2 + a_j^2) \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j.$$

在左边，a_1^2 出现了多少次？每一个含有下标 1 的数对都令它出现一次，也就是与其余三个下标各配对一次。每个 a_k^2 的情况都相同，所以左边等于 $3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$，于是

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

这正是所求。

第 (iv) 部分

(i) 至 (iii) 的规律是：左边的系数比变量的个数少一，依次为 1、2（即第 (ii) 部分乘以 2）、3。

断言。对任意 $n \geq 2$ 及实数 $a_1, \ldots, a_n$，

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \qquad \text{即} \qquad (n-1)S \geq 2P,$$

等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

? **想一想** 把 $a_i^2 + a_j^2$ 对每一个数对 $i < j$ 求和时，某个指定的 a_k^2 会出现多少次？

证明。考虑所有数对的差的平方之和：

$$D = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_i^2 + a_j^2\right) - 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j.$$

下标 k 恰好属于 $n-1$ 个数对（它与其余 $n-1$ 个下标各配对一次），所以 a_k^2 在第一个和式中出现 $n-1$ 次。因此

$$D = (n-1)S - 2P.$$

D 的每一项都是实数的平方，所以 $D \geq 0$，由此得 $(n-1)S \geq 2P$。等号成立当且仅当每个 $(a_i - a_j)^2$ 都等于零，即当且仅当所有 a_i 都相等。 ■

取 $n = 2, 3, 4$，便分别重新得到 (i)、(ii) 的两倍，以及 (iii)。

第 (v) 部分

这里需要 $n \geq 2$，使得 $n - 1 > 0$。把和的平方展开，每个平方项出现一次，而每个 $i \neq j$ 的乘积 $a_i a_j$ 出现两次（分别以 $a_i a_j$ 和 $a_j a_i$ 的形式），所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = S + 2P.$$

想一想 (iv) 给出的是 S 的界，它怎样能帮助我们得到一个只提及 P 的界?

由于 $n - 1 > 0$，可以把 (iv) 除以 $n-1$ 而不必把不等号反转，得 $S \geq \dfrac{2P}{n-1}$。把 S 的这个下界（lower bound）代入：

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= S + 2P \\ &\geq \frac{2P}{n-1} + 2P \\ &= \frac{2P + 2(n-1)P}{n-1} \\ &= \frac{2n}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j,\end{aligned}$$

这就是所求的不等式。等号成立当且仅当 (iv) 的等号成立，即所有 a_i 都相等。

留意我们从来不需要 P 为正数：整个论证只是在 $S \geq 2P/(n-1)$ 的两边同时加上 $2P$，无论 P 的正负如何，这一步都成立。

验算

- 全部相等：若每个 $a_i = c$，则 $S = nc^2$ 及 $P = \binom{n}{2}c^2 = \frac{1}{2}n(n-1)c^2$，所以 $(n-1)S = n(n-1)c^2 = 2P$，而在 (v) 中两边都等于 n^2c^2。两条不等式都取到等号，正如所料。
- 以数值检验 (iii)：取 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, -3, 5)$，得 $S = 39$ 及 $P = -7$，所以

$3S = 117 \geq -14 = 2P$；而在 (v) 中，$(\sum a_i)^2 = 25 \geq \frac{8}{3}(-7) = -\frac{56}{3}$。（另外 $S + 2P = 39 - 14 = 25$，亦正如所料。）

- 我们亦以有理数运算，在 20 000 个长度由 2 至 9 的随机数组上，以及一些非常接近等号情况的数组上，精确地检验了恒等式（identity）$D = (n-1)S - 2P$ 和两条不等式，并没有发现反例（counterexample）。

常见错误

- 数错次数：每个 a_k^2 在 $\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2)$ 中出现 $n-1$ 次，不是 n 次，也不是 $\binom{n}{2}$ 次。
- 写成 $(\sum a_i)^2 = S + P$：每个交叉项在展开式中出现两次。
- 把 (iv) 除以 $n-1$ 时没有指出 $n - 1 > 0$，或忘记说明等号成立的情况。

STEP 之外

$D = (n-1)S - 2P$ 这个量等于各数与平均值之差的平方和的 n 倍，即 $n\sum(a_i - \bar{a})^2$，所以 (iv) 其实是在说方差（variance）非负。第 (v) 部分也可以看成柯西–施瓦兹不等式（Cauchy–Schwarz inequality）$(\sum a_i \cdot 1)^2 \leq n\sum a_i^2$ 的变装。在线性代数（linear algebra）中，这是说二次型（quadratic form）$(n-1)S - 2P$ 是半正定（positive semi-definite）的，而它的核（kernel）由全一向量张成。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）讲述二次型与正定性，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题）则提供更多 STEP 风格的不等式练习。

详细解答

STEP III 1993，第 10 题

纯数学 · 矩阵变换

STEP III 1993，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

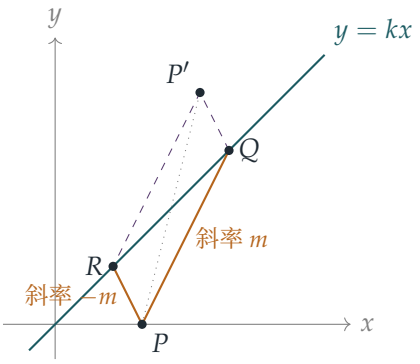
step.maths.org/questions/93-s3-q10

关键思路

这里每一步都是求两条直线的交点，所以各点的坐标只需每次解一条一次方程便可得到。平行四边形（parallelogram）则让我们不必再多做计算就得到 P'：在平行四边形 $PQP'R$ 中，两条对角线（diagonal）互相平分，所以以位置向量（position vector）表示时有 $P + P' = Q + R$。只要把 P' 写成一个矩阵（matrix）乘以 P，面积的问题就只是计算一个行列式（determinant）。

解答

全题都需要 $m^2 \neq k^2$：若 $m = \pm k$，则通过 P 的两条直线之中，有一条与 $y = kx$ 平行，永不与它相交（或者与它重合），这个作图便不成立。



（图中取 $m = 2$，$k = 1$ 及 $P = (1, 0)$。）

点 Q

通过 $P(x_1, y_1)$ 且平行于 $y = mx$ 的直线是 $y - y_1 = m(x - x_1)$。在 Q 点同时有 $y = kx$，所以

$$kx - y_1 = mx - mx_1 \quad \Longrightarrow \quad (m-k)x = mx_1 - y_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mx_1 - y_1}{m-k},$$

其中除以了 $m - k \neq 0$。再由 $y = kx$ 得

$$Q = \left(\frac{mx_1 - y_1}{m-k}, \frac{k(mx_1 - y_1)}{m-k} \right),$$

这正是所求。

点 R

通过 P 且平行于 $y = -mx$ 的直线，计算方法完全相同，只需把 m 换成 $-m$：

$$x = \frac{-mx_1 - y_1}{-m-k} = \frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \qquad R = \left(\frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \frac{k(mx_1 + y_1)}{m+k} \right).$$

点 P'

> ? **想一想** 怎样可以不再求任何直线的交点，就找到平行四边形的第四个顶点?

