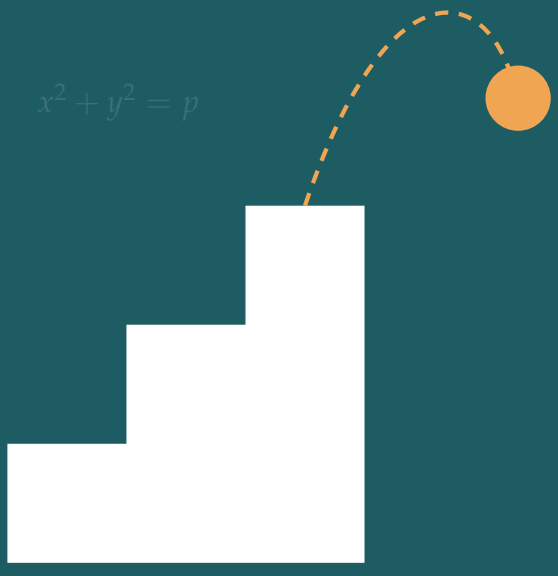
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

第 11 章

振动、转动与运动参考系



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

第 11 章

振动、转动与运动参考系

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

第 11 章：振动、转动与运动参考系

本册是 *Beyond STEP* 全书 13 章中的第 11 章。全书、各章的单行本、每一节的可列印工作纸，以及每一道 STEP 试题的详细解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

11

振动、转动与运动参考系

会摆动的东西、会旋转的东西，以及从移动中的位置所看到的东西。

本章内容

11.1	共振	STEP II 1991
11.2	简正模式	STEP III 2014
11.3	真实的摆	STEP III 1998
11.4	等时曲线	STEP III 1994
11.5	加速火车中的重力	STEP II 2021
11.6	后旋	STEP III 1997
11.7	杆中的辛普森法则	STEP II 1989
11.8	倾斜的平衡	STEP III 2025
11.9	安全抛物线	STEP II 2014
11.10	会朝你飞回来的球	STEP II 2019
11.11	外野手如何接球	STEP II 1998
11.12	橡皮绳上的蚂蚁	STEP II 2018
11.13	铲雪车问题	STEP III Specimen paper
11.14	是抛物线，不是悬链线	STEP I 1991
A	练习答案	第 95 页

看清运动

年轻理论物理学家的事业，就是在愈来愈抽象的层次上处理谐振子。

— 相传出自 Sidney Coleman

上一章利用守恒定律(conservation laws)来理解碰撞和引力。本章转向动力学(dynamics)入门课程的另外几个重要主题：会振动的东西、会转动的东西，以及从最有用的观点描述运动的艺术。

振动（oscillation）无处不在。单摆和弹簧是教科书上的例子，但同样的数学也描述了分子的振动、建筑物的摇晃、收音机里的电路，以及在量子力学中光本身的行为。原因在于，几乎任何处于稳定平衡（stable equilibrium）附近的东西，表现都像弹簧：把它拉开一点点，回复力（restoring force）便与位移成正比。因此，简谐振子（simple harmonic oscillator）是几乎所有物理系统的一阶近似，而物理学有很大一部分，就是要弄清楚当这个近似不太准确时会发生甚么事。

为甚么这很重要

工程师必须知道所建造的每一座结构的固有频率（natural frequency），使它们远离风、交通和地震的频率。化学家凭分子的振动来辨认分子。计时这门技艺，从惠更斯（Huygens）的摆钟到石英表和原子钟，就是制造完美振子的艺术。转动支配着一切，从桌球的旋转到人造卫星的稳定性皆然。至于哪些参考系（frame of reference）才算“自然”这个问题，则经由引力与加速度的等效性，引出了爱因斯坦（Einstein）的广义相对论。

本章最后有六道题目，归为一组，称为出人意表的轨迹：抛体、蚂蚁、外野手和铲雪车，它们的表现都与直觉所预料的不同。这些题目短小而优雅，每一道的核心都有一个真正的数学概念：包络线（envelope）、单调性（monotonicity）、反馈（feedback）、发散（divergence）、线性微分方程（linear differential equation），以及抛物线（parabola）与悬链线（catenary）之间的分别。

你在大学会遇到甚么

大学一年级的动力学课程涵盖简谐运动、阻尼（damped）谐运动和受迫（forced）谐运动、共振（resonance），以及耦合振子（coupled oscillators）及其简正模态（normal modes）（这是线性代数与力学交汇之处）。课程也会处理刚体（rigid body）、转动惯量

（moment of inertia）和滚动，以及在加速参考系和旋转参考系中的运动，当中会出现离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）。往后的课程会把这一切发展成拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）和哈密顿力学（Hamiltonian mechanics），坐标的选择在其中成为核心主题；又会发展成波动理论，而波就是在空间中散布开来的振动。非线性振动，例如大振幅的单摆，则通向椭圆函数（elliptic functions）和第 8 章的动力系统（dynamical systems）。

贯穿本章的问题

三大问题

1. **运动在甚么时候是简单的？**一个系统在甚么时候会以单一而固定的频率振动？若不是这样，又会发生甚么事？
2. **甚么才是合适的观点？**哪些坐标、哪些变量、哪个参考系能令问题变得容易？
3. **直觉可信吗？**日常对运动的直觉在哪里出错？数学又如何纠正它？

本章由振动开始：共振（Section 11.1）、简正模态、真实的单摆和等时曲线（tautochrone）。接着转向参考系和刚体：一列加速中的火车、一颗旋转的弹珠、一根表现得像三个质点的杆，以及一个可以按三种不同倾斜角度静止的立体。最后六节就是那些出人意表的轨迹。

本章的概念

§	课题	概念
11.1	受迫振动	共振与拍（beats）
11.2	耦合振子	简正模态就是特征向量（eigenvectors）
11.3	真实的单摆	椭圆积分（elliptic integrals）；算术几何平均（AGM）
11.4	等时曲线	以弧长（arc length）表示的简谐运动
11.5	运动参考系	假想力（fictitious forces）；等效原理（equivalence principle）
11.6	滚动与滑动	一个守恒的角动量（angular momentum）
11.7	转动惯量	动力等效（dynamical equivalence）；辛普森法则（Simpson's rule）
11.8	稳定性	通过质心（centre of mass）的法线
11.9	抛体	轨迹的包络线
11.10	抛体	距离不一定递增
11.11	接球	一条反馈法则
11.12	伸长的绳	分数与调和级数（harmonic series）
11.13	铲雪车	把时间看成距离的函数
11.14	悬索桥	是抛物线，不是悬链线

Section 11.6 和 Section 11.7 这两节用到转动动力学（rotational dynamics）和转动惯量，这些内容已于 2019 年从 STEP 考试范围中删去。收录它们，是因为这两道都是极好的题目；每一节都会给出所需的知识。

如何阅读本章

动手计算之前，先问问题目想要的是哪个变量。等时曲线用弧长，耦合弹簧用 $x \pm y$，蚂蚁用绳子的分数，铲雪车则把时间看成距离的函数：在每一种情况下，选对了变量，难题就会变成熟悉的问题。

11.1 共振

题目

STEP II 1991，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/91-s2-q12`

引子

推秋千上的小孩时，只要每一下都推在恰当的时刻，轻轻的推力也会累积成大幅的摆动；节奏不对的话，就几乎毫无效果。每个振动系统都有其*固有频率*（natural frequency），以这个频率去驱动它，所得的反应会大得与所花的力气完全不成比例。这就是*共振*（resonance）。歌手能够震碎酒杯，士兵过桥时要打乱步伐，收音机能够从数以千计的电台中选出其中一个，都是这个缘故。

这道题目摇动一条弹性绳的顶端，问绳子在甚么情况下会保持拉紧。答案含有因子 $\frac{1}{n-p}$，当驱动频率 p 趋近固有频率 n 时，这个因子会趋于无穷大：在接近共振时，轻轻一摇已足以令绳子松弛。

动笔之前

想一想 质点悬挂在平衡位置，绳的伸长量（extension）为 c。若绳的弹性模量（modulus）为 λ，则 λ、a、c、m 与 g 之间有甚么关系？当顶端向下移动了 $b\sin pt$，而质点向下移动了 x 时，伸长量是多少？

在平衡状态下，张力（tension）等于重量：$\frac{\lambda c}{a} = mg$。当顶端向下位移 $b\sin pt$，而质点向下位移 x 时，绳的长度增加了 $x - b\sin pt$，所以伸长量是 $c + x - b\sin pt$。

逐步解题

阶段 1　运动方程

取向下为正，作用于质点的力有它的重量 mg，以及向上的张力 $\frac{\lambda}{a}(c+x-b\sin pt)$：

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda}{a}(c+x-b\sin pt) = -\frac{\lambda}{a}(x-b\sin pt),$$

这里用了 $\frac{\lambda c}{a} = mg$。由于 $\frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2$，上式即 $\ddot{x} = -n^2(x-b\sin pt)$。 ■

质点受到一个弹簧力，把它拉向移动中的点 $b\sin pt$。假如没有驱动，它会以角频率（angular frequency）n 振动，这就是它的固有频率。

阶段 2　求解

> ? **想一想**　方程是 $\ddot{x}+n^2x = n^2b\sin pt$。试用 $x = C\sin pt$ 这种形式的特解（particular solution），然后加上 $\ddot{x}+n^2x=0$ 的通解（general solution）。质点满足哪些初始条件？

代入 $x = C\sin pt$ 得 $(-p^2+n^2)C = n^2b$，所以 $C = \frac{n^2b}{n^2-p^2}$（这里需要 $p \neq n$）。余函数（complementary function）是 $D\cos nt + E\sin nt$。质点由平衡位置从静止开始运动：$x(0)=0$ 令 $D=0$，而 $\dot{x}(0)=0$ 给出 $Cp+En=0$，所以 $E = -\frac{nbp}{n^2-p^2}$。综合起来，

$$x(t) = \frac{bn}{n^2-p^2}(n\sin pt - p\sin nt). \qquad ■$$

阶段 3　保持拉紧

> ? **想一想**　绳子拉紧，当且仅当它的伸长量为正。试把伸长量 $c+x-b\sin pt$ 以 t 表示。

从 $x(t)$ 减去 $b\sin pt$，

$$\begin{aligned} x - b\sin pt &= \frac{b}{n^2-p^2}\left(n^2\sin pt - np\sin nt - (n^2-p^2)\sin pt\right) \\ &= \frac{bp}{n^2-p^2}(p\sin pt - n\sin nt). \end{aligned}$$

所以绳子自始至终保持拉紧，当且仅当

$$c + \frac{bp}{n^2-p^2}(p\sin pt - n\sin nt) \geq 0 \qquad \text{对所有} t \geq 0.$$

想一想 $p\sin pt - n\sin nt$ 最小可以负到甚么程度?

由于 $|\sin| \le 1$，我们有 $p\sin pt - n\sin nt \ge -(p+n)$。所以伸长量至少是

$$c - \frac{bp(n+p)}{n^2-p^2} = c - \frac{bp}{n-p},$$

当 $pb < (n-p)c$ 时，这个值为正。 ■

停一停，试一试 当 p 趋近 n 时，这个条件会变成怎样? 当 $p = 0.9n$ 时，摇动的振幅（amplitude）b 要有多小? 当 $p = 0.99n$ 时又如何?

回顾

- **由平衡位置量起。**利用平衡时的伸长量 c，重力便从方程中消去了。
- **特解加余函数。**频率为 p 的受迫响应，加上频率为 n 的自由振动，其中的常数由初始条件决定。
- **估界，不必求解。**我们没有准确求出伸长量的最小值；对正弦作一个粗略的估界，已足以得出一个充分条件（sufficient condition）。

背后的数学

共振极限

在解中令 $p \to n$。分子和分母都趋于零，计算极限（或使用洛必达法则（l'Hôpital's rule），对 p 求导）可得

$$x(t) \to \frac{b}{2}(\sin nt - nt\cos nt).$$

$nt\cos nt$ 这一项会无止境地增大：恰好以固有频率驱动时，振幅随时间线性增长，每一下推动都与运动同步，为它再添一分。在略低于共振的频率下，两个频率时而同步、时而错开，产生拍（beats）：振幅以缓慢的频率 $n-p$ 时涨时落（图 11.1.1）。两条结他弦的音高几乎调准时，听到的也是同样的拍。

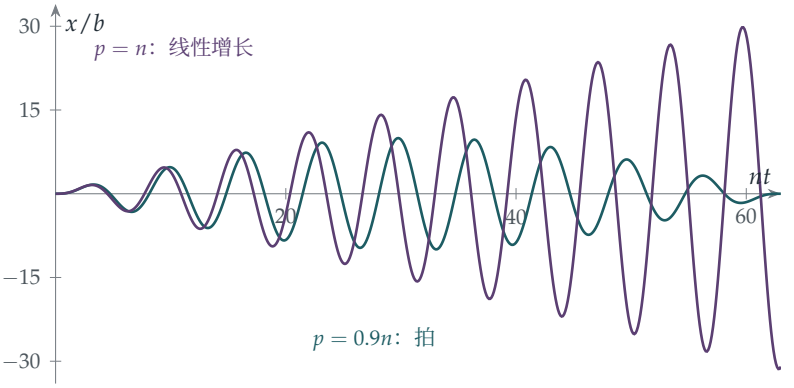


图 11.1.1　质点的响应（不考虑绳子松弛），以摇动振幅 b 为单位。当 $p = 0.9n$（蓝绿色）时，响应增大至约为 b 的十倍，然后再度消退，拍的周期为 $\frac{2\pi}{n-p}$。在恰好共振，即 $p = n$（紫红色）时，振幅无止境地增长。

阻尼与共振曲线

现实中的系统会因摩擦或空气阻力而损失能量，这就限制了振幅的增长。有阻尼（damping）时，系统对频率为 p 的驱动力的稳态响应，其振幅在固有频率附近达到峰值；峰愈尖锐，阻尼就愈小。工程师用品质因数（quality factor）Q 来描述这一点：粗略地说，它是系统在失去大部分能量之前所完成的振动次数。酒杯的 Q 数以千计，所以一个恰好等于其固有频率的持续音可以把它震碎。汽车的悬挂系统则刻意设计成 Q 值很低，以免路面颠簸令车身弹跳不止。

会动的桥

1831 年，一队士兵以整齐步伐操过曼彻斯特附近的布劳顿吊桥（Broughton Suspension Bridge），令桥身振动，最终倒塌；自此以后，军队过桥时都奉命打乱步伐。伦敦千禧桥（London Millennium Bridge）于 2000 年 6 月启用，人群一踏上桥，桥身便开始左右摇摆：行人不自觉地调整步伐去配合摇摆，同步地为它注入能量，结果该桥关闭了两年，以便加装阻尼器。1940 年塔科马海峡吊桥（Tacoma Narrows Bridge）那次著名的倒塌，常被说成是共振，但其实是另一种现象，即气动弹性颤振（aeroelastic flutter），当中风所施的力取决于桥本身的运动。要分析它，需要用到自激振动（self-excited oscillation）和极限环（limit cycle）的概念（Section 8.4）。

思维技巧

> **把受迫响应与自由响应叠加**
>
> 对于受周期力驱动的线性方程，其解是驱动频率下的响应，加上固有频率下的自由振动，后者按初始条件选定。
>
> 这个方法之所以可行，全靠线性（linearity）：解可以相加。在大学里，同一原理应用于多个驱动频率之和，便引出傅里叶分析（Fourier analysis）、工程学中的传递函数（transfer function），以及物理学中的格林函数（Green's function）。

延伸练习

1 **下坠的升降机。**试做 STEP II 1996，第 11 题（`step.maths.org/questions/96-s2-q11`）：升降机内有一个质量系于弹性绳上，升降机先开始加速，其后停止加速。留意最终的振幅如何取决于加速持续的时间。

2 **共振之时。**试用特解 $x = Ct\cos nt$，直接解 $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin nt$，其中 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$。验证所得结果与上文的极限一致。

3 **拍。**证明 $n\sin pt - p\sin nt$ 可写成两项之和，而当 p 接近 n 时，其中一项近似于 $2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}$。由此解释拍的周期为何是 $\frac{2\pi}{n-p}$。