各顶点依次为 P, Q, P', R，所以 PP' 和 QR 是对角线。平行四边形的对角线互相平分，因此两者的中点相同：

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = \tfrac{1}{2}(Q + R) \quad \Longrightarrow \quad P' = Q + R - P.$$

（等价地，$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PR}$。）$Q$ 和 R 都在 $y = kx$ 上，所以最简单的做法是先把它们的 x 坐标相加。以 $m^2 - k^2$ 为公分母，

$$\begin{aligned} x_Q + x_R &= \frac{(mx_1 - y_1)(m+k) + (mx_1 + y_1)(m-k)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{(m^2x_1 + mkx_1 - my_1 - ky_1) + (m^2x_1 - mkx_1 + my_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2}, \end{aligned}$$

并且 $y_Q + y_R = k(x_Q + x_R)$。因此，设 $P' = (x', y')$，则

$$x' = \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - x_1 = \frac{(m^2 + k^2)x_1 - 2ky_1}{m^2 - k^2},$$

$$y' = \frac{2k(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - y_1 = \frac{2km^2x_1 - (m^2 + k^2)y_1}{m^2 - k^2}.$$

把 T 写成矩阵

两个坐标都是 x_1, y_1 的线性式，而且没有常数项，所以

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{pmatrix} m^2 + k^2 & -2k \\ 2km^2 & -(m^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

面积

矩阵为 $\mathbf{M}$ 的线性映射（linear map）会把每个面积乘以 $|\det \mathbf{M}|$。从每一行抽出因子 $\frac{1}{m^2-k^2}$，

$$\det \mathbf{M} = \frac{-(m^2+k^2)^2 + 4k^2m^2}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-\left(m^4 - 2m^2k^2 + k^4\right)}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^2-k^2)^2}{(m^2-k^2)^2} = -1.$$

所以 $|\det \mathbf{M}| = 1$，每个区域都被映射到面积相同的区域，这正是所求。负号告诉我们 T 会把定向（orientation）反转，正如反射（reflection）一样：一个以逆时针方向描出的图形，其像是以顺时针方向描出的。

? **想一想** 能否用一幅图画说明 T 在做甚么？

可以。PP' 的中点等于 QR 的中点，而后者在 $y = kx$ 上；而且 $y = kx$ 上的点都固定不动（在那里 $Q = R = P$）。解 $\mathbf{Mv} = -\mathbf{v}$ 得出一行 $2m^2x - 2ky = 0$，所以被 T 反转的向量就是 (k, m^2) 的倍数。因此 T 是一个斜反射（skew reflection）：它以直线 $y = kx$ 为镜作反射，但反射的方向是沿 (k, m^2)，而不是垂直于该直线。与任何反射一样，它满足 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$，这也与作图吻合：从 P' 出发会得到相同的 Q 和 R，于是回到 P。

验算

- 取 $m = 2$，$k = 1$，$P = (1,0)$：$Q = (2,2)$，$R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$，所以 $P' = (\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$。矩阵是 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$，它把 $(1,0)$ 送到 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$，而它的行列式是 $\frac{1}{9}(-25+16) = -1$。
- 直线上的点 (t, kt) 应该固定不动：$x' = \frac{(m^2+k^2)t - 2k^2t}{m^2-k^2} = t$。✓
- $\mathbf{M}$ 的迹（trace）是 0，行列式是 -1，所以它的特征值（eigenvalue）是 ± 1，与反射应有的情况相符。
- 我们以有理数精确运算，随机选取约 3000 组 m、k 和 P，核对了以上所有公式，以及三角形面积保持不变这一点。

常见错误

- 取 $P' = Q + R$ 或 $P' = P + Q + R$，而不是 $Q + R - P$。字母的次序 $PQP'R$ 已告诉你哪些顶点互为对顶点。
- 由 $\det \mathbf{M} = -1$ 推断面积变成负数。面积的比例因子是 $|\det \mathbf{M}|$；正负号只记录定向。

STEP 之外

一个线性映射若把某条直线上的每一点都固定，并把另一个方向反转，它就是一个对合（involution），即 $T^2 = I$。平常的正交反射是其中的特殊情况，即被反转的方向垂直于该直线；在这里，这种情况恰好在 (k, m^2) 垂直于 $(1, k)$ 时出现，也就是只有当 $k = 0$ 时（直线 $y = \pm mx$ 关于 x 轴对称，而不是关于 $y = kx$ 对称）。在大学里，这属于特征值与对角化（diagonalisation）的课题，在那里 T 在基（basis）$(1, k), (k, m^2)$ 之下可看成 $\mathrm{diag}(1, -1)$；它也属于把行列式理解为带正负号的体积比例因子的课题。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对这两个概念都有清晰的讲解。

详细解答

STEP III 1993，第 11 题

力学 · 力偶与转动惯量

STEP III 1993，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q11

关键思路

在立方体上建立坐标，并把每个力写成向量（vector）。六个力之和为零，所以它们的作用只是施加一个力偶（couple），而力偶对任何一点的力矩（moment）都相同。第 (i) 部分讨论的就是这个力矩的方向。第 (ii) 部分只用到它沿 OO' 的分量，再配合转动惯量（moment of inertia）；我们会利用点到直线的距离，逐根杆把转动惯量计算出来。

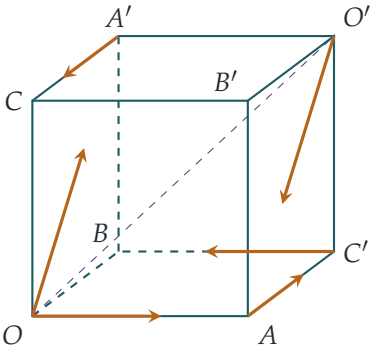
解答

我们把框架视为刚体（rigid body），由均匀细杆组成，并且不考虑重力。取 O 为原点，单位向量分别沿 OA、OB、OC，于是

$$A = (a,0,0), \quad B = (0,a,0), \quad C = (0,0,a),$$

而相对的顶点为

$$O' = (a,a,a), \quad A' = (0,a,a), \quad B' = (a,0,a), \quad C' = (a,a,0).$$



琥珀色箭头显示六条作用线，对角线 OO' 则以紫红色虚线表示。

第 (i) 部分

每个力等于它的大小乘以沿其作用线的单位向量。例如，$O'A$ 是向量 $(0,-a,-a)$，长度为 $\sqrt{2}\,a$，所以沿它作用的力 $\sqrt{2}\,mg$ 就是 $mg(0,-1,-1)$。对全部六个力作同样处理：

作用线	线上一点	力
OA	O	$mg(2,0,0)$
AC'	A	$mg(0,1,0)$
$O'A$	A	$mg(0,-1,-1)$
OA'	O	$mg(0,1,1)$
$C'B$	B	$mg(-2,0,0)$
$A'C$	C	$mg(0,-1,0)$