4 **有阻尼的共振。**对于 $\ddot{x} + 2k\dot{x} + n^2 x = F\cos pt$，其中 $k > 0$ 且很小，求稳态振幅，并证明当 $p^2 = n^2 - 2k^2$ 时振幅最大。

延伸阅读

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series）。第 4 章讲述受迫振动与共振，是这个课题的经典论述。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Penguin）。讲述事物如何趋于同步，从萤火虫谈到千禧桥。
- **Henry Petroski, *To Engineer Is Human***（Vintage）。讲述工程上的失败个案，包括历史专栏中提到的几座桥。

11.2 简正模式

题目

STEP III 2014，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/14-s3-q10`

引子

一个挂在弹簧上的质点，会以简单而规律的方式上下弹动。把两个质点用弹簧连起来，运动看起来就复杂得多：每个质点都不规则地忽动忽停，能量在两者之间来回流转。然而在这复杂的表象背后，藏着两种极其简单的运动，称为*简正模态*（normal modes）：两个质点或一起同向运动，或恰好反向运动，而每个模态各以自己的频率（frequency）振荡。系统的任何运动，都是这两个模态的组合。

本题要找出夹在三条弹簧之间的两个质点的简正模态，然后证明一个令人惊讶的结论：若系统由静止开始，而其中一个质点有初始位移，则系统*永远不会*回到起始位置。原因在于两个频率之比是 $\sqrt{3}$，而 $\sqrt{3}$ 是无理数（irrational number）。

动笔之前

想一想 设 X 与 P 的距离为 $a+x$，Y 与 Q 的距离为 $a+y$，那么中间的弹簧 XY 有多长？当 x 和 y 皆为正数时，哪些弹簧被拉长，哪些被压缩？

三段长度之和为 $3a$，所以 $XY = 3a-(a+x)-(a+y) = a-x-y$。当 $x, y > 0$ 时，外侧两条弹簧被拉长（伸长量分别为 x 和 y），中间一条则被压缩（压缩量为 $x+y$）。

逐步解题

阶段 1　运动方程

沿着由 P 指向 Q 的方向量度 x。弹簧 PX 的伸长量（extension）为 x，所以它的张力（tension）$\frac{\lambda x}{a}$ 把 X 拉回 P 的方向。弹簧 XY 的伸长量为 $-(x+y)$，所以它的张力 $-\frac{\lambda(x+y)}{a}$ 把 X 拉向 Y（负的张力即是推力）。因此

$$m\ddot{x} = -\frac{\lambda x}{a} - \frac{\lambda(x+y)}{a} = -\frac{\lambda}{a}(2x+y). \qquad \blacksquare$$

根据对称性（把 X 与 Y、P 与 Q 的角色互换），

$$m\ddot{y} = -\frac{\lambda}{a}(2y+x).$$

阶段 2　解耦

> **想一想**　每条方程都同时涉及 x 和 y。把两条方程怎样组合，才会只涉及 x 和 y 的某一个组合？

把两式相减及相加，得

$$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -\frac{\lambda}{a}(x-y), \qquad m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -\frac{3\lambda}{a}(x+y).$$

两者都是简谐运动（simple harmonic motion）的方程：$x-y$ 以 $\omega^2 = \frac{\lambda}{ma}$ 振荡，而 $x+y$ 则以 $3\omega^2$ 振荡。

阶段 3　初始条件

起初 $XP = a$ 及 $YQ = \frac{1}{2}a$，所以 $x = 0$ 及 $y = -\frac{1}{2}a$，而且两个质点都处于静止。因此在 $t = 0$ 时，$x - y = \frac{1}{2}a$ 及 $x + y = -\frac{1}{2}a$，而两者的变化率皆为零，由此得

$$x - y = \tfrac{1}{2}a\cos\omega t, \qquad x + y = -\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

所以 $A = \frac{1}{2}a$ 及 $B = 0$。 $\blacksquare$

阶段 4　永不返回

> **想一想**　把 y 写成 t 的函数。若 Y 要回到起始位置，便须 $y = -\frac{1}{2}a$。这时两个余弦必须各等于甚么？

两式相减，得 $y = \frac{1}{2}\big((x+y)-(x-y)\big) = -\frac{1}{4}a\big(\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t\big)$。要 $y = -\frac{1}{2}a$，便需要 $\cos\sqrt{3}\,\omega t + \cos\omega t = 2$；由于每个余弦最大只能是 1，两者必须都等于 1：

$$\omega t = 2\pi k, \qquad \sqrt{3}\,\omega t = 2\pi j$$

其中 k 和 j 为整数。当 $t > 0$ 时，$k \geq 1$，两式相除得 $\sqrt{3} = \frac{j}{k}$，但 $\sqrt{3}$ 是无理数，所以这是不可能的。因此 Y 永远不会回到起始位置。 $\blacksquare$

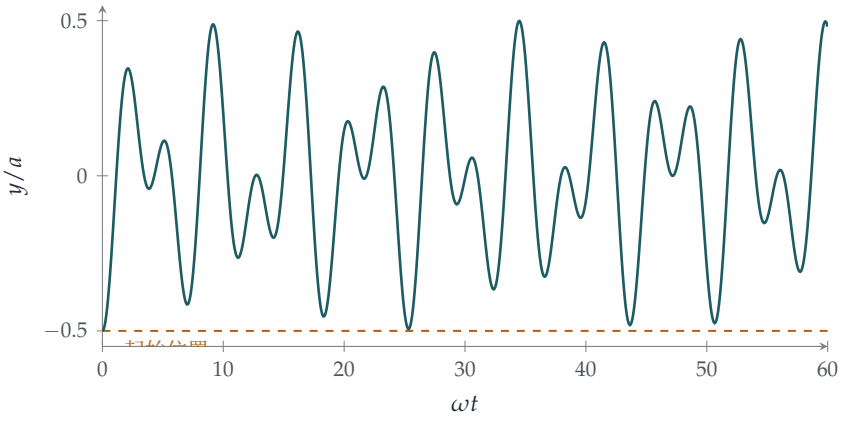


图 11.2.1 质点 Y 的位移 y。它是两个振荡之和，而两者频率之比为 $\sqrt{3}:1$，所以图形永不重复。Y 一次又一次地接近起始位置（虚线），例如在 $\omega t \approx 25$ 附近（该处 $\omega t \approx 8\pi$ 及 $\sqrt{3}\,\omega t \approx 14\pi$），但永远不会刚好到达。

回顾

- **找出能够解耦的组合。** $x-y$ 和 $x+y$ 各自满足一条属于自己的方程。
- **对称性会提示这些组合。** 把左右两边互换，系统保持不变，所以对称和反对称的组合是很自然的选择。
- **无理性会带来物理后果。** 运动之所以不是周期性的，是因为频率之比是无理数。

背后的数学

简正模态就是特征向量

把两条方程写成一条矩阵方程：

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{\lambda}{a}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

能够解耦的组合，正是这个矩阵的特征向量（eigenvectors）：$(1,-1)$，其特征值（eigenvalue）为 1；以及 $(1,1)$，其特征值为 3（Section 7.2）。在第一个模态中，$x=-y$：两个质点沿直线同向运动（记住 x 和 y 是从相反的两端量度的），中间的弹簧长度保持不变。在第二个模态中，$x=y$：两个质点反向运动，把中间的弹簧一压一拉，频率因而较高。频率的平方就是特征值乘以 $\frac{\lambda}{ma}$。

无论有多少个质点和弹簧，这个方法都适用。一个由 N 个耦合振子（coupled oscillators）组成的系统有 N 个简正模态，它们由一个对称矩阵的特征向量给出，而谱定理（spectral

theorem）保证这些模态必定存在，并且互相垂直。分子以简正模态振动，化学家正是凭分子所吸收的红外光来辨认它们。建筑物和桥梁也有简正模态，工程师必须令这些模态的频率远离风和地震的频率。当质点的数目趋向无限时，简正模态就变成振动弦线的谐波（harmonics），这正是傅里叶分析（Fourier analysis）的起点。

接近而不到达

虽然 Y 永远不会刚好返回，但它可以接近到任意程度。原因是克罗内克（Kronecker）的一条定理：若 α 是无理数，则各倍数 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots$ 取模 1 之后，可以任意接近 $[0,1]$ 内的每一个数。因此我们可以找到一些时刻，使 ωt 是 2π 的倍数，而 $\sqrt{3}\,\omega t$ 与另一个这样的倍数之差小于任何指定的容许误差。这种运动是*准周期*（quasi-periodic）的：它在一个环面（torus）上不断缠绕（每个模态对应一个角），却永远不会闭合。有理与无理频率比之间的这种区别，同样是关于太阳系稳定性的 KAM 定理的核心。

思维技巧

> **以变量代换把方程解耦**
>
> *当方程互相耦合时，设法找出各自独立演变的变量组合。在线性问题中，这些组合就是特征向量。*
>
> 这与 Section 10.6 中质心和相对坐标的想法如出一辙。到了大学，它就成为对角化（diagonalisation）：选取一组令矩阵成为对角矩阵的基（basis），一组耦合的方程便会分拆成各自独立的方程。

延伸练习

1. **能量。**证明总能量 $\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\tfrac{\lambda}{2a}\big(x^2+y^2+(x+y)^2\big)$ 是常数，并证明它可以分拆成两项之和，每个简正模态各占一项，而每一项本身都是常数。

2. **纯模态。**应该怎样让两个质点开始运动，才能使运动是周期性的，且周期为 $\tfrac{2\pi}{\omega}$？若周期为 $\tfrac{2\pi}{\sqrt{3}\,\omega}$ 又如何？

3. **较硬的中间弹簧。**若中间弹簧的弹性模量（modulus of elasticity）是 μ 而不是 λ，求两个简正模态的频率。当 μ/λ 取哪些值时，所有运动都是周期性的？

4. **三个质点。**三个质量相等的质点排成一线，由四条相同的弹簧连接在两个固定点之间。求对应的矩阵及其特征值 $(2-\sqrt{2},\,2,\,2+\sqrt{2})$，并描述三个简正模态。

延伸阅读

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***（MIT Introductory Physics Series），第 5 章，讲述耦合振子与简正模态。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge），关于特征值的一章，当中以弹簧与质点作为主要例子。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 8 章，讲述环面上的准周期运动。

11.3 真实的摆

题目

STEP III 1998，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/98-s3-q11`

引子

每个修读物理的学生都学过：单摆（pendulum）的周期（period）是 $2\pi\sqrt{l/g}$，与摆动的幅度无关。伽利略（Galileo）对此深信不疑，相传他曾在比萨大教堂以自己的脉搏为一盏摇晃的吊灯计时；摆钟之所以能够报时，靠的也正是这一点。然而这并不完全正确。这条公式源自近似式 $\sin\theta \approx \theta$，而摆动弧度大的单摆，所需的时间会较长。在 $90°$ 时，周期长了 18%；若单摆从几乎倒立的位置释放，所需的时间则要多长有多长。

本题先把精确的周期写成一个积分，再求出中等摆幅下的第一个修正项。这个积分无法用初等函数求出：它是一个*椭圆积分*（elliptic integral），而人们如何驯服这类积分的故事，由高斯（Gauss）的算术几何平均一直延伸到椭圆曲线的理论。

动笔之前

想一想 摆锤沿半径为 l 的圆周运动。以 θ 和 $\dot\theta$ 表示，它的速率和高度（相对于最低点）分别是甚么？

速率是 $l\dot\theta$，而距最低点的高度是 $l(1-\cos\theta)$。由于绳子不作功（其张力恒与运动方向垂直），能量守恒（conservation of energy）。

逐步解题

阶段 1 能量

在最大摆角 γ 处，摆锤瞬时静止。由能量守恒得

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl(1-\cos\theta) = mgl(1-\cos\gamma),$$

两边除以 ml，得 $\tfrac{1}{2}l\dot\theta^2 = g(\cos\theta-\cos\gamma)$。 ■

阶段 2　把周期写成积分

想一想　怎样用半角表示 $\cos\theta-\cos\gamma$？另外，由 $\theta=0$ 摆到 $\theta=\gamma$ 占了周期的多少？

利用 $\cos\theta = 1-2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$，可得 $\cos\theta-\cos\gamma = 2(\sin^2\tfrac{\gamma}{2}-\sin^2\tfrac{\theta}{2})$，所以

$$\dot\theta = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2}.$$

根据对称性，由 0 摆到 γ 需时四分之一个周期，所以

$$P = 4\int_0^{\gamma}\frac{\mathrm{d}\theta}{\dot\theta} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta. \qquad ■$$

阶段 3　消除奇点

想一想　被积函数（integrand）在 $\theta=\gamma$ 处变成无穷大。设 $k=\sin\tfrac{\gamma}{2}$，并作代换（substitution）$\sin\tfrac{\theta}{2} = k\sin\phi$。$0\le\theta\le\gamma$ 对应于 ϕ 的甚么范围？被积函数会变成怎样？

当 θ 由 0 变到 γ 时，ϕ 由 0 变到 $\tfrac{\pi}{2}$。求导得 $\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$，所以

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

另一方面，$\sin^2\tfrac{\gamma}{2}-\sin^2\tfrac{\theta}{2} = k^2(1-\sin^2\phi) = k^2\cos^2\phi$。那些棘手的因子互相抵销：

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

由于 $k<1$，新的被积函数性质十分良好。

阶段 4　第一个修正项

想一想 当 k 很小时，用二项式定理（binomial theorem）展开 $(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$。$\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi$ 等于甚么？

准确至一阶，$(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\phi$，而 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{4}$。所以

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

当 γ 很小时，$k=\sin\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma}{2}$，故 $k^2\approx\frac{\gamma^2}{4}$，于是

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right). \qquad \blacksquare$$

摆幅为 20°（$\gamma\approx 0.35$）时，修正量不足 1%；在 60° 时则约为 7%（图 11.3.1）。

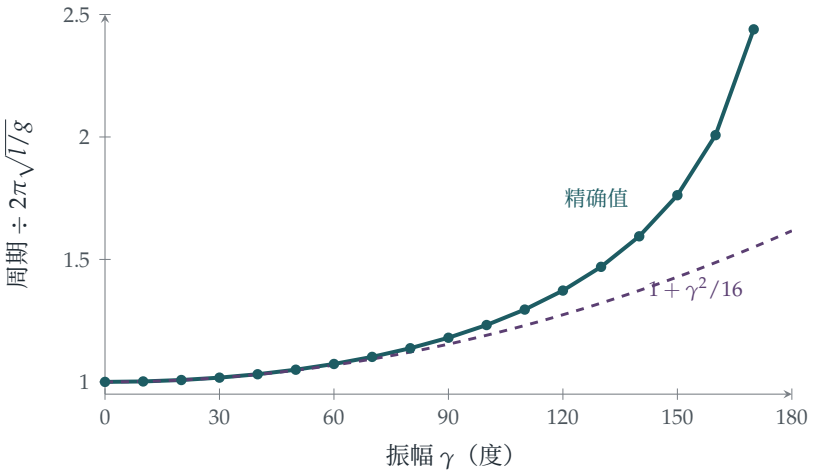


图 11.3.1 单摆的精确周期（蓝绿色）相对于小角度值的比，对振幅（amplitude）作图，并与近似式 $1+\gamma^2/16$（紫红色虚线）比较。在大约 60° 以内，这个近似极佳。当 $\gamma\to 180°$ 时，真正的周期趋向无穷大：一个倒立平衡的单摆要花无限长的时间才会倒下。

回顾

- **能量给出首次积分（first integral）。**二阶方程变成了一阶方程，而周期则变成了一个积分。
- **代换驯服奇点（singularity）。**被积函数在转向点处趋向无穷大；代换 $\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\phi$ 消除了这个问题。

- **先求精确，再作近似。**我们先求出精确的公式，然后将它展开，这样同时可以知道近似的效果有多好。

背后的数学

椭圆积分

积分

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

称为*第一类完全椭圆积分*（complete elliptic integral of the first kind），这个名称的由来，是因为与它相近的另一个积分给出椭圆的周界。精确的周期是 $P = 4\sqrt{l/g}\,K\!\left(\sin\tfrac{\gamma}{2}\right)$。把被积函数完全展开，再利用 Section 4.4 中的沃利斯积分（Wallis integrals）$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\phi\,\mathrm{d}\phi$ 逐项积分，便得