这些力之和为 $\mathbf{0}$。合力（resultant）为零的力系等价于一个力偶，而力偶对任何一点的力矩都相同。对 O 取力矩（沿 OA 和 OA' 的力通过 O，没有贡献）：

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= A\times mg(0,1,0) + A\times mg(0,-1,-1) + B\times mg(-2,0,0) + C\times mg(0,-1,0)\\ &= amg\big[(0,0,1)+(0,1,-1)+(0,0,2)+(1,0,0)\big]\\ &= amg\,(1,1,2).\end{aligned}$$

位于 O 的支点可以对框架施力，但这个力通过 O，所以对 O 没有力矩。因此，框架由静止开始，会绕着通过 O 并沿力偶轴线的直线转动，其方向为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

正如题目所求。

*给好奇读者的补充。*这是题目预期的答案，也是你应该写下的答案。不过严格来说，对一个可在三维空间自由转动的物体，角加速度（angular acceleration）是 $\mathbf{I}^{-1}\mathbf{G}$，其中 $\mathbf{I}$ 是对 O 的惯量张量（inertia tensor）。只有当 $\mathbf{G}$ 沿着主轴（principal axis）时，角加速度才会指向 $\mathbf{G}$ 的方向。就这个框架而言，对 O 来说，绕 OO' 的转动惯量是 $14ma^2/3$（见第 (ii) 部分），而绕每一条通过 O 并垂直于 OO' 的轴的转动惯量都是 $41ma^2/3$。由此得出初始转轴的方向为 $(25,25,32)$，与 $(1,1,2)$ 相差约 12.6°。

第 (ii) 部分

设 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 为沿 OO' 的单位向量。由于 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{p}$ 沿该直线的分量，根据毕氏定理（Pythagoras' theorem），点 $\mathbf{p}$ 与直线 OO' 的距离的平方为

$$d^2 = |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2$$

。

杆 OA。与 O 相距 x 的点是 $(x,0,0)$，所以 $d^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$。长度为 $\mathrm{d}x$ 的小段，质量为 $\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$，所以

$$I_{OA} = \int_0^a \frac{m}{a}\cdot\frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2ma^2}{9}.$$

中点 $(\frac{a}{2},0,0)$ 与 OO' 的距离的平方为 $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{6}$。根据平行轴定理(parallel axis theorem)，绕通过中点的平行轴，

$$I_{\text{中点}} = \frac{2ma^2}{9} - m\cdot\frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{18}.$$

杆 $B'C$。这根杆由 $(a,0,a)$ 伸延至 $(0,0,a)$，所以与 OA 平行。它的长度也相同，与转轴所成的角度亦相同。因此，绕通过它自身中点的平行轴，它的转动惯量同样是 $ma^2/18$。它的中点为 $\mathbf{p} = (\frac{a}{2},0,a)$，而

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

根据平行轴定理，

$$I_{B'C} = \frac{ma^2}{18} + \frac{ma^2}{2} = \frac{5ma^2}{9}.$$

? **想一想** 我真的要对全部十二根杆逐一这样计算吗?

不用：对称性（symmetry）会替我们完成。绕 OO' 旋转 120°（即轮换 $x\to y\to z\to x$），以及对立方体中心的点反射 $\mathbf{p}\mapsto(a,a,a)-\mathbf{p}$，两者都把框架和直线 OO' 映射到自身。所以它们不会改变任何绕 OO' 的转动惯量。旋转把 OA 带到 OB 和 OC，而反射再把这三根杆带到 $O'A'$、$O'B'$ 和 $O'C'$。这就是一端位于 O 或 O' 的六根杆，每根的转动惯量都是 $2ma^2/9$。同样地，$B'C$ 会被带到环绕立方体中部的“之字形” AB'、$B'C$、CA'、$A'B$、BC'、$C'A$ 中的其余五根杆，而这些杆每根的转动惯量都是 $5ma^2/9$。因此

$$I_{\text{框架}} = 6\cdot\frac{2ma^2}{9} + 6\cdot\frac{5ma^2}{9} = \frac{42ma^2}{9} = \frac{14ma^2}{3},$$

正如题目所求。

角加速度。现在框架只能绕固定直线 OO' 转动。轴承会提供垂直于该直线所需的任何力偶，所以只有外加力偶沿 OO' 的分量会令框架转动。这些力仍然构成力偶 $\mathbf{G} = amg(1,1,2)$，

而它对任何直线的力矩，就是它沿该直线的分量：

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}=\frac{amg(1+1+2)}{\sqrt{3}}=\frac{4amg}{\sqrt{3}}.$$

由绕固定轴转动的方程 $I\ddot{\theta}=\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}$ 可得

$$\ddot{\theta}=\frac{4amg/\sqrt{3}}{14ma^2/3}=\frac{12g}{14\sqrt{3}\,a}=\frac{2\sqrt{3}\,g}{7a}.$$

由 O' 望向 O 时，它的转向是逆时针的，也就是绕方向 $\overrightarrow{OO'}$ 的右手旋转。

验算

- 六个力各有一个“拍档”：OA 配 $C'B$，AC' 配 $A'C$，$O'A$ 配 OA'。每一对都是大小相等、方向相反，并且作用线平行，所以合力为零。
- 框架对其中心具有立方对称性，所以绕每一条通过中心的轴，转动惯量都相同。绕通过中心并平行于 OC 的轴，四根垂直的杆贡献 $4m(a/\sqrt{2})^2=2ma^2$。八根水平的杆每根贡献 $\frac{ma^2}{12}+\frac{ma^2}{4}=\frac{ma^2}{3}$。总和是 $\frac{14ma^2}{3}$，与上面的答案吻合，因为 OO' 同样通过中心。
- 数值上，取 $a=m=g=1$，对十二根杆以中点法求和，得出 $I=4.66667$ 及 $\ddot{\theta}=0.494872$，与 $2\sqrt{3}/7\approx0.494872$ 相符。

常见错误

- 把沿面对角线的力 $\sqrt{2}\,mg$ 化为分量时，忘记了因子 $1/\sqrt{2}$：每个力的分量大小是 mg，而不是 $\sqrt{2}\,mg$。
- 在第 (ii) 部分使用了整个力偶 $|\mathbf{G}|=\sqrt{6}\,amg$，而不是它沿固定轴的分量。
- 从一条不通过质心（centre of mass）的轴出发应用平行轴定理：这个定理必须经由质心，就像由 $2ma^2/9$ 到 $ma^2/18$ 的那一步。

STEP 之外

对于三维空间中的转动，转动惯量会变成一个 3×3 的对称矩阵（symmetric matrix），即惯量张量，而角动量（angular momentum）为 $\mathbf{L}=\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$。它的特征向量（eigenvector）就是主轴。正如第 (i) 部分的补充所示，物体一般不会绕着外加力偶的轴线开始转动。这个立方体框架是个很好的例子：绕每一条通过其中心的轴，它的转动惯量都相同，但对一个角来说却并非如此。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）阐述了三维空间中的刚体运动，包括惯量张量。

详细解答

STEP III 1993，第 12 题

力学 · 弹性绳与能量

STEP III 1993，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

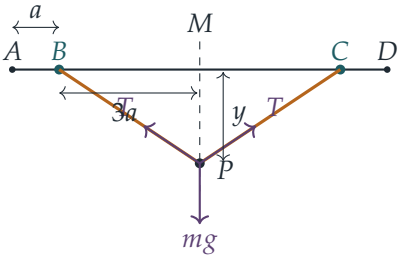
step.maths.org/questions/93-s3-q12

关键思路

由于钉子是光滑（smooth）的，而质点位于弦线的中点，弦线便分成两段完全相同的半段，每段的自然长度（natural length）均为 a，而且每一半段上各处的张力（tension）相同。每一半段都由一个固定端出发，绕过一枚钉子，再向下（或向上）连到 P，所以它拉伸后的长度只取决于距离 BP。只要把伸长量（extension）用 P 的高度表示出来，平衡（equilibrium）条件便给出 k，而能量守恒（conservation of energy）则把 Q 与 R 联系起来。

解答

我们把 P 看作质点（particle），把弦线看作轻而有弹性（light and elastic），并把钉子看作光滑。根据对称性，P 沿着通过 BC 中点 M 的铅垂线运动。设 y 为 P 在 M 之下的深度；当 P 在 BC 之上时，它是负数。



求 k

半段 $A \to B \to P$ 的长度为 $a + BP = a + \sqrt{9a^2 + y^2}$，自然长度为 a，所以它的伸长量是

$$x = \sqrt{9a^2 + y^2}.$$

根据胡克定律（Hooke's law），每一半段的张力为

$$T = \frac{kmg\,x}{a}.$$

若 θ 是 BP 与水平线所成的角，则 $\sin\theta = |y|/x$。在 P 点沿铅垂方向分解力，得

$$2T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad 2\cdot\frac{kmg\,x}{a}\cdot\frac{y}{x} = mg \quad\Longrightarrow\quad \frac{2ky}{a} = 1.$$

平方根已经约去，所以那个难看的数值 $BP = \frac{\sqrt{145}}{4}a$ 根本用不着。代入 $y = a/4$，得 $k/2 = 1$，所以

$$k = 2.$$

由 Q 到 R 的能量

每一半段储存的弹性势能（elastic energy）为 $\dfrac{kmg\,x^2}{2a}$，所以当 $k = 2$ 时，两个半段合共储存

$$E(y) = 2\cdot\frac{2mg\,x^2}{2a} = \frac{2mg\,(9a^2 + y^2)}{a}.$$

? **想一想** 为甚么 P 会在 R 停下来？P 最后升到钉子之上，为甚么没有问题？

P 在 Q 由静止释放，而 R 是它升到的最高点，所以它在那里同样是瞬时静止的。在 BC 之上，两个半段仍然处于拉伸状态（每段仍有 $x \geq 3a > 0$），所以 E 的公式同样适用。弦线始终不会松弛。

在 Q，$y = pa$；在 R，$y = -3a$。质点上升了 $(p+3)a$。由于钉子光滑，又没有其他能量损失，而动能（kinetic energy）在两端均为零，所以

$$\begin{aligned} E(pa) &= E(-3a) + mg(p+3)a \\ 2mga(9+p^2) &= 2mga(9+9) + mga(p+3) \\ 18 + 2p^2 &= 36 + p + 3, \end{aligned}$$

由此得

$$2p^2 - p - 21 = 0, \qquad \text{即} \qquad (2p+6)\left(p - \tfrac{7}{2}\right) = 0.$$

由于 $p > 0$，我们得到 $p = \frac{7}{2}$。

这与题目印出的 $2p^2 - p - 17 = 0$ 并不吻合。我们已仔细核对过这个模型（见“验算”），包括直接进行数值模拟，而按题目所给的数据，得出的确实是 -21。$p = \frac{7}{2}$ 这个整齐的根显示，21 才是原意中的常数，17 应是误印。最后一部分并不取决于哪一个常数才正确。

要确认 P 的确是在 R 第一次停下来，可设 $y = ta$。在深度 ta 处的动能为

$$E(pa) - E(ta) - mg(p-t)a = mga\,(p-t)(2p+2t-1).$$

当 $p = \frac{7}{2}$ 时，这就是 $mga\,(\frac{7}{2} - t)(2t+6)$。它在 $-3 < t < \frac{7}{2}$ 时为正，并在 $t = -3$ 时首次变为零，而这正是 R。

比较张力

张力为 $T = 2mg\,x/a$，它随 x 增加而增加，所以我们需要证明 x 在 R 的值比在 Q 的值小。能量方程毋须用到 p 的值便可做到这一点：

$$E(Q) - E(R) = mg(p+3)a > 0.$$

弹性势能为 $\dfrac{2mg\,x^2}{a}$，所以 $x_R^2 < x_Q^2$，从而 $x_R < x_Q$，因此 $T_R < T_Q$。用文字来说，质点在上升途中获得了势能（potential energy），而这些能量只能来自弦线，所以弦线在 R 的拉伸程度必定较小。

具体而言，当 $p = \frac{7}{2}$ 时，$x_Q = \frac{\sqrt{85}}{2}a$ 而 $x_R = 3\sqrt{2}\,a$，所以

$$T_Q = \sqrt{85}\,mg \approx 9.22\,mg, \qquad T_R = 6\sqrt{2}\,mg \approx 8.49\,mg.$$

验算

- 简谐运动验算。作用于 P 的向上的力为 $2T \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{4mg\,y}{a}$，它是 y 的线性函数，在 BC 之上和之下都是如此。所以 P 围绕 $y = a/4$（即上面求得的平衡位置）作简谐运动（simple harmonic motion）。它在 $y = \frac{7}{2}a$ 由静止释放，振幅（amplitude）为 $\frac{13}{4}a$，所以它的最高点是 $y = \frac{1}{4}a - \frac{13}{4}a = -3a$。这正好就是 R，从而独立地确认了 $p = \frac{7}{2}$。
- 取 $a = 1$、$k = 2$、$p = 3.5$，对运动方程作数值积分，所得的最高点为 $y = -3.0000$。
- 题目印出的方程会给出 $p = \frac{1+\sqrt{137}}{4} \approx 3.18$，而这样能量收支便会相差 $4mga$。

常见错误

- 计算每一半段的长度时漏掉了 AB 这一段。半段的长度是 $AB + BP = a + BP$，而它的伸长量之所以是 BP，只是因为 AB 刚好等于它的自然长度 a。

- 把整条弦线当作一条弹簧，张力为 $kmg \cdot (\text{总伸长量})/(2a)$。这样做的确会得到相同的答案，但前提是伸长量必须取总伸长量 $2x$。
- 忘记了当 P 在 BC 之上时，弹性势能仍然存在。弦线在那里仍然处于拉伸状态。