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right).$$

$K(k)$ 无法以有限个熟悉的函数组合而成；它是一个名副其实的新函数。

高斯的非凡公式

计算 K 有一个好得多的方法。你在 Section 2.6 已见过*算术几何平均*（arithmetic–geometric mean）：由 a 和 b 开始，反复以它们的算术平均和几何平均取代它们。高斯在 1799 年发现

$$K(k) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{AGM}\!\left(1, \sqrt{1 - k^2}\right)},$$

所以振幅为 γ 的单摆，其周期恰好是

$$P = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{\mathrm{AGM}\!\left(1, \cos\tfrac{\gamma}{2}\right)}.$$

AGM 收敛得极快：摆幅在大约 160° 以内时，只需三四步便可求得准确至十位有效数字的周期，图 11.3.1 中的数值正是这样算出来的。接近 180° 时，两个初始值 1 和 $\cos\frac{\gamma}{2}$ 相距甚远，需要多走一两步，但即使在 179°，五步也已足够。高斯在日记中写道，这项发现“开辟了一个全新的分析领域”，而他说得一点不错：把椭圆积分反演，引领阿贝尔（Abel）和雅可比（Jacobi）发现了*椭圆函数*（elliptic functions），而椭圆函数又引出了*椭圆曲线*（elliptic curves）。椭圆曲线如今是数论的核心（它们正是证明费马最后定理（Fermat's Last Theorem）的关键），也是保障互联网安全的密码学的核心。

伽利略的吊灯与惠更斯的时钟

伽利略大约在 1602 年提出，单摆的周期与振幅无关；对于他所研究的小幅摆动，这是个很好的近似。惠更斯（Christiaan Huygens）意识到这并不精确，并在 1659 年找到了一条曲线，沿着它摆动时周期确实与振幅无关：那就是摆线（cycloid），即 Section 11.4 的主题。他由 1656 年起制造的摆钟，把计时的误差由每天约一刻钟减至约十五秒。航海天文钟（marine chronometer）解决了在海上测定经度的难题，它后来完全舍弃了单摆，但直至 1920 年代，摆钟仍然是世上最准确的计时器。

思维技巧

由精确积分到级数近似

当一个量由无法求值的积分给出时，先把它变换成性质良好的形式，然后展开被积函数并逐项积分。

物理学家正是这样为理想化的结果求出修正项的，这也是*微扰理论*（perturbation theory）的起点。到了大学，你会学到逐项积分在甚么情况下才成立（一致收敛（uniform convergence）），以及怎样估计截断级数所造成的误差。

延伸练习

1. **系着的质点。**试做 STEP III 2015，第 9 题（`step.maths.org/questions/15-s3-q9`）：这个振子即使在小幅振动时，周期也取决于振幅。为甚么它会这样，而单摆却不会？

2. **下一项。**把二项式展开多取一项，证明 $P \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}+\frac{11\gamma^4}{3072}\right)$。

3. **徒手计算 AGM。**用三步 AGM 估算振幅为 90° 的单摆的周期，并与图中的数值 1.1803 比较。

4. **时钟。**一座摆钟经调校后，在振幅为 4° 时走时完全准确。若它的振幅增至 5°，它每天会慢多少秒？

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 4 章，当中讨论了大振幅的单摆。

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。高斯的发现及其应用，包括计算 π 的最快方法。
- **Dava Sobel, *Longitude***（Fourth Estate）。海上计时的故事，讲述单摆以外的发展。

11.4 等时曲线

题目

STEP III 1994，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/94-s3-q9`

引子

在一个碗内同时放开两粒弹珠，一粒靠近碗边，另一粒只比碗底高一点。哪一粒先到碗底？在普通的碗里，通常是起点较低的那粒胜出。不过有一种碗，无论弹珠从哪里出发，总是同时到达。这就是*等时曲线*（tautochrone，希腊文意为“相同时间”），它的横切面是一条*摆线*（cycloid），即滚动的轮子边缘上一点所描出的曲线。

惠更斯（Huygens）在 1659 年发现了这个性质，并用它设计出一种周期与摆幅无关的摆钟，修正了 Section 11.3 中发现的缺陷。本题只用寥寥数行便证明了等时性质，关键在于选对变量：用沿曲线量度的距离，而不是水平位置。

动笔之前

想一想 碗面是光滑的。有哪些力作用在质点上？其中哪些力有作功？

重力和法向反作用力（normal reaction）。法向反作用力垂直于碗面，因而垂直于运动方向，所以不作功。只有重力作功，故能量守恒。

逐步解题

阶段 1　沿曲线的能量

由于 s 是弧长（arc length），质点沿碗面的速率是 $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$。由能量守恒（conservation of

energy）得 $\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + mgy = $ 常数，所以 $\dot{s}^2 + 2gy$ 是常数。 ■

阶段 2　以 s 表示的简谐运动

想一想　利用 $s = 2\sqrt{ky}$，把 y 换成 s 的函数。所得的方程描述的是哪一种运动？

由于 $y = \frac{s^2}{4k}$，能量方程变成

$$\dot{s}^2 + \frac{g}{2k}s^2 = \text{常数} = \frac{g}{2k}s_0^2,$$

其中 $s_0 = 2\sqrt{kh}$ 是起始弧长（质点由静止出发）。求导后得 $2\dot{s}\ddot{s} + \frac{g}{k}s\dot{s} = 0$，所以

$$\ddot{s} = -\frac{g}{2k}\,s.$$

这是以 s 为变量的简谐运动（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \frac{g}{2k}$，与振幅（amplitude）无关：$s = s_0\cos\omega t$。

阶段 3　到达底部所需的时间

质点经过四分之一个周期后到达 V（该处 $s = 0$）：

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

这与 h 无关。 ■

停一停，试一试　为甚么这样行得通？沿曲线的“回复力”是 g 乘以斜率，即 $g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{g}{2k}s$：恰好与沿曲线量度、离底部的距离成正比。这正是简谐运动的定义性质。起点较高的质点要走的路较长，但所受的推动也按比例加大。

阶段 4　两个质点

想一想　两个质点何时到达 V？到达时速率是多少？谁的动量较大？

两者从相反的两边，在同一时刻 $T = \pi\sqrt{k/(2g)}$ 到达 V。在 V 的速率是 ω 乘以 s 的振幅，与 $\sqrt{\text{高度}}$ 成正比。设较重的质点从高度 h 放开，在 V 的速率为 U；较轻的质点从 $\alpha^2 h$ 放开，速率为 αU。它们的动量（momentum）分别是 $\alpha m\cdot U$ 和 $m\cdot\alpha U$，方向相反：大小相等，方向相反。碰撞时的总动量为零。

想一想　总动量为零，而恢复系数（coefficient of restitution）为 α，碰撞刚结束时两者的速度是多少？

动量保持为零，所以碰撞后两个质点仍然朝相反方向运动，动量大小相等，而它们的相对速率是接近速率 $\alpha U + U$ 的 α 倍。若较轻的质点（质量 αm）此时以速率 w 运动，则较重的质点（质量 m）以速率 αw 运动，且 $w + \alpha w = \alpha(1+\alpha)U$，所以 $w = \alpha U$。每个质点反弹时，速率都乘以 α：质量为 αm 的质点以 αU 离开，质量为 m 的质点以 $\alpha^2 U$ 离开。

阶段 5 整个运动

每个质点现在沿自己的一边爬升，所达高度缩减为原来的 α^2 倍（因为高度与速率的平方成正比）：质量为 αm 的质点升至 $\alpha^2 h$，质量为 m 的质点升至 $\alpha^4 h$。由等时性质，两者在 $2T$ 之后恰好同一时刻回到 V，动量仍然大小相等、方向相反。同样的碰撞再次发生，只是所有速率都按 α 的比例缩小。因此：

- 两个质点总是在 V 碰撞，时刻为 $T, 3T, 5T, \ldots$；
- 第 n 次碰撞后，它们分别升至高度 $\alpha^{2n}h$ 和 $\alpha^{2n+2}h$；
- 运动按几何级数式衰减，但永不停止：碰撞有无限多次，并且永远持续下去。 ■

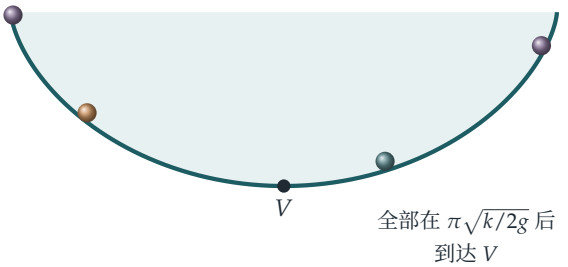


图 11.4.1 等时曲线：一条倒转的摆线，由沿直线滚动的轮子边缘上一点描出。弹珠从曲线上任何位置由静止放开，都在同一时刻到达最低点 V。对于由半径为 R 的轮子生成的摆线，弧长与高度满足 $s^2 = 8Ry$，所以 $k = 2R$。

回顾

- **选择自然的变量。**以弧长 s 表示时，运动恰好是简谐运动。以 x 或 y 表示，则一团糟。
- **能量给出方程。**对能量方程求导，便直接得出运动方程。
- **时间上的对称。**由于每一趟到达底部的行程所需时间都相同，两个质点永远保持同步，碰撞也就原样重复。

背后的数学

为甚么是摆线？

半径为 R 的轮子在一条直线下方滚动，描出摆线 $x = R(t + \sin t)$，$y = R(1 - \cos t)$。于是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = R(1 + \cos t)$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = R \sin t$，所以沿曲线的速率是 $R\sqrt{2 + 2\cos t} = 2R \cos \frac{t}{2}$。积分后，由底部起计的弧长是 $s = 4R \sin \frac{t}{2}$，而 $y = 2R \sin^2 \frac{t}{2}$。因此 $s^2 = 8Ry$：摆线正是满足 $s = 2\sqrt{ky}$ 的曲线，其中 $k = 2R$。反过来说，要求回复力与 s 成正比，就迫使曲线必定是摆线。

最速降线

1696 年，约翰·伯努利（Johann Bernoulli）向欧洲的数学家提出挑战：一粒珠子从一点滑到较低的另一点（不在其正下方），沿哪一条曲线所需的时间*最短*？答案是*最速降线*（brachistochrone），它同样是一条摆线。据说牛顿（Newton）收到题目后，一个晚上就解决了；他匿名发表了自己的解法，但伯努利认出了作者，说是“从爪认出狮子”。这个问题是*变分法*（calculus of variations）的开山例子，你在 Section 4.7 已经见过：找出使某个由积分定义的量取最小值的曲线。

惠更斯的摆线钟

惠更斯知道单摆计时并不完美，因为它的周期取决于振幅。他在《*Horologium Oscillatorium*》（1673 年）中说明了怎样令摆锤沿摆线运动：把摆线挂在两块弯成摆线形状的“夹板”之间，摆线便会贴着夹板卷绕，使摆锤本身描出一条摆线（摆线的*渐伸线*（involute）是另一条摆线）。实际上，夹板因摩擦而引入的误差比它消除的还要多，钟表匠于是改为保持小幅摆动。然而惠更斯的分析开创了渐屈线（evolute）与渐伸线的理论，他这部著作也是十七世纪力学的伟大作品之一。

思维技巧

找出令运动变得简单的变量

沿曲线的运动，往往以沿曲线的距离来表示最为简单。要找出令方程变成线性的那个变量。

到了大学，这会发展成拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中*广义坐标*（generalised coordinates）的概念：任何能描述系统位形的变量都可以采用，选得好，就能令问题变得可解。

延伸练习

1 **不同的高度。**一个质点在等时曲线碗内从高度 h 放开。证明它在 V 的速率是 $\sqrt{2gh}$（由能量守恒，必然如此），并验证这与 ωs_0 一致。

2 **普通的碗。**在半径为 R 的半球形碗内，比较从很小的高度到达底部所需的时间与从碗边出发所需的时间。哪一个较长？（利用 Section 11.3 的结果。）

3 **质量相等。**把题目的第二部分重做一次，这次两个质点质量同为 m，分别从高度 h_1 和 h_2 放开，恢复系数为 e。它们是否仍然总是在 V 碰撞？

4 **摆线的弧长。**证明摆线的一拱长度为 $8R$，而拱下的面积为 $3\pi R^2$，即滚动圆面积的三倍。

延伸阅读

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。书中包括等时曲线和最速降线，并附有相关历史。
- **E. A. Whitman, "Some historical notes on the cycloid"**，*American Mathematical Monthly* 50 (1943)。讲述摆线为何被称为"几何学家的海伦"。
- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。以历史故事的方式讲述最速降线及其他最优化问题。

11.5 加速火车中的重力

题目

STEP II 2021，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

引子

火车驶离车站时，你会感到自己被压向椅背；桌上那杯咖啡的液面倾斜了；地板上的球滚向车尾。从车厢内看，一切就像重力倾斜了一样：除了向下，还稍微指向后方。爱因斯坦（Einstein）领悟到这不仅仅是比喻，并把这个领悟称为“我一生中最快乐的想法”：在局部范围内，重力与加速度是无法区分的。

这道题把一颗珠子穿在弯曲的金属线上，再放进一列正在加速的火车里。从火车上看，珠子的运动就像身处一个倾斜了的重力场（gravitational field）之中，倾斜的角度的正切为 a/g。金属线的底部不再是最低点，珠子会围绕一个新的平衡位置（equilibrium）振动。

动笔之前

想一想 火车以加速度 a 向西（即沿负 x 方向）加速。对车上的观察者来说，质量为 m 的物体看似受到怎样的“假想”力作用？

在火车的参考系(frame)中,只要加上一个假想力(fictitious force)$-m\times$(参考系的加速度)，牛顿第二定律（Newton's second law）便仍然成立。参考系在 x 方向的加速度为 $-a$，所以假想力是 $+ma$，指向东。连同重力一并考虑，珠子每单位质量所感受到的有效重力（effective gravity）为 $(a,-g)$：向东倾斜。

逐步解题

阶段 1　不能静止于原点

在原点处，金属线 $ky = x^2$ 是水平的。该处的法向反作用力（normal reaction）是铅垂的，因此无法抵消向东的假想力 ma。沿金属线方向的合力为 $ma \neq 0$，所以珠子不可能相对于火车保持静止。 ■

阶段 2　能量方程

> **想一想**　在火车的参考系中写出牛顿定律，当中要包括法向反作用力 $\mathbf{N}$。然后与速度 $(\dot{x}, \dot{y})$ 取点积。为甚么 $\mathbf{N}$ 会消失?

在火车的参考系中，

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = \mathbf{N} + (ma, -mg).$$

金属线是光滑的，所以 $\mathbf{N}$ 垂直于金属线，因而也垂直于沿金属线方向的速度 $(\dot{x}, \dot{y})$。与速度取点积（dot product），$\mathbf{N}$ 便会消去：

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} = ma\dot{x} - mg\dot{y}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{x}(\ddot{x} - a) + \dot{y}(\ddot{y} + g) = 0. \quad ■$$

左边是 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - ax + gy$ 的导数，因此这个量是常数。 ■

这就是火车参考系中的能量守恒（conservation of energy），其中每单位质量的势能（potential energy）$-ax + gy$ 已把假想力计算在内。

阶段 3　能升到多高?

> **想一想**　由于珠子从原点由静止出发，该常数为 0。在最高点，珠子瞬时静止。由此可得出甚么方程?

静止时，$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$，所以 $ax = gy$。代入 $y = \frac{x^2}{k}$，得 $ax = \frac{gx^2}{k}$，所以（除了起点 $x = 0$ 之外）$x = \frac{ak}{g}$，而

$$b = \frac{a^2 k}{g^2}. \quad ■$$

珠子沿金属线向东摆上至点 $\left(\frac{ak}{g}, \frac{a^2 k}{g^2}\right)$，然后返回原点，如此往复不息。

阶段 4　最快的一点

> **想一想**　把速率的平方写成只含 x 的函数。它在哪里最大?