STEP 之外

尽管弦线的几何关系是非线性的，铅垂方向的回复力（restoring force）却恰好与位移成正比。这是因为，若张力与长度成正比，它的铅垂分量便与铅垂方向的距离成正比；自然长度为零的弹簧能成为理想的悬挂装置，也是出于同一个原因（这正是 LaCoste 长周期地震仪背后的原理）。势能若是坐标的二次函数，便会导出线性的运动方程，而这正是小振动（small oscillations）与简正模式（normal modes）理论的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种精神处理弹簧、能量和振动的。

详细解答

STEP III 1993，第 13 题

力学 · 变质量链条

STEP III 1993，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q13

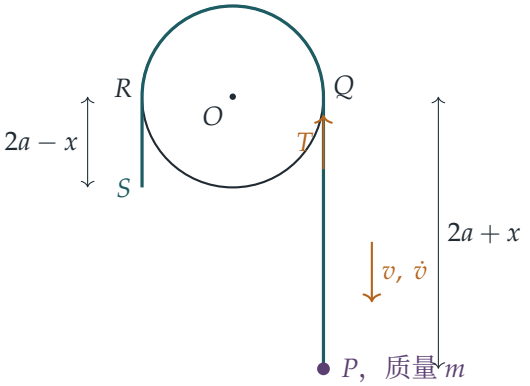
关键思路

由于链条不能滑动，圆盘、整条链条和质点都以相同的速率运动：未知量只有一个，就是 v。于是动能（kinetic energy）为 $\frac{1}{2}$(等效质量)v^2。在势能（potential energy）方面，只有两段悬垂部分会改变，因为绕过顶部的那段弧只是不断被完全相同的链条取代。至于张力（tension），可考虑运动中的 PQ 段连同质点。然后仔细想想：在 Q 处加入这一段的链条，本身已经以多快的速率运动。

解答

模型

圆盘是均匀薄片（uniform lamina），绕通过 O 的光滑固定轴转动，其转动惯量（moment of inertia）为 $\frac{1}{2}(4m)a^2 = 2ma^2$。链条是均匀的，每单位长度的质量为 m/a，不可伸长，并且不会在盘边上滑动。质点视为点质量。当 P 下降了 x 时，右边的一段 QP 长度为 $2a + x$，左边的一段 RS 长度为 $2a - x$，而弧 RQ 是长度为 πa 的半圆。链条上每一点都以速率 v 运动，由于没有滑动，盘边亦然，所以圆盘的角速率（angular speed）为 $\omega = v/a$。



速率

动能。圆盘的贡献为 $\frac{1}{2}(2ma^2)(v/a)^2 = mv^2$，链条为 $\frac{1}{2}(4+\pi)mv^2$，质点为 $\frac{1}{2}mv^2$。所以

$$\text{动能} = \tfrac{1}{2}mv^2\big(2+4+\pi+1\big) = \tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2.$$

势能。弧 RQ 始终是同样的一段半圆形链条，所以它的势能永不改变。取 O 的水平为零势能面。一段长度为 ℓ、悬垂在该水平之下的链条，质量为 $m\ell/a$，其质心（centre of mass）位于深度 $\frac{1}{2}\ell$ 处，所以它的势能为 $-\dfrac{mg\ell^2}{2a}$。因此，两段悬垂部分的势能损失为

$$\frac{mg}{2a}\Big[(2a+x)^2+(2a-x)^2-(2a)^2-(2a)^2\Big] = \frac{mg}{2a}\cdot 2x^2 = \frac{mgx^2}{a}.$$

质点则损失 mgx。

能量。轴是光滑的，而粗糙接触面不作功，因为没有滑动。所以能量守恒，而由静止开始，

$$\tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2 = \frac{mgx^2}{a} + mgx \quad\Longrightarrow\quad (\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax),$$

正如所求。

加速度

对时间求导，并利用 $\dot{x} = v$：

$$2(\pi+7)av\dot{v} = 2g(2x+a)v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = \frac{g(2x+a)}{(\pi+7)a} \qquad (v\neq 0).$$

当 $x = 2a$ 时，S 到达 R，这时

$$\dot{v} = \frac{5g}{\pi+7}, \qquad v^2 = \frac{2g(4a^2+2a^2)}{(\pi+7)a} = \frac{12ga}{\pi+7}.$$

Q 处的张力

设 T 为 Q 处的张力。我们选取的系统是质点连同悬垂在 Q 之下的链条。它的质量为

$$M = \frac{m}{a}(2a + x) + m,$$

随着链条离开圆盘，这个质量以 $\dot{M} = \dfrac{m}{a}v$ 的速率增加。作用于它的外力是向下的重量 Mg 和向上的 T。整个系统都以速率 v 向下运动。

想一想 正要加入 PQ 的链条，在加入前的一刻运动得有多快?

在 Q 处，盘边是竖直的，所以到达该处的链条本身已经以速率 v 竖直向下运动。它把自己的动量（momentum）$v\,\delta M$ 一并带来。于是变质量方程（variable-mass equation）（动量的变化率 = 力 + 每单位时间带入的动量）为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T + v\dot{M}, \qquad \text{即} \qquad M\dot{v} = Mg - T.$$

当 S 到达 R 时，$M = 5m$，所以

$$T = 5m\left(g - \frac{5g}{\pi + 7}\right) = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}\,mg.$$

*用力矩覆核。*把圆盘和链条的弧 RQ 一并考虑。轴的作用力通过 O，弧的重量对 O 的总力矩（moment）为零（弧对通过 O 的竖直线对称），而链条与圆盘之间的摩擦力是内力。弧上每一个质点都在距离 O 为 a 之处以速率 v 运动。所以角动量（angular momentum）为 $(2ma^2 + \pi ma^2)(v/a)$，而

$$(T - T_R)a = (2 + \pi)ma\,\dot{v}.$$

当 S 到达 R 时，左边的一段已缩短至零，所以 $T_R = 0$。由此再次得出 $T = (2 + \pi)m \cdot \dfrac{5g}{\pi + 7} = \dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$。

*试卷印出的答案。*试卷给出的值 $\dfrac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg$，正是写成 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T$ 时所得的结果，这样写等于把加入 PQ 的链条当作是静止地到达：

$$T = M(g - \dot{v}) - \frac{m}{a}v^2 = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg - \frac{12}{\pi + 7}mg = \frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg.$$

对于一颗雨点沿途吸收静止的雾气，这条方程是对的。但在这里并不正确，因为绕过盘边而来的链条本身已经随 PQ 一起运动。我们的两种方法都得出 $\dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$，所以我们相信印出的答案包含了这个错误。如果你需要得出印出的数值，可使用“静止地加入”的方程，但要知道它把 T 少算了 mv^2/a。

验算

- 在 $x = 0$ 时，公式给出 $v = 0$ 和 $\dot{v} = g/(\pi + 7)$。不平衡的力只有质点的重量 mg，作用于等效质量 $(\pi + 7)m$ 之上。
- 由静止开始，以数值方法逐步求解运动方程 $(\pi + 7)m\dot{v} = mg(2x + a)/a$，可重现 $(\pi + 7)av^2 = 2g(x^2 + ax)$，误差在 10^{-11} 之内。取 $m = a = 1$ 和 $g = 9.81$，动量法和力矩法都给出 $T/mg \approx 2.5349 = 5(\pi + 2)/(\pi + 7)$。“静止地加入”的版本则给出 $1.3517 = (5\pi - 2)/(\pi + 7)$。
- $T < 5mg$，这是必然的，因为悬垂的质量 $5m$ 正在向下加速。