速率的平方是 $2(ax - gy) = 2\left(ax - \frac{gx^2}{k}\right)$，这是 x 的二次式，在 $x = \frac{ak}{2g}$ 处取得最大值，刚好在两个转向点（turning point）的正中间。该处速率的平方为 $2\left(\frac{a^2k}{2g} - \frac{a^2k}{4g}\right) = \frac{a^2k}{2g}$，所以最大速率是

$$a\sqrt{\frac{k}{2g}}. \qquad \blacksquare$$

想一想 求金属线在 $x = \frac{ak}{2g}$ 处的斜率。它与有效重力 $(a, -g)$ 的方向有甚么关系？

斜率是 $\frac{2x}{k} = \frac{a}{g}$。所以在这一点，金属线垂直于有效重力：它是金属线在倾斜重力场中的“最低”点，而珠子就围绕它振动（图 11.5.1）。

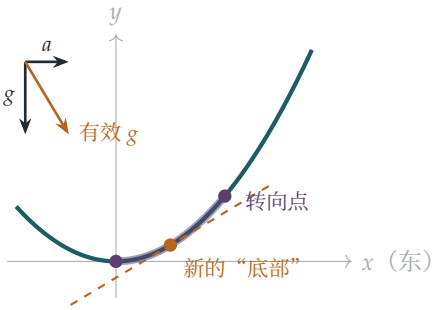


图 11.5.1 火车参考系中的金属线 $ky = x^2$（蓝绿色，取 $k = 1$ 及 $a/g = 0.6$）。有效重力（琥珀色箭头）向东倾斜，倾斜角的正切为 a/g。珠子在原点与 $x = ak/g$ 之间振动（紫红色），围绕着金属线与有效重力垂直的那一点，该点就是新的最低点。虚线是倾斜重力场中的一条“水平”线。

回顾

- **在方便的参考系中解题，并加上假想力。**在火车的参考系中，金属线是固定的，唯一的代价是多了一个恒力。
- **与速度取点积。**这样可以消去约束力（constraint force），并得出能量方程。
- **诠释答案。**转向点和最快的一点都有几何意义：有效重力倾斜了。

背后的数学

假想力

牛顿定律在*惯性*参考系（inertial frame）中成立，即没有加速的参考系。在加速参考系中，只要加上假想力，牛顿定律便可继续使用：对于加速度为 $\mathbf{A}$ 的参考系，要加上 $-m\mathbf{A}$；而在旋转参考系中，则要加上离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）。它们之所以称为假想力，是因为没有任何物体施加这些力；它们纯粹是参考系造成的假象。但对身处其中的人来说，它们却是千真万确的。离心力使地球在两极变得扁平；科里奥利力决定了飓风旋转的方向（在北半球为逆时针），也令远程炮弹偏离原来的方向。

等效原理

恒定的假想力 $-m\mathbf{A}$ 与质量成正比，这一点与重力完全相同。在一个密封的箱子内，没有任何实验能够分辨箱子是静止在行星上，还是在虚空中加速：这就是*等效原理*（equivalence principle）。爱因斯坦以它作为广义相对论（general relativity）的出发点。既然光横越一个加速中的箱子时看来会弯曲，光在重力场中也必定会弯曲；既然加速火箭的前端和后端的时钟快慢不同，重力场中不同高度的时钟也必定如此。这两个预测都已得到证实，而每一颗 GPS 卫星都必须就第二个效应作出修正：单是这个效应，就令卫星上的时钟每天比地面的时钟快约 45 微秒。

爱因斯坦最快乐的想法

1907 年，爱因斯坦在伯尔尼的专利局工作，当时他正在撰写一篇关于狭义相对论（special relativity）的综述文章。据他后来忆述，就在这时，“我一生中最快乐的想法”出现了：一个从屋顶自由堕下的人，不会感觉到自己的重量。只要选取一个下堕中的参考系，重力就可以被“变换掉”。他再花了八年时间，并借助大量新的数学（由高斯（Gauss）和黎曼（Riemann）发展的弯曲空间微分几何），才把这个想法变成 1915 年的广义相对论。

思维技巧

在运动的参考系中寻找守恒量

在加速度恒定的参考系中，有一个恒定的假想力在起作用。它可以并入势能之中，而能量在该参考系中守恒。

把运动方程与速度取点积以消去约束力，这个技巧在任何参考系中都适用。到了大学，它会成为一个普遍的原理：若一个系统的方程并不显含时间，该系统便有一个守恒的能量。

延伸练习

1 **火车上的大炮。**试做 STEP I 2000，第 9 题（`step.maths.org/questions/00-s1-q9`）：在加速中的车厢内发射抛体（projectile），其中加速度的作用就如重力倾斜了一样。

2 **逆风。**试做 STEP II 2006，第 11 题（`step.maths.org/questions/06-s2-q11`）：抛体迎着恒定的风飞行，风可以在它落地之前把它吹回你这边。

3 **火车上的咖啡。**证明在加速中的火车上，一杯咖啡的液面是一个与水平面成 $\arctan(a/g)$ 角的倾斜平面。

4 **微小振动。**求珠子围绕 $x = \frac{ak}{2g}$ 作微小振动的周期。（提示：在新的底部附近，金属线近似于一个圆，其半径等于金属线在该处的曲率半径（radius of curvature）。）

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），当中讲述非惯性参考系与假想力的一章。
- **Albert Einstein, *Relativity: The Special and the General Theory***（有多个版本）。爱因斯坦亲自撰写的普及读物，当中包括加速箱子的讨论。
- **Pedro Ferreira, *The Perfect Theory***（Little, Brown）。一部广义相对论的传记。

11.6 后旋

题目

STEP III 1997，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/97-s3-q10`

引子

用手指按住一粒波子的后半部向下一压，波子便会一边向后旋转，一边向前弹出。它从你面前滑开，慢下来，停住，然后仿佛改变了主意似的滚回来。桌球（snooker）球手打“缩杆”（screw 或 draw）时用的正是同一效应：击打母球的下部，使它向后旋转，碰到目标球时停住，再退回来。

本题要求的是：后旋（backspin）恰好要多大，波子才会完全停定；又要多大，波子才会以初速的七分之一返回。计算时要追踪两个量，即线速度（linear velocity）和角速度（angular velocity），两者都由同一个摩擦力（frictional force）改变。这背后有一条漂亮的捷径：两者的某个组合完全不受摩擦力影响。

关于课程大纲的说明

转动动力学（rotational dynamics）已于 2019 年从 STEP 考试范围中删去。这里你只需要知道：质量为 m、半径为 a 的实心球，绕直径的转动惯量（moment of inertia）为 $I = \frac{2}{5}ma^2$；而力矩（torque）τ 按 $I\dot{\omega} = \tau$ 改变其角速度，这就是 $m\dot{v} = F$ 的转动版本。

动笔之前

想一想　波子以 v 向前运动，并以 ω 向后旋转。波子的最低点相对桌面移动得多快？摩擦力朝哪个方向作用？

最低点因波子本身的运动而有速度 v，再加上因后旋而来的 $a\omega$（后旋会把最低点带向前）。因此它以 $v+a\omega$ 向前滑动，而摩擦力向后作用，阻碍滑动。只有当 $v+a\omega=0$ 时，波子才会纯滚动（rolling without slipping），即只滚不滑。

逐步解题

阶段 1　摩擦力的作用

想一想　设摩擦力为 F，方向向后。它对 v 有甚么影响？它对球心的力矩为 Fa：这会增加还是减少后旋？

摩擦力使波子减速：$m\dot v=-F$，所以 $v=v_0-\frac{F}{m}t$。由于它在波子底部向后作用，它同时产生一个阻碍后旋的力矩 Fa：$I\dot\omega=-Fa$，于是代入 $I=\frac{2}{5}ma^2$ 得

$$\omega=\omega_0-\frac{5F}{2ma}t.$$

波子滑动期间，v 和 ω 都稳定地减少。

阶段 2　完全停定

想一想　波子要完全停下来，v 和 ω 必须在同一刻变成零。两者各在何时变成零？

$v=0$ 于 $t=\frac{mv_0}{F}$，而 $\omega=0$ 于 $t=\frac{2ma\omega_0}{5F}$。当 $v_0=\frac{2}{5}a\omega_0$ 时两者相等，即

$$\frac{v_0}{a\omega_0}=\frac{2}{5}.\qquad\blacksquare$$

在那一刻，波子既无线速度亦无角速度，而摩擦力（只在有滑动时才作用）随即消失：波子就此停在原地。

阶段 3　滚回来

想一想　若后旋较大，v 变成零时 ω 仍为正。最低点仍在向前滑动，所以摩擦力仍然向后作用。接下来会发生甚么事？滑动何时停止？

摩擦力继续把波子向后推，所以 v 变为负值，而 ω 继续减少。当 $v + a\omega = 0$ 时滑动停止：

$$v_0 + a\omega_0 - \left(\frac{F}{m} + \frac{5F}{2m}\right)t = 0, \qquad t^* = \frac{2m(v_0 + a\omega_0)}{7F}.$$

在那一刻，

$$v = v_0 - \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7} = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

此后波子只滚不滑，摩擦力不再作用，v 保持不变。要它以速率 $\frac{v_0}{7}$ 滚回来，我们需要 $5v_0 - 2a\omega_0 = -v_0$，所以

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

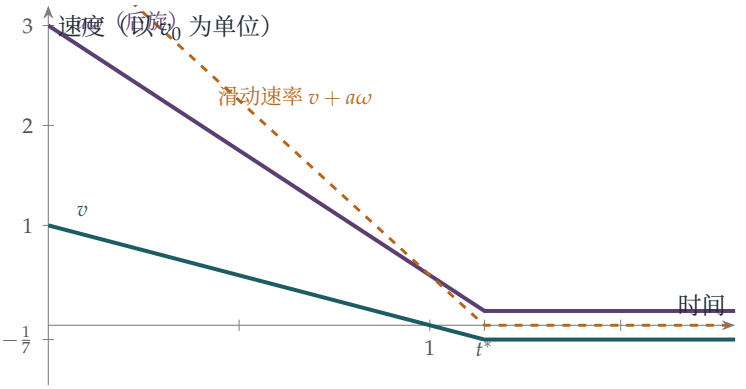


图 11.6.1 $v_0/(a\omega_0) = \frac{1}{3}$ 的情况，时间以 mv_0/F 为单位。摩擦力以恒定的速率减少向前的速度 v（蓝绿色）和后旋 $a\omega$（紫红色），两个速率之比为 2 : 5。波子在 $t = 1$ 时停止向前运动，但仍在滑动，所以被向后推，直至滑动速率（琥珀色）在 $t^* = \frac{8}{7}$ 时变成零。其后它以 $\frac{v_0}{7}$ 滚回来。

回顾

- **追踪两个量。**摩擦力同时改变 v 和 ω，两者的变率成固定比例。
- **知道力何时消失。**滑动摩擦力只在有滑动时才作用；波子一旦滚动，它便停止作用。
- **滑动速率是关键变量。**它线性地减少，而它变成零的一刻，正是由滑动转为滚动的一刻。

背后的数学

一个守恒量

要求最终速率，还有一个更快的方法。考虑波子对它与桌面接触点的角动量（angular momentum）。摩擦力正正作用于该点，所以对该点没有力矩，而法向反作用力（normal reaction）和重力都沿着通过该点的铅垂线作用。因此波子滑动期间，这个角动量守恒（conserved）。它等于 mva（来自球心的运动）减去 $I\omega$（后旋以负值计算）：

$$L = mav - \tfrac{2}{5}ma^2\omega.$$

当波子以速率 V 滚动时，$a\omega = -V$，角动量为 $maV + \tfrac{2}{5}maV = \tfrac{7}{5}maV$。令它等于初始值，

$$\tfrac{7}{5}maV = mav_0 - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0, \qquad V = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7},$$

答案相同，却完全不必提及摩擦力的大小，甚至不必理会它是否恒定。最终速率单凭守恒便已确定；摩擦力只决定要花多少时间才达到这个速率。

桌球、保龄球与网球

同样的分析可以解释许多运动中的现象。桌球被击中正中央时，起初滑动，然后开始滚动，最终速率为初速的 $\frac{5}{7}$（在公式中取 $\omega_0 = 0$）。十瓶保龄球带侧旋掷出时，会沿球道滑行，到开始滚动时便“拐弯”。带上旋（topspin）的网球会急速下坠，不过这里的主要效应来自空气动力：旋转的球会使周围的空气偏转，这就是马格努斯效应（Magnus effect）。

科里奥利与桌球

科里奥利（Gaspard-Gustave Coriolis）如今因旋转参考系中的虚拟力（fictitious force）而为人所知（Section 11.5），他在 1835 年写了一整本关于桌球数学的书：*Théorie mathématique des effets du jeu de billard*。他证明了不少结果，其中包括：带旋转击出的球，在滑动期间沿抛物线运动，到滚动时才走直线；他亦精确地分析了本题的缩杆打法。研究这项运动的物理学家至今仍会引用此书。

思维技巧

追踪由同一个力改变的两个量

当一个力同时影响几个量时，写下它怎样改变每一个量，并找出一个它完全不会改变的组合。

这里摩擦力改变了 v 和 ω，却没有改变对接触点的角动量。在大学里，寻找这类组合是一个反复出现的主题：选择对哪一点取矩，使未知的力自动消去，正是选

择参考系的转动版本。

延伸练习

1 **上旋。**若波子起初带的是向前的旋转 ω_0 而非后旋，求它最终的滚动速率。$v_0/(a\omega_0)$ 取甚么值时它会加速?

2 **桌球。**一个球被击中正中央，以 v_0 开始滑动而不带旋转。证明它最终以 $\frac{5}{7}v_0$ 滚动，并求动能（kinetic energy）损失的比例。（滚动时的动能为 $\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$。）

3 **圆环。**对一个在自身所在平面内滚动的薄圆环重做本题，其 $I = ma^2$。现在 $v_0/(a\omega_0)$ 为何值时，它会以 $\frac{v_0}{7}$ 返回?

4 **缩杆打法。**桌球球杆必须击中球的甚么位置（在球心以上多高，以 a 表示），球才会从一开始便只滚不滑?（提示：考虑冲量（impulse）作用期间对接触点的角动量。）

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 8 章，讲述角动量及带滑动的滚动。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），关于刚体运动的各章。
- **David Alciatore, *The Illustrated Principles of Pool and Billiards***（Sterling）。这项运动的物理学，附有大量图解。

11.7 杆中的辛普森法则

题目

STEP II 1989，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/89-s2-q13`

引子

一根均匀棒（uniform rod）受到推动和旋转时，会有甚么反应？原来就力学上的一切用途而言，一根棒的表现与三个质点（point mass）完全相同：两端各占其质量的六分之一，中点占三分之二。无论你对这根棒做甚么（推它，或让它绕任何轴旋转），都无法把它与这三个质点区分开来。

$\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ 这几个数也许似曾相识。它们正是*辛普森法则*（Simpson's rule）$\int_{-a}^{a} f \approx 2a\left(\frac{1}{6}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{6}f(a)\right)$ 中的权（weight），这是你可能在高级程度（A level）课程中学过的数值积分（numerical integration）方法。这并非巧合：动力等效（dynamically equivalent）系统与数值积分法则，解决的其实是同一个问题。

关于课程范围的说明

转动惯量（moment of inertia）已于 2019 年从 STEP 考试范围中删去。一个物体对某轴的转动惯量是 $\sum m_i d_i^2$，即每份质量乘以它与该轴距离的平方之总和（对连续物体而言则是一个积分）。质量为 m、长度为 $2a$ 的均匀棒，对通过其中心的垂直轴的转动惯量为 $\frac{1}{3}ma^2$。*平行轴定理*（parallel axis theorem）指出：对任何轴的转动惯量，等于对通过质心（centre of mass）的平行轴的转动惯量加上 md^2，其中 d 是两轴之间的距离。

动笔之前

想一想　两个系统的质量相同、质心相同，而且对通过质心的每一条轴的转动惯量也相同。为甚么平行轴定理随即保证，它们对其他任何轴的转动惯量也相同？

对任何轴而言，两个系统的转动惯量都等于（对通过 O 的平行轴的转动惯量）$+md^2$。根据假设，第一项相同，而两个系统的 m 和 d 也相同。 ■

逐步解题

阶段 1　棒

想一想　在两端各放质量 p，在中点放质量 q。由对称性可知质心位置正确。总质量和对通过中心的垂直轴的转动惯量，分别要求甚么条件？

我们需要 $2p+q=m$，而对通过中点的垂直轴的转动惯量必须是 $\frac{1}{3}ma^2$：$2pa^2=\frac{1}{3}ma^2$。所以 $p=\frac{1}{6}m$，$q=\frac{2}{3}m$。

想一想　这是否对通过中心的每一条轴都成立，而不只是垂直的那一条？

考虑一条通过中心、与棒成 ψ 角的轴：棒上与中心相距 r 的点，与该轴的距离为 $r\sin\psi$。因此每一个转动惯量（不论是棒的还是质点的）都是垂直轴情况下数值的 $\sin^2\psi$ 倍，所以两者对所有 ψ 都相等。（不在包含棒的平面上的轴也是同样道理：只有各点与轴的距离才有关系，而对于一条通过 O 的直线上的点，这个距离与 r 成正比。）所以这根棒与质量 $\frac{1}{6}m$、$\frac{2}{3}m$、$\frac{1}{6}m$ 动力等效。 ■

阶段 2　长方形

想一想　把薄片（lamina）切成与其中一边平行的幼条，再把每一幼条换成它的三个等效质点。你会得到甚么？接下来又可以怎样做？

每一幼条都是一根棒，等效于把它质量的 $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ 分别放在左边、中线和右边。把所有幼条加起来，薄片便等效于三根均匀棒（分别沿左边、中间和右边），质量为 $\frac{1}{6}M$、$\frac{2}{3}M$、$\frac{1}{6}M$。现在再把这三根棒各自换成比例相同的三个质点。每一点的质量是两个分数之积（图 11.7.1）：

$$\text{四角：}\ \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{6}=\tfrac{1}{36},\qquad \text{各边中点：}\ \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{9},\qquad \text{中心：}\ \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{4}{9},$$

全部再乘以 M。 ■

（严格来说，每一次替换都必须保持对通过整块薄片中心的每一条轴的转动惯量不变，而事实确是如此：每一次替换都保持了该部分的质量、质心，以及对通过该部分质心的各轴的转动惯量，其余的就交给平行轴定理。）

阶段 3 正方形对其对角线

对于边长为 $2a$ 的正方形，对角线通过两个角和中心，这些点没有任何贡献。另外两个角与对角线的距离为 $\sqrt{2}a$，而四个边的中点与它的距离为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$。所以

$$I = 2\cdot\tfrac{1}{36}M\cdot 2a^2 + 4\cdot\tfrac{1}{9}M\cdot\tfrac{a^2}{2} = \tfrac{1}{9}Ma^2 + \tfrac{2}{9}Ma^2 = \tfrac{1}{3}Ma^2. \qquad ■$$

这与对通过中心、平行于一边的轴的转动惯量相同。（这并非偶然：对正方形而言，在其平面上通过中心的所有轴都给出相同的答案，这可由练习中的一个对称性论证得出。）

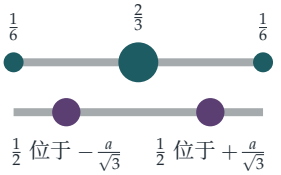
阶段 4 非均匀棒

想一想 设棒的长度为 L，在距离其中一端 x 处的密度为 $\frac{2mx}{L^2}$。在 $x=0$、$\frac{L}{2}$、L 处分别放质量 p_0、p_1、p_2。令总质量、质心和对该端的转动惯量一一吻合，便得到三条方程。它们是甚么？

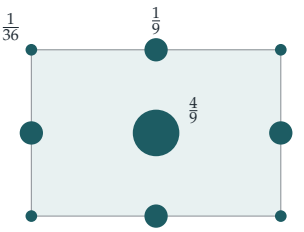
这根棒的总质量为 m，对较轻一端的一阶矩（first moment）为 $\int_0^L x\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}mL$，二阶矩（second moment）为 $\int_0^L x^2\cdot\frac{2mx}{L^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mL^2$。令这些量吻合：

$$p_0+p_1+p_2 = m, \qquad \tfrac{1}{2}Lp_1 + Lp_2 = \tfrac{2}{3}mL, \qquad \tfrac{1}{4}L^2p_1 + L^2p_2 = \tfrac{1}{2}mL^2.$$

把第二式（除以 L）减去第三式（除以 L^2），得 $\frac{1}{4}p_1 = \frac{1}{6}m$，所以 $p_1 = \frac{2}{3}m$，继而 $p_2 = \frac{1}{3}m$，$p_0 = 0$。只需要两个质点：$\frac{2}{3}m$ 位于中点，$\frac{1}{3}m$ 位于较重的一端。 ■



两根等效的棒



薄片：$\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{1}{6}$ 的乘积

图 11.7.1 左上：一根均匀棒与位于两端和中心的质量 $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$（以占其质量的分数表示）动力等效，这些正是辛普森法则的权。左下：它也等效于两份各占一半的质量，位于与中心相距 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ 之处，即两点高斯积分的节点。右：一块长方形薄片等效于九个质量，图中圆点的面积与质量成正比。

回顾

- **令各阶矩吻合。**动力等效的意思，就是令质量分布的零阶矩、一阶矩和二阶矩一一吻合。
- **逐个维度建构。**长方形是由棒组成的棒，所以它的权是乘积。
- **数一数方程和未知数的数目。**要吻合的矩有三个，未知的质量也有三个；而有时解中恰好会出现一个零。

背后的数学

辛普森法则

令质量分布的各阶矩吻合，与设计一条数值积分法则是同一个问题。一条法则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \approx w_0 f(-a) + w_1 f(0) + w_2 f(a)$ 若对 $f = 1, x, x^2$ 精确成立，就必须满足

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2a, \qquad -aw_0 + aw_2 = 0, \qquad a^2 w_0 + a^2 w_2 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

这正是棒所要满足的条件（其中 $f = 1, x, x^2$ 分别扮演质量、一阶矩和转动惯量的角色）。其解为 $w = 2a(\tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6})$：这就是辛普森法则。对称性还带来额外的收获：这条法则对 $f = x^3$ 也精确成立，因为两边都等于零，所以辛普森法则能精确地积分三次多项式，而它对光滑函数的误差与四阶导数成正比。因此，一根棒与它的三个质点不仅在质量、质心和转动惯量上吻合，连三阶矩也吻合。

高斯求积法与惯性张量

如果位置和质量都可以自由选择，两个质点便已足够：在 $\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ 两点各放一半质量。验算：$2 \cdot \frac{1}{2}m \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}ma^2$。这就是两点高斯－勒让德法则（Gauss–Legendre rule）$\int_{-a}^{a} f \approx a\big(f(-\frac{a}{\sqrt{3}}) + f(\frac{a}{\sqrt{3}})\big)$，它同样对三次多项式精确成立。高斯（Carl Friedrich Gauss）在 1814 年证明，只要巧妙地选取 n 个点，便能精确地积分次数为 $2n-1$ 的多项式；高斯求积法（Gaussian quadrature）如今已是数值分析（numerical analysis）的标准方法。

在力学中，一个物体对通过其中心的所有轴的转动惯量，都记录在一个 3×3 对称矩阵之中，称为惯性张量（inertia tensor）。两个物体若质量、质心和惯性张量都相同，对所有力的反应便完全一样，这就是为甚么工程师在模拟中可以用几个质点取代一个复杂的部件。惯性张量的特征向量（eigenvector）就是主轴（principal axes），即物体可以绕之稳定旋转的轴。

思维技巧

把系统换成等效的系统

如果两个系统在问题所涉及的每一个量上都一致，就把复杂的那个换成简单的那个。

这里只有三个矩有关系，所以一根连续的棒可以换成三个质点。在大学里，这个想法会以多种面貌出现：高斯求积法、电磁学和引力理论中的多极展开（multipole expansion）（在远处，电荷或质量分布只有头几个矩有影响），以及统计学中的矩估计法（method of moments）。

延伸练习

1 **辛普森法则。**用只有一个区间的辛普森法则估算 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$，并与 $\frac{\pi}{4}$ 比较。验证这条法则对 $\int_{-1}^1 x^3\,dx$ 和 $\int_{-1}^1 x^2\,dx$ 精确成立，但对 $\int_{-1}^1 x^4\,dx$ 则不然。

2 **所有轴都一样。**证明正方形薄片对在其平面上通过中心的任何轴的转动惯量都是 $\frac{1}{3}Ma^2$。（提示：九个等效质点在旋转 90° 之下是对称的；这对一个关于 $\cos\psi$ 和 $\sin\psi$ 的二次式说明了甚么?）

3 **三角形。**证明一块质量为 M 的均匀三角形薄片，与位于其三边中点、质量各为 $\frac{1}{3}M$ 的三个质点动力等效。

4 **实心立方体。**为一个均匀实心立方体找出一个由 27 个质点组成的动力等效系统，并用它求出边长为 $2a$ 的立方体对其一条棱的转动惯量。

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），关于刚体和转动惯量的一章。
- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press），关于数值积分的各章，包括辛普森法则和高斯求积法。
- **Philip Davis & Philip Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration***（Dover）。经典参考书。

11.8 倾斜的平衡

题目

STEP III 2025，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

引子

把一个橄球放在桌上，它会侧躺着停下来；把它竖起来，只要十分小心，它也可以这样平衡，但轻轻一碰就会倒下。每一个放在桌上的刚体（rigid body）都有一组平衡位置（equilibrium positions），其中有些是稳定（stable）的，有些是不稳定（unstable）的，而哪些位置存在，只取决于它的形状和质心（centre of mass）。一个物体可以有多少个平衡位置？最少又可以有多少个？

这道题构造了一个立体，形状像陀螺，上半部是圆顶，下半部是尖底，并证明它除了可以正立或倒立之外，还可以在三个不同的倾斜角度上静止。关键思路是一个简单的几何条件：物体能以其表面上某一点着地而静止，当且仅当表面在该点的法线（normal）通过质心。这背后有一项近年的发现：一个称为 Gömböc 的凸（convex）形体，它只有一个稳定位置和一个不稳定位置。

动笔之前

想一想 一个立体放在桌上，只以其曲面上的一点 X 与桌面接触。作用于它的力是它的重量（作用于质心 G）和在 X 的反作用力（reaction）。这两个力何时平衡？

桌面在 X 与曲面相切，而反作用力作用于 X，并垂直于桌面，即沿着曲面的法线。重量则沿铅垂方向作用，并通过 G。两个力只有在沿同一直线作用时才能平衡，所以通过 X 的铅垂线，也就是在 X 的法线，必须通过 G。因此：*物体能以 X 着地而静止，当且仅当在 X 的法线通过 G。*

逐步解题

阶段 1　质心

想一想　把立体切成薄薄的圆柱壳（cylindrical shells），半径为 x，厚度为 δx，高度为 y。一个圆柱壳的体积是多少？它的质心在哪里？

由于 $y=\frac{r^n-x^n}{r^{n-1}}$，一个圆柱壳的体积是 $2\pi xy\,\delta x$，而它的质心在高度 $\frac{y}{2}$ 处。所以

$$V=\int_0^r 2\pi xy\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{r^{n-1}}\Big(\frac{r^{n+2}}{2}-\frac{r^{n+2}}{n+2}\Big)=\frac{n\pi r^3}{n+2},$$

而对底面的矩（moment）是

$$\begin{aligned}\int_0^r 2\pi x\cdot\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x&=\frac{\pi}{r^{2n-2}}\int_0^r x(r^n-x^n)^2\,\mathrm{d}x\\&=\pi r^4\Big(\frac12-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2n+2}\Big)=\frac{n^2\pi r^4}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

（括号可以化简，是因为 $(n+1)(n+2)-4(n+1)+(n+2)=n^2$。）两者相除，得

$$\bar y=\frac{nr}{2(n+1)}.\qquad\blacksquare$$

当 $n=2$（抛物面，paraboloid）时，这是 $\frac{r}{3}$，正是大家熟悉的结果；当 $n\to\infty$ 时，立体变成圆柱，而 $\bar y\to\frac{r}{2}$。

阶段 2　法线与轴相交之处

曲线在 $x=rp$ 的斜率（gradient）是 $-\frac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}=-np^{n-1}$，所以法线的斜率是 $\frac{1}{np^{n-1}}$。沿法线由 $\big(rp,r(1-p^n)\big)$ 走到 y-轴，x 减少了 rp，而 y 减少了 $\frac{rp}{np^{n-1}}=\frac{r}{np^{n-2}}$。所以

$$Y=r\Big(1-p^n-\frac{1}{np^{n-2}}\Big).\qquad\blacksquare$$

想一想　当 $n=4$ 时，$Y=r\big(1-p^4-\frac{1}{4p^2}\big)$。它在哪里取最大值？当 $p\to0$ 时，以及在 $p=1$ 时，情况如何？

$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p}=r\big(-4p^3+\frac{1}{2p^3}\big)=0$ 成立于 $p^6=\frac18$，即 $p^2=\frac12$。这时 $Y=r\big(1-\frac14-\frac12\big)=\frac14 r$。$\blacksquare$

当 $p\to0$ 时，$Y\to-\infty$（圆顶在顶部附近非常平坦，它的法线几乎是铅垂的，要在很低的地方才与轴相交）；在 $p=1$ 时，$Y=-\frac14 r$。所以当 p 由 0 增至 1 时，Y 由 $-\infty$ 上升至 $\frac14 r$，再回落至 $-\frac14 r$。

阶段 3　陀螺

想一想 第 (iii) 部分的立体，是一个圆顶（$n=4$）叠在一个倒转的抛物面（$n=2$）之上。它的质心在哪里？

由步骤 1，圆顶的体积是 $\frac{2\pi r^3}{3}$，质心在 $\frac{2r}{5}$；抛物面的体积是 $\frac{\pi r^3}{2}$，而由于它是倒转的，质心在 $-\frac{r}{3}$。所以

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}\, r = \frac{\frac{4}{15}-\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}}\, r = \frac{3r}{35}.$$

G 位于 $\left(0, \frac{3r}{35}\right)$，比最阔之处略高。

阶段 4 数算平衡位置

想一想 倾斜的平衡位置需要有一点（不是 A 或 B），其法线通过 G。在曲面的每一部分上，有多少个点的法线与轴相交于高度 $\frac{3r}{35}$？

圆顶。它的法线与轴相交的高度 Y 由 $-\infty$ 上升至 $\frac{1}{4}r$，再下降至 $-\frac{1}{4}r$。由于 $-\frac{1}{4}r < \frac{3r}{35} < \frac{1}{4}r$，根据介值定理（intermediate value theorem），$\frac{3r}{35}$ 这个值在上升的一段取得一次，在下降的一段也取得一次：共两点。

尖底。由第 (ii) 部分取 $n=2$，再对 x-轴作反射，可知在参数为 p 的点上，法线与轴相交于 $-r\left(1-p^2-\frac{1}{2}\right) = r\left(p^2-\frac{1}{2}\right)$，这个值由 $-\frac{1}{2}r$ 递增至 $\frac{1}{2}r$。它恰好有一次等于 $\frac{3r}{35}$，就是在 $p^2 = \frac{41}{70}$ 时。

这三点各给出一个平衡位置，而三条法线与轴所成的角各不相同，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与铅垂线成三个不同的非零角（图 11.8.1）。 ■

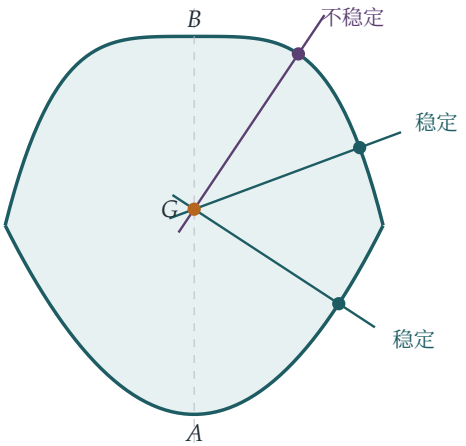


图 11.8.1 第 (iii) 部分的立体的截面，以及它的质心 G（琥珀色）。在三个标记的点上，曲面的法线都通过 G，所以立体可以用该点着地而静止。其中两个平衡位置是稳定的（曲面在该处局部地离 G 最近），一个是不稳定的（局部地最远）。