常见错误

- 忘记计算圆盘的动能，或者在计算其转动惯量时用了 ma^2 而不是 $\frac{1}{2}(4m)a^2$。
- 把链条的弧计入势能的变化之中。它的形状和位置从不改变。
- 使用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = F$ 时，没有问清楚加入的质量本身已有甚么速度。

STEP 之外

变质量问题的真正重点，在于选定一个系统，并追踪越过其边界的动量。这就是控制体积（control volume）的概念，它是火箭运动和大部分流体力学（fluid mechanics）的基础。这里的常见错误，即假设 $F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$ 对任何变化中的质量都成立，是一个著名的陷阱：一般而言，这条方程甚至会随参考系（frame of reference）而改变。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对变质量系统有严谨的论述。

详细解答

STEP III 1993，第 14 题

力学 · 铅垂圆周运动

STEP III 1993，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

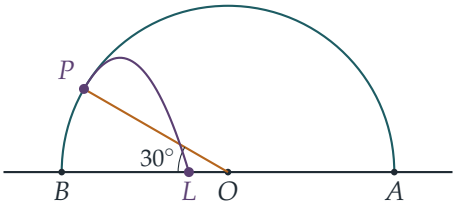
step.maths.org/questions/93-s3-q14

关键思路

由于绳子水平，而质点（particle）沿铅垂方向抛出，初速度与绳子垂直，所以质点会在以 O 为圆心、半径为 c 的铅垂圆上运动，并落在与 A 位于同一直径另一端的点 B。每次碰撞时速度都是铅垂的，所以碰撞只是把速率减半。我们要找出质点在第几次反弹后首次无法越过圆的顶点，然后利用能量和径向方程（radial equation）求出张力（tension）变为零的位置。此后质点便是普通的抛体（projectile）。

解答

我们把质点看成质量为 m 的质点，绳子为轻而不可伸长（light and inextensible），桌面为光滑（smooth）且水平。取 O 为原点，并设 $A=(c,0)$ 及 $B=(-c,0)$。无论质点在哪一侧上升，设它位于该侧水平半径之上、夹角为 θ 的位置。



两次碰撞之间的运动

假设质点在 A 或 B 离开桌面，以速率 V 铅垂向上运动。它的速度与拉紧的绳子垂直，所以只要绳子保持拉紧，它便在以 O 为圆心、半径为 c 的圆上运动。根据能量守恒（conservation

of energy)，在角度 θ 时，它的速率 v 满足

$$v^2 = V^2 - 2gc\sin\theta.$$

沿指向 O 的方向分解，设张力为 T，

$$T + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{T}{m} = \frac{V^2}{c} - 3g\sin\theta.$$

当 $0 \le \theta \le 90^\circ$ 时，张力在顶点最小，所以绳子在整个半圆上保持拉紧，当且仅当 $V^2 \ge 3gc$。（过了顶点之后，$\sin\theta$ 再次减小，所以 T 只会增大。）在这情况下，质点会落到直径另一端的桌面上，而根据能量守恒，它此时铅垂向下运动，速率同样是 V。

在该次碰撞中，速度与桌面垂直，所以反弹方向是铅垂的，速率为 $\frac{1}{2}V$，而绳子仍然水平并且拉紧。因此整个过程会重复一次，只是 V 减半。

绳子在哪里变松

质点起初的速率为 $V_0 = 64\sqrt{6gc}$，所以 $V_0^2 = 24576\,gc$。经过 k 次碰撞后，速率为 $V_k = V_0/2^k$，所以

$$V_k^2 = \frac{24576}{4^k}\,gc: \qquad V_6^2 = 6gc, \qquad V_7^2 = \tfrac{3}{2}gc.$$

因此，以速率 $V_0, \dots, V_6$ 开始的各个半圆全部都能走完（每个都有 $V_k^2 \ge 3gc$），碰撞依次发生在 B, A, B, A, B, A, B。第七次碰撞在 B，而质点从 B 上升时 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc < 3gc$。

> ? **想一想** 质点会不会在绳子变松之前就已经往回落，而不是绳子先变松?

不会。速率会在 $V_7^2 = 2gc\sin\theta$ 处变为零，即 $\sin\theta = \frac{3}{4}$，但张力更早便变为零，位置满足

$$\frac{V_7^2}{c} = 3g\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{2}gc = 3gc\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}.$$

所以绳子在 $\theta = 30^\circ$ 时变松，位置是 B 那一侧的点 P，离桌面的高度为 $c\sin\theta = c/2$，正如题目所求。

A 与 B 之间的第一次反弹

在 P 点有 $\theta = 30^\circ$，所以 $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \frac{1}{2}c\right)$，并且

$$v^2 = \tfrac{3}{2}gc - 2gc\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}gc.$$

速度沿切线方向，与 OP 垂直，指向上方并朝向 O 的一边；它与水平方向成 60° 角。所以它的分量为

$$v_x = \tfrac{1}{2}v, \qquad v_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad \text{其中} v_x^2 = \tfrac{1}{8}gc, \quad v_y^2 = \tfrac{3}{8}gc.$$

从这时起，质点就是一个抛体。当 $\frac{1}{2}c + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 时它到达桌面；取正根，

$$t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + gc}}{g} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

在这段时间内，它的水平位移为

$$v_x t = \sqrt{\frac{gc}{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}\,c,$$

所以它落在点 L，其中

$$x_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}c = \frac{\sqrt{11}-3\sqrt{3}}{8}\,c \approx -0.235\,c.$$

（在整段飞行过程中，质点与 O 的距离始终不超过 c，所以绳子在到达 L 之前不会再次拉紧；特别地，$|x_L| < c$。）

由于 $\sqrt{11} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$，我们有 $x_L < 0$：落点与 B 位于 O 的同一侧。因为 O 是 AB 的中点，所以 A 与 B 之间的第一次反弹**较接近** B，与 B 相距约 $0.77c$，与 A 相距约 $1.23c$。

验算

- 以 $V_k^2 \geq 3gc$ 作检验，可知 $k = 7$ 是第一个走不完的半圆，而 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc$；绳子变松的条件给出 $\sin\theta = \frac{1}{2}$。
- 在 P 点，重力的径向分量 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ 等于 $v^2/c = \frac{1}{2}g$，正好符合张力为零的要求。
- 逐步进行的数值模拟（取 $g = 9.8$，$c = 1.3$）显示，绳子在高度 $0.5000c$ 处变松，落点在 $x \approx -0.2349c$，而飞行期间质点与 O 的距离从未超过 c。

常见错误

- 以 $V^2 \geq 4gc$（刚好到达顶点）作为走完半圆的条件。绳子与杆不同，需要 $V^2 \geq 3gc$。
- 弄不清第七次碰撞发生在哪一端：第奇数次碰撞都在 B。
- 把 P 点速度的方向弄错：它与 OP 垂直，与水平方向成 60° 角，而不是 30°。