回顾

- **把物理条件化为几何。**平衡变成了“法线通过 G”。
- **不用求解也能证明存在。**我们从没有求出那些角。介值定理，加上函数 $Y(p)$ 的形状，已说明了它们有多少个。
- **重用一般结果。**第 (ii) 部分对一般的 n 所得的结果，一并处理了第 (iii) 部分中曲面的两个部分。

背后的数学

平衡位置即临界点

当立体以点 X 着地而静止时，G 离桌面的高度就是由 G 到在 X 的切平面（tangent plane）的距离；对凸体来说，当 GX 沿着法线时，这个距离就是 $|GX|$。一般而言，平衡位置就是由 G 到曲面的距离的*临界点*（*critical points*）：使 $|GX|$ 取驻值的点 X，正好就是法线通过 G 的点。稳定的平衡位置是这个距离的局部极小值（G 尽可能低），而不稳定的则是局部极大值或鞍点（saddle points）。

沿着截面由 A 走到 B，与 G 的距离依次是：在 A 较大（极大值：以尖端平衡，不稳定），在尖底上的倾斜点较小（极小值，稳定），在边缘较大，在圆顶上较低的倾斜点较小（稳定），在较高的倾斜点较大（不稳定），而在 B 较小（稳定：以圆顶的顶部着地）。正如图中所示，极小值和极大值必定交替出现。（事实上还有一个题目没有计算在内的平衡位置：立体可以不稳定地平衡在它尖锐的边缘上，曲面在那里没有唯一的法线。）

Gömböc

一个凸体最少可以有多少个平衡位置？任何物体都至少有一个稳定位置和一个不稳定位置：就是曲面上离 G 最近和最远的点。密度均匀的二维凸形状总是至少有四个（距离的两个极小值和两个极大值，交替出现）。1995 年，阿诺尔德（Vladimir Arnold）提出一个问题：密度均匀的三维凸体，能否只有两个平衡位置，即一个稳定、一个不稳定？2006 年，Gábor Domokos 和 Péter Várkonyi 构造出这样的一个形体，就是 *Gömböc*：无论以甚么姿势把它放下，它都会滚动摇晃，直至到达它唯一的稳定位置为止。Domokos 后来留意到，有些陆龟的壳很接近这个形状，这有助牠们在被翻转后自行翻身。

阿基米德与浮体

对物体稳定性的研究可以追溯至阿基米德（Archimedes）。他在《论浮体》（*On Floating Bodies*）中，根据形状和密度，分析了一个浮着的抛物面（船身的一个模型）何时能稳

定地直立，何时会翻侧。他只用几何便得出答案，当中涉及的正是本节所用的那种质心和法线的计算。造船工程师至今仍在运用他的想法，形式就是稳心（*metacentre*）：如果通过浮心（centre of buoyancy）的铅垂线与船的轴线的交点位于质心之上，船便是稳定的。

思维技巧

势能地形

平衡位置是势能（*potential energy*）的驻点（*stationary points*），而稳定的平衡位置是它的极小值。与其把驻点逐一解出来，不如数算它们的数目。

这里的势能与 G 的高度成正比，也就是由 G 到曲面的距离。在大学里，这个观点贯穿力学、化学（分子会落入能量的极小值）和拓扑学；在拓扑学中，莫尔斯理论（*Morse theory*）说明，曲面上任何函数的极小值、极大值和鞍点的数目，都受曲面的形状所限制。

延伸练习

1 **不倒翁玩具。**试做 STEP II 1996，第 9 题（`step.maths.org/questions/96-s2-q9`）：一个置于半球上的圆锥，何时会自行回正？（提示：相对于半球的球心，G 必须在哪里？）

2 **球体。**对于均匀实心球体，每一条法线都通过球心。这说明它的平衡位置有甚么特点？如果球体的质心稍为偏离球心，又会怎样？

3 **椭圆。**证明一块椭圆形圆盘在其自身所在的平面内沿一条直线滚动时，恰好有四个平衡位置，并指出哪些是稳定的。

4 **两个抛物面。**把第 (iii) 部分的圆顶换成抛物面 $ry = r^2 - x^2$，使立体对 x-轴对称。证明 G 位于原点，求出倾斜的平衡位置，并解释为何它们成对出现，且每对的倾斜角相等。

延伸阅读

► **Péter Várkonyi & Gábor Domokos，“Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré–Hopf theorem”**，*Journal of Nonlinear Science* 16 (2006)。提出 Gömböc 的

论文。

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），论平衡与稳定性。
- **Chris Rorres, “Completing Book II of Archimedes’s *On Floating Bodies*”** , *Mathematical Intelligencer* 26 (2004)。阿基米德的稳定性分析，配以现代图解。

11.9 安全抛物线

题目

STEP II 2014，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/14-s2-q10`

引子

一座喷泉以相同的速率向四方八面喷水。水柱形成一个闪闪生辉的圆顶，外缘轮廓分明：在里面，每一点都有水经过；在外面，水一滴也到不了。这条边界是一条抛物线（parabola），称为*安全抛物线*（parabola of safety），因为炮口速率固定的大炮，无论以甚么角度发射，都打不中它外面的目标。

令人意外的是，这条边界本身并不是其中一条轨迹。它是整族轨迹的*包络线*（envelope），即一条与每条轨迹都相切一次的曲线，就像 Section 8.1 中直线 $y = 0$ 与那族抛物线相切一样。这道题目只需用到二次式的判别式（discriminant），便能把它求出来。

动笔之前

想一想 用 t 表示 x 和 y，然后消去 t。怎样用 $\lambda = \tan\theta$ 表示 $\sec^2\theta$?

由 $x = ut\cos\theta$ 和 $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$，代入 $t = \frac{x}{u\cos\theta}$：

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}(1+\lambda^2),$$

其中用到 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$。

逐步解题

阶段 1 固定 x，改变角度

想一想　对于固定的 $x>0$，把 y 看成 λ 的函数。它是哪一类函数？当 λ 取遍所有实数时，它会取哪些值？

对于固定的 x，y 是 λ 的二次函数，首项系数 $-\frac{gx^2}{2u^2}$ 为负：它是以 λ 为变量、开口向下的抛物线。它有极大值，而且当 $\lambda\to\pm\infty$ 时，$y\to-\infty$。由于它是连续的，所以它会取遍不超过极大值的每一个值。极大值出现在 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}=x-\frac{gx^2}{u^2}\lambda=0$ 之处，即 $\lambda=\frac{u^2}{gx}$，此时

$$Y=\frac{u^2}{gx}\,x-\frac{gx^2}{2u^2}\left(1+\frac{u^4}{g^2x^2}\right)=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}.\qquad\blacksquare$$

（等价的说法是：点 (x,y) 可以到达，当且仅当二次方程 $\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2-x\lambda+\frac{gx^2}{2u^2}+y=0$ 有实根 λ，而判别式的条件给出 $y\le Y$。）

阶段 2　区域

曲线 $Y=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}$ 是一条开口向下的抛物线，顶点位于 $\left(0,\frac{u^2}{2g}\right)$，即垂直向上发射所达到的高度；它与地面相交于 $x=\pm\frac{u^2}{g}$，即最大射程。在它上面或下方（并在地面以上）的每一点都可以到达，而在它上方的点则全都到不了（图 11.9.1）。

想一想　经过严格位于曲线下方的一点，有多少条轨迹？经过曲线上的一点呢？

曲线下方的一点对应一个有两个实根的 λ 二次方程：两个抛射角，一高一低。曲线上的一点对应重根：恰好一条轨迹，并且在该点与曲线相切。

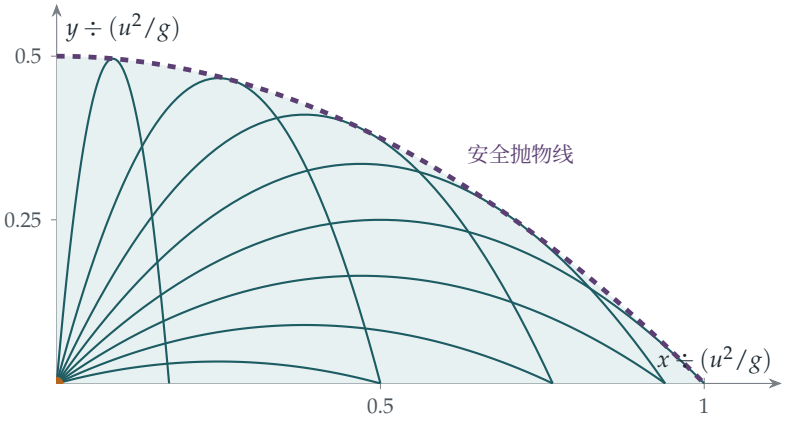


图 11.9.1　以固定速率 u 及角度 $15°,25°,\dots,85°$ 发射的轨迹（蓝绿色）。每条轨迹都与虚线所示的安全抛物线 $y=\frac{u^2}{2g}-\frac{gx^2}{2u^2}$ 恰好相切一次，而它下方的区域（阴影部分）正好是所有可到达的点所组成的集合。原点 O（琥珀色）是安全抛物线的焦点（focus）。

阶段 3　最远的点

想一想 距离 O 最远的可到达点（在地面上或地面以上）位于边界上。把距离的平方 x^2+Y^2 写成 x^2 的函数。它是递增还是递减?

设 $X=x^2$。则

$$x^2+Y^2=X+\left(\frac{u^2}{2g}-\frac{gX}{2u^2}\right)^2,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(x^2+Y^2)=1-\frac{g}{u^2}\left(\frac{u^2}{2g}-\frac{gX}{2u^2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{g^2X}{2u^4}>0.$$

因此，沿着边界向外移动时，距离不断增加，而最远的点就是边界与地面相交之处，即 $x=\frac{u^2}{g}$。最远距离为

$$\frac{u^2}{g},$$

由平常以 45° 发射的最大射程一击达到。 ■

回顾

- **把问题反过来问。**不问某条给定的轨迹会去到哪里，而问哪些轨迹会经过某个给定的点。
- **以参数为未知数的二次方程。**对于每一点，$\lambda=\tan\theta$ 所满足的方程都是二次方程，而它的判别式决定该点能否到达。
- **两个、一个或没有。**区域内的点有两个角度可以到达，边界上的点有一个，区域外的点则一个也没有。

背后的数学

包络线

单参数曲线族（one-parameter family of curves）$\mathrm{F}(x,y,\lambda)=0$ 往往有一条*包络线*：一条与族中每个成员都相切的曲线。求法是联立解 $\mathrm{F}=0$ 和 $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\lambda}=0$，这正是我们对 λ 求 y 的极大值时所做的事。包络线在科学中随处可见。一杯咖啡表面上那条明亮的光曲线，就是反射光线的包络线，称为*焦散线*（caustic）。超音速飞机的音爆，由它所发出声波的包络面传送，那就是*马赫锥*（Mach cone）。而在 Section 8.1 中，一个微分方程（differential equation）的一族解的包络线，本身也是一个解，即所谓的“奇异”解。

焦点

安全抛物线有一个奇妙的性质：它的焦点就是发射点 O。（抛物线 $y=c-\frac{x^2}{4c}$ 的焦点位于原点；这里 $c=\frac{u^2}{2g}$。）每条轨迹也都是抛物线，而所有轨迹的焦点都落在以 O 为圆心、

半径为 $\frac{u^2}{2g}$ 的圆上。这可以用能量来解释：抛射体在高度 y 时的速率是 $\sqrt{u^2-2gy}$，在准线（directrix）的高度 $\frac{u^2}{2g}$ 处为零；而以同一条直线为准线并且经过 O 的抛物线，其焦点都在那个圆上。

托里拆利的抛物线

伽利略（Galileo）在 1609 年前后证明了抛射体沿抛物线运动，并且在水平地面上，最大射程出现在 45°。他的学生托里拆利（Evangelista Torricelli）以发明气压计而较为人熟悉，他在 1644 年的著作 *De motu gravium* 中发现了安全抛物线。对炮手来说，它回答了一个实际问题：究竟哪些目标在射程之内？托里拆利还证明了，经过给定一点的轨迹成对出现，两者的角度关于该点的方向与铅垂线之间的角平分线对称，这就是本题中的高射和低射。

思维技巧

曲线族的包络线

要找出一族曲线所覆盖区域的边界，可固定一点，然后问：参数取哪些值时，会有曲线经过这一点？边界就是解的数目发生变化的地方。

同一个想法，即随着点的移动来数算解的数目，是光学中焦散线研究的基础，也是动力系统（dynamical systems）中分歧（bifurcation）理论的基础，更是突变理论（catastrophe theory）的基础；突变理论把方程的解的数目可以怎样变化加以分类。

延伸练习

1 **爆开的烟花。**试做 STEP II 2023，第 10 题（载于 OCR 提供下载的 2023 年试卷，`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）。这道题把爆炸产生的粒子看成一个球面，其球心作自由下落，并找出一颗沿着安全抛物面（paraboloid of safety）运动的粒子。

2 **向斜坡上发射。**求速率为 u 的抛射体沿倾角为 β 的斜面向上发射时的最大射程。（提示：直线 $y = x\tan\beta$ 与安全抛物线在哪里相交？）证明最佳角度平分斜坡与铅垂线之间的夹角。

3 **两个角度。**证明能到达点 P 的两个角度，关于 OP 与铅垂线夹角的平分线对称。

4 **焦点。**证明抛射角为 θ 的轨迹，其焦点位于 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, -\frac{u^2}{2g}\cos 2\theta\right)$，并由此证明这些焦点都落在以 O 为圆心的一个圆上。

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，当中讨论了轨迹的包络线。
- **J. W. Bruce, P. J. Giblin & C. G. Gibson, "On caustics of plane curves"**, *American Mathematical Monthly* 88 (1981)。几何学中的包络线与焦散线。
- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。包络线、焦散线及许多经典曲线，并附作图方法。

11.10 会朝你飞回来的球

题目

STEP II 2019，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2019 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip`

引子

把球向前抛出，它在落地之前会一直离你而去。这是理所当然的。把球垂直向上抛，它却会回到你手上。在这两种情况之间，必定有些事情起了变化：必定存在某些角度，令球先远离你，然后向你靠近，到落地之前又再远离。本题要找出的正是那个确切的分界线：$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，即大约 70.5°。

这个结果是数学中一种常见情况的好例子：人人都以为某个量是单调（monotonic）的，其实不然。它同时展示了一个在大学里经常用到的标准技巧：要判断一个距离是否正在增加，就对它的平方求导（differentiate），这样便可避开平方根。

动笔之前

想一想 为甚么处理 OP^2 比处理 OP 容易？“OP 递增”与“OP^2 递增”是同一回事吗？

$OP^2 = x^2 + y^2$ 是 t 的多项式（polynomial），而 OP 则涉及平方根。由于 $OP \geq 0$，而平方运算在非负数上是递增的，所以 OP 递增的时候，正正就是 OP^2 递增的时候。

逐步解题

阶段 1 距离的平方

由 $x = ut\cos\alpha$ 及 $y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$，可得

$$OP^2 = u^2t^2\cos^2\alpha + u^2t^2\sin^2\alpha - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4 = u^2t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

想一想 对 t 求导。抽出因子 t 之后，剩下的是甚么？它在甚么情况下对所有 t 皆为正？

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = 2u^2t - 3ugt^2\sin\alpha + g^2t^3 = t(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2).$$

当 $t > 0$ 时，其正负号与二次式（quadratic）$g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2u^2$ 的正负号相同。这个二次式的首项系数为正，所以只要它的判别式（discriminant）为负，它对每一个 t 都是正的：

$$9u^2g^2\sin^2\alpha - 8u^2g^2 < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sin^2\alpha < \frac{8}{9} \quad\Longleftrightarrow\quad \sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