STEP 之外

绳子变松的一刻，就是一个约束（constraint）停止作用的一刻：张力正是用来维持 $|OP| = c$ 的拉格朗日乘数（Lagrange multiplier），当它必须变为负数才能维持约束时，这个约束便不再起作用。像这样带有单边约束（one-sided constraint）以及碰撞的问题，在大学本科的

力学课程中会有系统地处理。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是个好去处，可以看到能量与径向方程怎样这样配合使用。

详细解答

STEP III 1993，第 15 题

概率与统计 · 等候时间的分布

STEP III 1993，第 15 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q15

关键思路

把注意力放在最后一次投掷上。实验恰好在第 n 次投掷停止，当且仅当这一次投掷补上了仍然欠缺的那一面的第二次出现，因此首 $n-1$ 次投掷必须恰好有一次是该面，其余全部是另一面。这样，分布（distribution）就是两个简单项之和。期望值（expectation）于是化为两个形如 $\sum n(n-1)x^{n-2}$ 的级数，而这类级数可由等比级数（geometric series）求导两次得到。

解答

我们假设 $0 < p < 1$（否则实验永远不会结束），并假设各次投掷互相独立（independent）。

N 的分布

我们至少需要两次正面和两次反面，所以 $N \geq 4$。固定 $n \geq 4$。在事件 $N = n$ 上，第 n 次投掷不是正面就是反面，而这两种情况互斥（disjoint）。

*第 n 次投掷是正面。*在此之前目标尚未达到，而第 n 次投掷添上一次正面后便达到目标。所以首 $n-1$ 次投掷已经包含至少两次反面，但只有一次正面：恰好一次正面和 $n-2$ 次反面（而且 $n-2 \geq 2$，因为 $n \geq 4$）。反过来说，任何这样的序列后面接上一次正面，都恰好在第 n 次停止。那唯一的一次正面可以出现在 $n-1$ 个位置中的任何一个，所以这种情况的概率是

$$(n-1)\,p\,q^{n-2} \cdot p = (n-1)p^2q^{n-2}.$$

*第 n 次投掷是反面。*把正面和反面对调，用同样的论证可知概率是 $(n-1)q^2p^{n-2}$。

两者相加，

$$\boxed{\mathrm{P}(N=n)=(n-1)\left(p^2q^{n-2}+q^2p^{n-2}\right),\qquad n=4,5,6,\ldots}$$

而当 $n\le 3$ 时 $\mathrm{P}(N=n)=0$。

> **想一想** 当最后一次投掷是正面时，为甚么首 $n-1$ 次投掷不可能包含两次正面?

假如包含两次正面，那么它们已经有两次正面和（停止条件所需的）两次反面，实验便会在第 n 次投掷之前结束。正是这一点把正面的次数确定为恰好一次。

期望值

对于 $|x|<1$，把 $\sum_{n\ge 0}x^n=(1-x)^{-1}$ 求导两次，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

我们的和式由 $n=4$ 开始，所以要减去 $n=2$ 和 $n=3$ 的两项，即 2 和 $6x$：

$$\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\frac{2}{(1-x)^3}-2-6x.$$

现在

$$\mathrm{E}(N)=\sum_{n=4}^{\infty}n\,\mathrm{P}(N=n)=p^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)q^{n-2}+q^2\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)p^{n-2}.$$

先取 $x=q$（于是 $1-x=p$），再取 $x=p$（于是 $1-x=q$）代入上述级数；由于 $0<p,q<1$，两者皆成立：

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=p^2\Big(\frac{2}{p^3}-2-6q\Big)+q^2\Big(\frac{2}{q^3}-2-6p\Big)\\&=\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-2(p^2+q^2)-6pq(p+q).\end{aligned}$$

由于 $p+q=1$，我们有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=\frac{1}{pq}$ 以及 $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=1-2pq$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(N)&=\frac{2}{pq}-2(1-2pq)-6pq\\&=\frac{2}{pq}-2-2pq=2\Big(\frac{1}{pq}-1-pq\Big),\end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。

验算

- 各概率之和为 1：同一个级数少一个因子的版本给出 $\sum_{n\geq 4}(n-1)p^2q^{n-2} = 1-p^2-2p^2q$，加上对调后的版本，余下 $1-(p^2+q^2)-2pq(p+q) = 1-1+2pq-2pq = 1$，当中用到 $p^2+q^2 = 1-2pq$。
- 对于公平的硬币，$pq = \frac{1}{4}$，而 $\mathrm{E}(N) = 2(4-1-\frac{1}{4}) = \frac{11}{2}$。直接计算：$\mathrm{P}(N=4) = \frac{3}{8}$，$\mathrm{P}(N=5) = \frac{1}{4}$，…，而 $n\,\mathrm{P}(N=n)$ 的部分和趋近 5.5。
- 当 $p \to 0$ 时，$\mathrm{E}(N) \approx 2/p$：我们要等待两次正面出现，每次大约需要 $1/p$ 次投掷。
- 列举所有长度不超过 10 的序列，所得结果与这个分布完全吻合；另外以 $p = 0.3$ 进行模拟，得出的平均值为 7.10，而公式给出的是 7.1038。

常见错误

- 把 $n-1$ 写成 $\binom{n}{2}$：最后一次投掷的位置是固定的，所以只有首 $n-1$ 次投掷中那唯一的一次正面（或反面）可以自由选择位置。
- 使用标准级数时，忘记减去 $n=2$ 和 $n=3$ 的两项。

STEP 之外

N 是两个经平移的负二项（negative binomial）等待时间的混合，而对等比级数求导这个技巧，其实是概率生成函数（probability generating function）的手工版本。设 $G(s) = \mathrm{E}(s^N)$，便可同样快捷地由 $G'(1)$ 得到平均值，并由 $G''(1)$ 得到方差（variance）。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）详细讲述生成函数，以及像本题这类的等待时间问题。

详细解答

STEP III 1993，第 16 题

概率与统计 · 截尾正态分布

> **STEP III 1993，第 16 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q16

关键思路

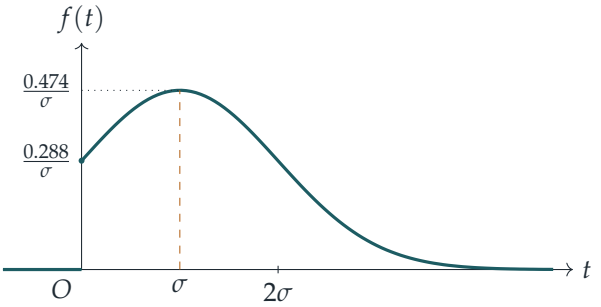
除了因子 $1/k$ 之外，这个密度函数正是平均值为 σ、标准差为 σ 的正态分布（normal distribution）的密度函数，只是在 $t=0$ 处被截断。因此，凡是关于 T 的概率，都等于一个正态概率除以“未截断的变量为非负”的概率。以 $z=(t-\sigma)/\sigma$ 作标准化（standardising），一切便化为关于 $Z\sim \mathrm{N}(0,1)$ 的命题，可查 Φ 的数值表求得。