在这情况下，OP 在整个飞行过程中都在递增。 ■

阶段 2　较陡的抛掷

想一想 若 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$，这个二次式有两个实根。它们是正数吗？较小的那个根是否出现在质点落地之前？

两根之和为 $\frac{3u\sin\alpha}{g} > 0$，两根之积为 $\frac{2u^2}{g^2} > 0$，所以两根皆为正数；而在两根之间，这个二次式为负，因而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2$ 也为负。质点在 $T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$ 时落地。较小的根是

$$t_1 = \frac{u}{2g}(3\sin\alpha - \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}) < \frac{u}{2g}\cdot 3\sin\alpha < \frac{2u\sin\alpha}{g} = T.$$

所以紧接 t_1 之后（而且在落地之前），OP 正在递减。 ■

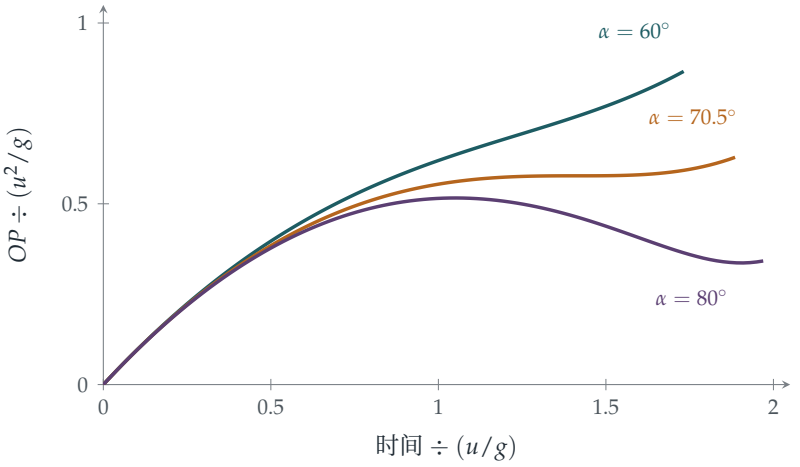


图 11.10.1 三个不同角度下，球与抛球者的距离随时间的变化，直至落地为止。在 60°（蓝绿色）时，距离一直增加。在临界角（critical angle）$\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$（琥珀色）时，距离有一瞬间停顿。在 80°（紫红色）时，球先远离，然后有一段时间向抛球者靠近，到落地前一刻又再远离。

阶段 3 移动的观察者

想一想 Q 沿地面朝相反方向以速率 v 离开 O。从 Q 量度，水平距离是 $x + vt$。这对计算有甚么影响?

间距 QP 的水平分量为 $(u\cos\alpha + v)t$，垂直分量为 $ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$。所以

$$QP^2 = \big((u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha\big)t^2 - ugt^3\sin\alpha + \tfrac{1}{4}g^2t^4,$$

与之前的式子相同，只是第一项中的 u^2 换成了 $w^2 = (u\cos\alpha + v)^2 + u^2\sin^2\alpha$。其导数（derivative）为 $t\big(g^2t^2 - 3ug\sin\alpha\, t + 2w^2\big)$，而它对所有 $t > 0$ 皆为正的条件是

$$9u^2\sin^2\alpha < 8w^2 \quad\Longleftrightarrow\quad u^2\sin^2\alpha < 8(u\cos\alpha + v)^2,$$

这是在两边消去 $8u^2\sin^2\alpha$ 之后所得的结果。两边取平方根（$u\sin\alpha$ 与 $u\cos\alpha + v$ 皆为正数），即得 $u\sin\alpha < 2\sqrt{2}(u\cos\alpha + v)$，整理后就是

$$2\sqrt{2}\,v > (\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha)u. \qquad \blacksquare$$

（这个条件足以令 QP 在整个飞行过程中递增，因为此时导数对所有 $t > 0$ 皆为正。）

回顾

- **对平方求导。**距离的平方是多项式，而它的导数与距离本身的导数正负号相同。

- **恒为正的二次式。**“在所有时间都递增”这个条件，化成了一个关于判别式的条件。
- **把新问题化为旧问题。**移动的观察者只改变了一个系数，所以之前的分析可以直接套用。

背后的数学

几何观点

OP 递减的时候，正正就是 P 的速度指向“内侧”的时候，即速度与向量 $\overrightarrow{OP}$ 成钝角（obtuse angle），也就是 $\overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{v}<0$ 的时候。对于陡峭的抛掷，质点在接近飞行最高点时，位于抛球者的高处而略为偏前，几乎是水平地向外移动，但已开始下坠；相对于 $\overrightarrow{OP}$ 的方向而言，一旦速度中向下的部分盖过向外的部分，质点便会靠近。对于较平的抛掷，质点总是在前方足够远的位置，以致它的速度从不指回 O。临界情况就是速度恰好只在一个瞬间与 $\overrightarrow{OP}$ 垂直，亦即图 11.10.1 中距离停顿的那一刻。

单调性并非必然

许多“显然”会增加的量，其实并不如此。月球与地球的距离会来回振荡；在弯曲的路上，即使其中一辆车一直领先，两车之间的距离仍可以减少；猎物大量繁殖的时候，捕食者的数量却可以下降。要证明一个量是单调的，通常就是要证明某个导数的正负号固定不变，而这里所用的技巧（化为多项式，再检查它的根或判别式）正是标准的做法。在分析学（analysis）中，单调性往往是证明收敛（convergence）的关键：有界的单调数列必定收敛，正如你在第 2 章所见。

思维技巧

藉导数检查单调性

要判断一个量是否一直递增，可对它（或对它的某个方便处理的函数，例如它的平方）求导，然后问：导数会否变号？

在大学里，这类关于正负号的论证会用来证明不等式、找出极大值和极小值，以及研究微分方程（differential equation）解的稳定性；在后者中，一个一直递减的量（如 Section 8.2 所示）便证明了系统会趋于平稳。

延伸练习

1 **有多近？** 对于 $\alpha = 80°$，求 OP 取得局部极大值（local maximum）和局部极小值（local minimum）的时间，以及该两刻的距离，以 u^2/g 为单位。

2 **在斜面上。** 把球沿一个与水平成 β 角的斜面向上抛出，并落在斜面上，就这个情况重做第 (i) 部分。临界角（从斜面量起）会改变吗？

3 **考虑空气阻力。** 假设球还受到一个与其速度成正比的阻力（resistance）。不作计算，你预期临界角会大于还是小于 70.5°？为甚么？

4 **从高处抛出。** 若球从悬崖顶抛出，并落在远低于崖顶的地方，证明无论以甚么角度抛出，OP 最终都会递增，并判断是否存在某些角度，令它在某个阶段递减。

延伸阅读

- **James Walker, *The Flying Circus of Physics***（Wiley）。数以百计出人意表的日常物理谜题。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 3 章，讲述抛体运动，并附有数道有违直觉的题目。
- **J. M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。证明一样东西恒大于另一样东西的艺术。

11.11 外野手如何接球

题目

STEP II 1998，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/98-s2-q11`

引子

球被高高击向外野。出色的外野手会立刻起步，并且刚好在球落下的一刻赶到。这是怎样做到的？没有人能在不足一秒之内心算出抛体运动（projectile motion）的方程，何况外野手根本不知道球的速率和角度。然而外野手，以至接飞碟的狗，都能轻易做到。

1968 年，物理学家 Seville Chapman 提出了一个答案，而本题正是要证明它。假如外野手留意着球的仰角（angle of elevation）θ，并且移动自己的位置，使 $\tan\theta$ 以恒定的速率增加，她就会刚好到达球的落点。她毋须懂得任何物理，只需能察觉球看起来是升得比稳定上升快，还是比稳定上升慢。一个困难的预测问题，就这样换成了一条简单的反馈（feedback）法则。

动笔之前

想一想 设击球手位于原点，外野手在距离 D 处。若球位于 (x, y)，$\tan\theta$ 是甚么？

球在外野手眼睛上方高度 y 处，并在她前方水平距离 $D - x$ 处（球正朝她飞来）。所以 $\tan\theta = \frac{y}{D-x}$。

逐步解题

阶段 1　位置恰到好处的外野手

想一想　设球的水平速率为 U，初始垂直速率为 W，并在时间 T 落下（回到眼睛的高度）。试以 U、W、T、g 和 t 表示 x、y 和 D。你能把 y 因式分解吗？

我们有 $x = Ut$ 和 $y = Wt - \frac{1}{2}gt^2$，而球在 $T = \frac{2W}{g}$ 时回到眼睛的高度，外野手正在该处：$D = UT$。由于 $W = \frac{1}{2}gT$，

$$y = \tfrac{1}{2}gt(T - t), \qquad D - x = U(T - t).$$

因子 $T - t$ 可以约去：

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}\,t.$$

所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta = \frac{g}{2U}$，是一个常数。 ■

阶段 2　奔跑中的外野手

想一想　现在外野手从距离 D_0 处起步，以速率 v 跑向击球手，所以她的位置是 $D_0 - vt$。她在时间 T 接到球。D_0 是甚么？把刚才的计算重做一次。

要在时间 T 接到球，她必须身处球的落点：$D_0 - vT = UT$，所以 $D_0 = (U + v)T$。她与球的水平距离是 $D_0 - vt - Ut = (U + v)(T - t)$，而该因子同样可以约去：

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}\,t.$$

所以只要她以适当的速率奔跑，$\tan\theta$ 就会以恒定的速率增加。

想一想　题目问的是逆命题（converse）：假如她奔跑时令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\theta$ 保持不变，她会接到球吗？

假设她以速率 v 奔跑，而 $\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D_0-(U+v)t}$ 以恒定的速率 c 增加，所以 $\tan\theta = ct$（在 $t = 0$ 时它等于 0）。于是

$$\tfrac{1}{2}g(T - t) = c(D_0 - (U + v)t) \quad \text{对所有} t.$$

比较 t 的系数和常数项：$\frac{1}{2}g = c(U + v)$ 及 $\frac{1}{2}gT = cD_0$。两式相除，得 $D_0 = (U + v)T$：这正是在时间 T 身处落点的条件。所以她应选择 v 使 $\tan\theta$ 保持稳定上升，这样她就能接到球。 ■

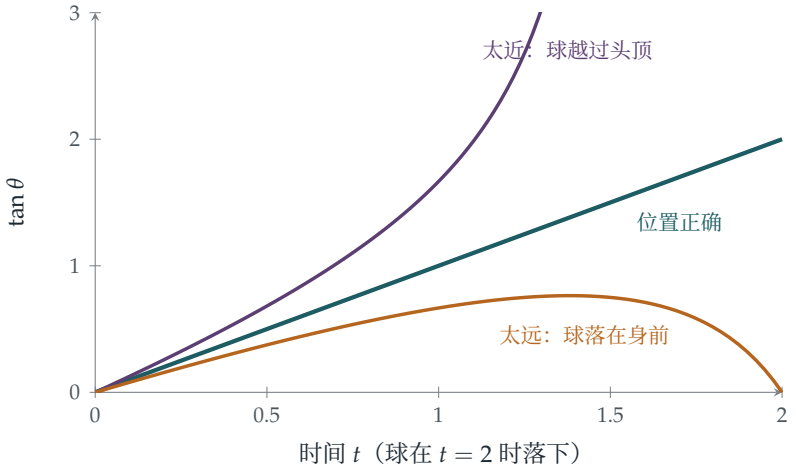


图 11.11.1 站着不动的外野手所见的情况，球的落点在距离 2 处（取 $g = 2$，水平速率为 1）。站在正确的位置时，$\tan\theta$ 沿直线上升（蓝绿色）。站得太近，$\tan\theta$ 会加速上升，球越过她的头顶（紫红色）；站得太后，它升得愈来愈慢，然后下降（琥珀色）。法则是：移动自己的位置，使球的影像稳定上升。

回顾

- **找出公因子。**高度和水平距离都含有 $T - t$，把它约去后，$\tan\theta$ 就变成线性。
- **证明逆命题。**要说明这条法则行得通（即它确实令人接到球），需要反方向的论证，也就是比较系数。
- **容易察觉的不变量（invariant）。**$\tan\theta$ 是否稳定上升，凭肉眼就能判断；落点则不能。

背后的数学

光学加速度抵消

Chapman 的法则现称为*光学加速度抵消*（optical acceleration cancellation）：外野手移动自己的位置，使“光学加速度” $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tan\theta$ 保持为零。假如球的影像加速上升，球就会越过她的头顶，所以她要后退；假如影像减速，球就会落在她身前，所以她要向前跑（图 11.11.1）。这个策略没有告诉她球会落在哪里，却能把她带到那里。这是一条反馈控制律（feedback control law），与导引导弹所用的同出一辙：导弹采用*比例导引*（proportional navigation），使指向目标的视线角保持不变，那正是同一个想法的横向版本。

外野手实际怎样做

真实的外野手是否采用 Chapman 的法则？1990 年代有人把摄影机装在棒球外野手的头上做实验，结果并不一致。Michael McBeath 及其同事于 1995 年在 *Science* 上提出，对于打向一侧的球，外野手会沿弯曲的路线奔跑，使球的影像在视野中沿直线移动（即“线性光学轨迹”，linear optical trajectory），这同样能把他们带到接球的位置。其后的研究显示，这两种策略以及两者的混合都有人使用，而且外野手往往并非以恒定速率奔跑。2004 年的一项研究发现，接飞碟的狗所走的路线，与同样的光学法则吻合。无论细节如何，这个令人惊叹的结论依然成立：接球并不需要预测，只需要正确的反馈。

Chapman 的论文

Seville Chapman 的“Catching a baseball”于 1968 年刊登在 *American Journal of Physics*，全文只有三页，内容基本上就是本题的计算。他指出这个策略只在没有空气阻力时才成立，而真实棒球的轨迹会因阻力和旋转而变形，令情况变得复杂。尽管如此，大脑利用视野中简单的不变量来解决复杂的控制问题，这个想法在心理学和机械人学中已变得十分重要。

思维技巧

找出容易观察的不变量

当某个量难以预测时，不妨找一个与它相关、可以直接观察的量，而这个量恰好在一切顺利时表现得简单。

在这里，落点难以预测，但 $\tan\theta$ 的变化率却容易监察。在大学里，这就是反馈控制的想法，也是选择一个可观察量、让它包含你所需信息的想法。

延伸练习

1. **向后跑。**假如球会落在外野手起步位置的后方，证明她应该背离击球手奔跑，而同一条法则依然适用。

2. **不是 θ 本身。**证明对于位置恰到好处的外野手，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 并非常数。为甚么 $\tan\theta$ 才是应该留意的量？

3. **眼睛的高度。**假如球是从外野手眼睛高度以下 h 的位置击出，对于位置恰当的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 t 的线性函数？（假设她在眼睛的高度接球。）

4 **空气阻力。**在线性空气阻力之下，水平速度会按指数衰减。对于位置恰当的外野手，$\tan\theta$ 是否仍然是 t 的线性函数？

延伸阅读

- **Seville Chapman，“Catching a baseball”**，*American Journal of Physics* 36 (1968)。
- **Michael McBeath、Dennis Shaffer 及 Mary Kaiser，“How baseball outfielders determine where to run to catch fly balls”**，*Science* 268 (1995)。
- **Dennis Shaffer 等，“How dogs navigate to catch Frisbees”**，*Psychological Science* 15 (2004)。

11.12 橡皮绳上的蚂蚁

题目

STEP II 2018，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/18-s2-q10`

引子

一只蚂蚁沿着一条长一公里的橡皮绳出发，每秒走一厘米。每过一秒，绳子都会均匀地再拉长一公里。绳的远端以每秒一千米的速度飞驰而去，比蚂蚁快十万倍。蚂蚁最终能走到绳的尽头吗？

令人惊讶的是，答案是能。绳子拉伸时会带着蚂蚁一起前进；虽然蚂蚁每次走过的路程占绳长的比例愈来愈小，但这些比例加起来就像调和级数（harmonic series），而调和级数是发散（diverge）的（Section 2.3）。蚂蚁终会到达，只是所需的时间远远超过宇宙的年龄。本题精确地解出这个问题的连续版本，并发现所需时间随两个速率之比呈指数增长。

动笔之前

想一想 绳子是均匀拉伸的：每一小段都按相同的倍数伸长。在时间 t，绳长为 $a+ut$。若距离钉子 x 的一点位于全长的 $\frac{x}{a+ut}$ 处，这一点移动得有多快？

绳上每一点所占全长的比例 f 保持不变，所以它与钉子的距离是 $f(a+ut)$，速率是 $fu=\frac{ux}{a+ut}$。靠近钉子的点几乎不动；远端则以 u 的速率移动。

逐步解题

阶段 1 蚂蚁的方程

蚂蚁相对于绳子的速率是 v，还要加上牠脚下那段绳子的速率：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + \frac{ux}{a+ut}.$$

? **想一想** 用商法则（quotient rule）对 $\frac{x}{a+ut}$ 求导，并代入 $\dot{x}$ 的方程。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = \frac{\dot{x}}{a+ut} - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{1}{a+ut}\left(v + \frac{ux}{a+ut}\right) - \frac{ux}{(a+ut)^2} = \frac{v}{a+ut}. \qquad \blacksquare$$

蚂蚁已走过的绳长比例以 $\frac{v}{a+ut}$ 的速率增加：即牠自身的速率除以当时的绳长。拉伸的影响完全消失了，因为拉伸不会改变任何一点所占的比例。

阶段 2　到达尽头

? **想一想** 由 0 积分至 t。比例何时达到 1?