解答

以下一律设 $Z\sim \mathrm{N}(0,1)$，其密度函数（density）为 $\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$，分布函数（distribution function）为 Φ。

略图

当 $t\geq 0$ 时，图像是以 $t=\sigma$ 为中心的正态钟形曲线，再按 $1/k$ 的比例放大。它在 $t=\sigma$ 处取得极大值，$f(\sigma)=\frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}}\approx\frac{0.474}{\sigma}$，并在 $t=2\sigma$ 处有一个拐点（point of inflexion）。在截断处，曲线由一个正的高度开始，$f(0)=\frac{e^{-1/2}}{k\sigma\sqrt{2\pi}}\approx\frac{0.288}{\sigma}$，而当 $t<0$ 时则跳至 0。当 $t\to\infty$ 时，$f(t)\to 0$。



k 的值

总概率必须等于 1：

$$1 = \int_0^\infty \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{t-\sigma}{\sigma}\right)^2\right) \mathrm{d}t.$$

代入 $z = (t-\sigma)/\sigma$，则 $\mathrm{d}t = \sigma\,\mathrm{d}z$，而 $t = 0$ 变成 $z = -1$，于是

$$1 = \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \phi(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1-\Phi(-1)}{k} = \frac{\Phi(1)}{k}.$$

因此 $k = \Phi(1) \approx 0.8413$，即 $k \approx 0.841$，正如题目所求。

平均值

用同一个代换，$t = \sigma(1+z)$，于是

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \sigma(1+z)\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = \sigma\left[\frac{1}{k}\int_{-1}^\infty \phi(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{k}\int_{-1}^\infty z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z\right].$$

第一个积分等于 k，这是刚才已经证明的。

> **想一想** 既然 $\phi(z)$ 本身也积不出来，我们怎样对 $z\,\phi(z)$ 求积分?

我们利用 $\phi'(z) = -z\,\phi(z)$ 这个事实，所以 $z\,\phi(z)$ 的原函数（antiderivative）是 $-\phi(z)$：

$$\int_{-1}^\infty z\,\phi(z)\,\mathrm{d}z = \Big[-\phi(z)\Big]_{-1}^\infty = \phi(-1) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.24197.$$

因此

$$\mathrm{E}(T) = \sigma\left(1 + \frac{e^{-1/2}}{k\sqrt{2\pi}}\right) \approx \sigma\left(1 + \frac{0.24197}{0.84134}\right) \approx 1.288\,\sigma.$$

这个值比 σ 大，也理应如此：除去左尾之后，平均值会向右移。

求 σ

拟题时间的平均值是 3 小时，所以

$$\sigma = \frac{3}{1.2876} \approx 2.330 \text{ 小时}.$$

对任意 $a \geq 0$，用同一个代换可得

$$\mathrm{P}(T > a) = \frac{1}{k}\int_{(a-\sigma)/\sigma}^{\infty} \phi(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}-1\right)}{\Phi(1)}. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

取 $a = 4$：$\frac{4}{\sigma} - 1 \approx \frac{4}{2.330} - 1 \approx 0.717$，而 $\Phi(0.717) \approx 0.7633$。由 $(*)$，

$$\mathrm{P}(T > 4) \approx \frac{1 - 0.7633}{0.8413} \approx 0.2814, \qquad \mathrm{P}(T \leq 4) \approx 0.7186.$$

现在我们假设 16 道题目的拟题时间互相独立（independent），而且各自服从 T 的分布（这是唯一合理而可用的模型）。那么

$$\mathrm{P}(\text{没有题目需时超过 } 4 \text{ 小时}) = \mathrm{P}(T \leq 4)^{16} \approx 0.7186^{16} \approx 0.0051.$$

所以，每道题目都能在 4 小时内拟好的机会极微（大约二百分之一）。

第 (ii) 部分

> ? **想一想** 我们是以哪一个事件作为条件?

“2 小时后仍未令人满意”表示该题目总共需要多于 2 小时，所以这是事件 $T > 2$。“再过 2 小时后仍然不获接纳”则是 $T > 4$。由于 $\{T > 4\} \subseteq \{T > 2\}$，

$$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) = \frac{\mathrm{P}(T > 4)}{\mathrm{P}(T > 2)}.$$

取 $a = 2$：$\frac{2}{\sigma} - 1 \approx -0.142$，所以 $1 - \Phi(-0.142) = \Phi(0.142) \approx 0.5563$。把两个 $(*)$ 式相除时，因子 $\Phi(1)$ 互相抵消：

$$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) \approx \frac{1 - 0.7633}{0.5563} = \frac{0.2367}{0.5563} \approx 0.426.$$

验算

- 直接对密度函数作数值积分（辛普森法则（Simpson's rule），取 $\sigma = 1$），在除以 k 之前得总面积为 0.84134，平均值为 1.2876σ。
- 模拟 4×10^5 个平均值和标准差均为 $\sigma = 2.330$ 的正态值，并舍去其中的负值，得样本平均值 3.004，$\mathrm{P}(T > 4) \approx 0.282$ 及 $\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2) \approx 0.426$。
- 第 (i) 部分对舍入非常敏感：$0.719^{16} \approx 0.0051$，但 $0.718^{16} \approx 0.0050$。答案写作约 0.005 即可。
- 即使没有截断，$\mathrm{P}(T > 4 \mid T > 2)$ 也会相同，因为因子 $1/k$ 会抵消。只有第 (i) 部分和平均值才受 k 影响。

常见错误

- 计算 $\mathrm{P}(T > 4)$ 时忘记除以 k：这样会得到 0.237 而不是 0.281，并在 (i) 中得到 $0.7633^{16} \approx 0.013$，是正确值的两倍有多。
- 把 T 的平均值当作 σ（即截断前的平均值），这样会得到 $\sigma = 3$。
- 在 (ii) 中求了 $\mathrm{P}(2 < T \leq 4)$ 或 $\mathrm{P}(T > 2)$，而不是条件概率（conditional probability）。

STEP 之外

平均值中出现的量 $\phi(1)/\Phi(1)$ 是*逆米尔斯比率*（inverse Mills ratio）的一个例子：一般而言，正态分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 在 a 处截去下方之后，其平均值为 $\mu + \sigma\phi(\alpha)/(1 - \Phi(\alpha))$，其中 $\alpha = (a - \mu)/\sigma$。凡是数据只能在某个门槛以上才观察得到的场合，都会出现截断分布（truncated distribution），例如存活分析（survival analysis）以及处理设限数据（censored data）的计量经济模型。第 (ii) 部分所讨论的是*存活函数*（survival function）$\mathrm{P}(T > t)$；指数分布（exponential distribution）是唯一能令 $\mathrm{P}(T > s + t \mid T > s)$ 与 s 无关的情况。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）涵盖连续分布和条件概率。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

1993 年详细解答. 全书各章及
所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为
beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。