蚂蚁从钉子出发，所以

$$\frac{x}{a+ut} = \int_0^t \frac{v\,\mathrm{d}s}{a+us} = \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a}.$$

当比例等于 1 时，蚂蚁到达尽头：$\ln\frac{a+uT}{a} = \frac{u}{v} = k$，所以 $a+uT = ae^k$，即

$$uT = a(e^k - 1). \qquad \blacksquare$$

对数可以无限增大，所以无论绳子拉得多快，蚂蚁总会到达。

阶段 3　回程

? **想一想** 往回走时，蚂蚁相对于绳子的速度是 $-v$。现在牠所占比例的变化率是多少？牠在时间 T 由比例 1 出发。

以 $-v$ 重复同样的计算，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x}{a+ut}\right) = -\frac{v}{a+ut}$，所以

$$\frac{x}{a+ut} = 1 - \frac{v}{u}\ln\frac{a+ut}{a+uT}.$$

当 $a+ut = (a+uT)e^k$ 时，比例降至 0。由于 $a+uT = ae^k$，回程所需时间为

$$t - T = \frac{(a+uT)(e^k-1)}{u} = \frac{ae^k \cdot uT/a}{u} = Te^k. \qquad \blacksquare$$

回程所需的时间是去程的 e^k 倍：蚂蚁掉头的时候，绳子已是开始时的 e^k 倍长。

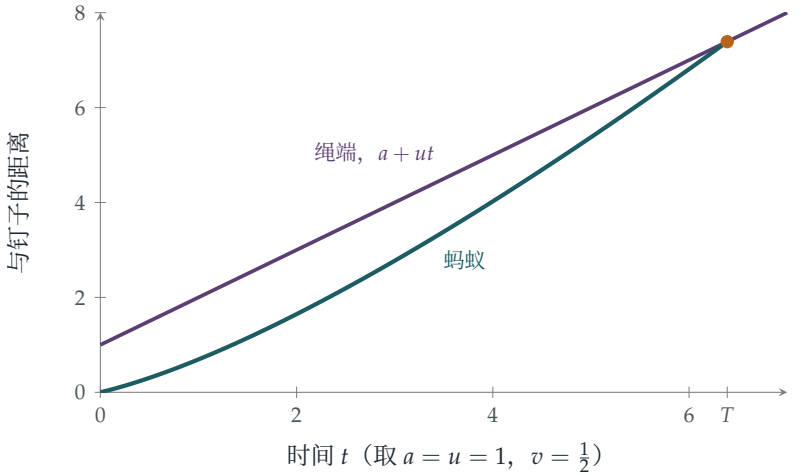


图 11.12.1 蚂蚁（蓝绿色）沿着绳子行走，绳端（紫红色）移动的速率是蚂蚁步行速率的两倍（$k=2$）。蚂蚁被拉伸带着前进，牠与钉子的距离增长得愈来愈快。牠在 $T=e^2-1\approx 6.39$ 时到达尽头。

回顾

- **选对变量。**已走过的绳长比例是最自然的量：拉伸不会改变它。
- **乔装了的积分因子（integrating factor）。**乘以 $\frac{1}{a+ut}$ 之后，一条线性微分方程（linear differential equation）就变成了一个恰好的导数。
- **发散胜过速度。**比例像对数一样增长，而对数是无界的，所以蚂蚁总会到达。

背后的数学

调和级数的版本

这个谜题通常是以离散的拉伸来叙述的。一条绳长 1 公里；蚂蚁在第一秒走 1 厘米；然后绳子拉长 1 公里；然后蚂蚁再走一厘米，如此类推。在第 n 秒，蚂蚁在长 n 公里的绳上走了 1 厘米：所占比例为 $\frac{1}{100\,000\,n}$。拉伸不会改变牠所占的比例，所以 N 秒之后，牠已走过绳子的

$$\frac{1}{100\,000}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)\approx\frac{\ln N+0.577}{100\,000}$$

。当 $H_N\approx 100\,000$ 时牠便到达，那大约是 $e^{100\,000}$ 秒之后，这个数有超过 43 000 位数字。（作为比较，宇宙的年龄约为 4×10^{17} 秒。）我们的连续版答案与此吻合：$k=\frac{u}{v}=100\,000$，而 $T\approx\frac{a}{u}e^k$。

膨胀宇宙中的光

绳上的蚂蚁，正是光穿越膨胀宇宙的一个模型。遥远的星系被空间本身的膨胀带着远离我们，而它们发出的光则以速率 c 在膨胀的空间之中向我们传播，就像蚂蚁沿着拉伸中的绳子行走一样。遥远星系的光最终能否到达我们这里，取决于膨胀率如何随时间变化。在一个以稳定速率膨胀的宇宙中，就像那条绳子一样，光最终总会到达。而在一个加速膨胀的宇宙中（我们的宇宙看来正是如此），有些星系的光永远不会到达我们这里：这就是*宇宙事件视界*（cosmic event horizon）。对蚂蚁来说，相应的情况是一条按指数拉伸的绳子，绳端的速率与绳长成正比地增长（可在练习中试试）。

加德纳的蚂蚁

这个谜题似乎是法国数学家 Denys Wilquin 在 1972 年发明的，当时说的是橡皮筋上的一条虫；其后马丁·加德纳（Martin Gardner）在他的 *Scientific American* 专栏和著作 *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments* 中介绍，令它广为人知。它是最著名的例子之一：结果违反直觉，却又容易证明；它也是人们说明调和级数发散时最爱用的例子。

思维技巧

找出不受复杂因素影响的量

当问题中某个部分改变了一切（这里是拉伸），就去找一个它不会改变的量。

拉伸会改变每一段距离，却不改变任何比例。改用比例来处理，拉伸就从问题中消失了。在大学里，这个想法会以宇宙学和流体力学中的*共动坐标*（comoving coordinates）的形式出现，更一般地说，就是寻找在某个变换下的不变量（invariant）。

延伸练习

1. **中途。**蚂蚁何时走到绳子的一半？那是在时间 $\frac{T}{2}$ 之前还是之后？

2. **指数拉伸。**假设绳长改为 $ae^{\lambda t}$。证明蚂蚁仅当 $v > \lambda a$ 时才能到达尽头。（这就是宇宙事件视界。）

3. **加速的绳子。**若绳长为 $a + \frac{1}{2}bt^2$，蚂蚁是否总能到达？

4. **离散的谜题。**在离散版本中，蚂蚁需要多少秒才能走过绳子的 1%？请使用 $H_N \approx \ln N + 0.577$。

延伸阅读

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。书中收录了橡皮绳上的蚂蚁。
- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。调和级数，以及这只蚂蚁。
- **Barbara Ryden, *Introduction to Cosmology***（Cambridge University Press）。膨胀的空间、视界与共动坐标，属大学本科程度。

11.13 铲雪车问题

题目

STEP III Specimen paper，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/spec-s3-q11`

引子

雪不停地均匀落下。一辆铲雪车（snowplough）沿着一条路出发，前方的积雪愈来愈深，车速也愈来愈慢。稍后，第二辆铲雪车沿着已经清理过的路面跟上。它遇到的只是第一辆车驶过之后才落下的雪，积雪较浅，所以走得较快，最终会追上前车。那是甚么时候？

这是一道著名问题的变体，原题由 Ralph Agnew 于 1942 年发表，后来成为微分方程（differential equations）中最广为人知的趣题之一。它的妙处在于，第二辆车的速率取决于*第一辆车何时驶过每一点*，所以第 (i) 部分的解会代入第 (ii) 部分的方程之中。而这条方程“倒过来”写，把时间看成距离的函数，才最为巧妙。

动笔之前

想一想 第一辆铲雪车在时间 t 遇到的积雪深度为 $h + kt$。它的速率是多少？求 x 作为 t 的函数较容易，还是求 t 作为 x 的函数较容易？

它的速率是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}$。这条方程可以干净利落地分离变量（separation of variables）。把它倒过来，$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k}$，这是一条以 t 为 x 的函数的简单线性（linear）方程。对第一辆车来说，两种写法都行得通；对第二辆车来说，倒过来的形式却必不可少。

逐步解题

阶段 1 第一辆铲雪车

由 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \alpha\left(\frac{h}{k} + t\right)$ 可知，$\frac{h}{k} + t$ 这个量随 x 按指数增长（exponential growth）：$\frac{h}{k} + t = Ce^{\alpha x}$。当 $x = 0$ 时 $t = 0$，所以 $C = \frac{h}{k}$，于是

$$t_1(x) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha x} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

第一辆车按指数规律减慢：走过相等的距离，所需的时间按指数递增。

阶段 2　第二辆铲雪车的方程

想一想　第二辆铲雪车在时间 t 到达位置 y。那里的积雪有多深？（第一辆车刚驶过之后，深度是多少？）

第一辆车在时间 $t_1(y)$ 清除了位置 y 上的所有积雪。自此之后，雪以速率 k 累积，所以在时间 t 的深度为 $z = k\big(t - t_1(y)\big)$。因此第二辆车的速率是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha k\big(t - t_1(y)\big)} = \frac{1}{\alpha\big(t - t_1(y)\big)},$$

倒过来便得

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = t - \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right). \qquad \blacksquare$$

阶段 3　求解

想一想　这条方程对 t 是线性的：$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} - \alpha t = -\frac{\alpha h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right)$。应该用哪个积分因子（integrating factor）？初始条件是甚么？

乘以 $e^{-\alpha y}$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(te^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - e^{-\alpha y}\right), \qquad te^{-\alpha y} = -\frac{\alpha h}{k}y - \frac{h}{k}e^{-\alpha y} + C.$$

第二辆车在 $t = T$ 时由 $y = 0$ 出发，所以 $T = -\frac{h}{k} + C$，得 $C = T + \frac{h}{k}$。再乘回 $e^{\alpha y}$ 并整理，

$$t_2(y) = \frac{h}{k}\left(e^{\alpha y} - 1\right) + \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)e^{\alpha y}. \qquad \blacksquare$$

（题目要求验证，方法是：求导后代入；各项合并后正好是 $\alpha\big(t - t_1(y)\big)$。）

阶段 4　相撞

想一想　两辆铲雪车在同一时间到达同一点时便会相撞。试比较 $t_2(y)$ 与 $t_1(y)$。

两者之差为 $t_2(y) - t_1(y) = \left(T - \frac{\alpha h y}{k}\right)e^{\alpha y}$，即两辆车在位置 y 的时间差距。这个差距缩减至零时，

$$y = \frac{kT}{\alpha h}. \qquad \blacksquare$$

在这一点，第二辆车追上第一辆车：它前方的积雪深度为零，而在这个模型中，它的速率变成无限大（图 11.13.1）。

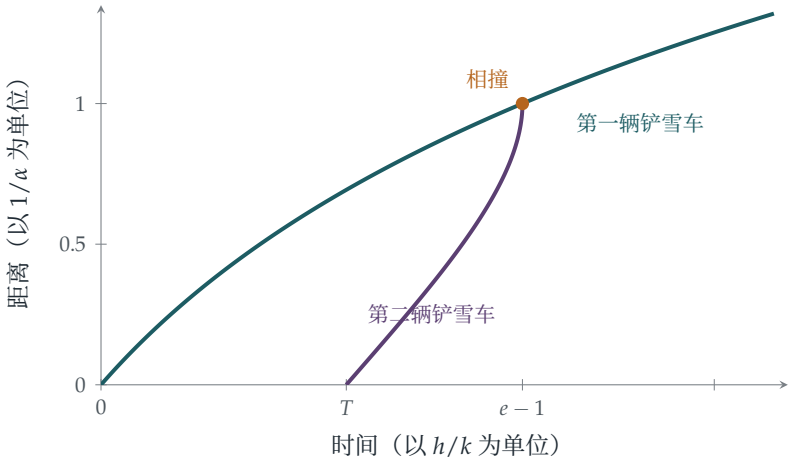


图 11.13.1 两辆铲雪车的距离对时间图，其中 $T = \frac{h}{k}$（即第二辆车在积雪深度倍增之时出发）。第一辆车（蓝绿色）随积雪加深而减慢。第二辆车（紫红色）较迟出发，路面已清理了一部分，它一边拉近距离一边加速，在距离 $\frac{kT}{\alpha h} = \frac{1}{\alpha}$、时间 $(e-1)\frac{h}{k}$ 处追上第一辆车。

回顾

- **把方程倒过来。**把 t 看成位置的函数，两条方程都是线性的。
- **前一个解代入后一条方程。**第一辆车的时间表 $t_1(y)$ 出现在第二辆车的方程之中。
- **作比较，不必解两次。**相撞的条件来自差 $t_2 - t_1$，而这个差有一个简单的因子。

背后的数学

Agnew 的铲雪车

Ralph Palmer Agnew 的版本出自他 1942 年的教科书 *Differential Equations*：某天早上开始下起大雪，雪势均匀不变；一辆铲雪车在正午出发，第一个小时走了 2 英里，第二个小时走了 1 英里；雪是甚么时候开始下的？铲雪车的速率与积雪深度成反比，而深度则与开始下雪以来所经过的时间成正比。答案（见下面的一道练习）涉及黄金比（golden ratio）：雪大约在正午前 37 分钟开始下。其后才陆续出现像本题这样有两辆铲雪车的版本。

会传递的信息

第二辆车的运动取决于路面上记录下来的历史：每一点最后一次被清理的时间。这是具有记忆（memory）的系统的一个简单例子，在这类系统中，某处的状态取决于该处先前发生过的事。交通流、冰川的运动和山火的蔓延都有这种特性，而它们背后的数学，即一阶偏微分方程（first-order partial differential equations）及其特征线（characteristics）的理论，是大学二年级的标准课题。把时间写成位置的函数（“前沿何时到达这里?”），正是处理这类问题时所用的到达时间（arrival times）方法。

思维技巧

选择自变量（independent variable）

把变量的角色对调，微分方程可能会简单得多。如果变化率取决于某处发生某事的时间，就把时间写成位置的函数。

本题的两条方程写成 $t(y)$ 的方程后都变成线性。在大学里，自由选择哪个变量作自变量（并在方便时更换）是经常用到的手法，由流体力学中的速度图法（hodograph method），到几何中以弧长（arc length）作参数，比比皆是。

延伸练习

1 **Agnew 的问题。**雪在正午前某个未知的时间开始以稳定的速率落下。一辆铲雪车的速率与积雪深度成反比，它在正午出发，第一个小时走了 2 英里，第二个小时走了 1 英里。证明若雪在正午前 t_0 小时开始下，则 $\left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2=\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3$，由此推出 $\frac{1}{t_0}$ 是黄金比，并求雪何时开始下。

2 **验证。**用求导验证 $t_2(y)$ 满足第 (ii) 部分的微分方程。

3 **时间差距。**证明若 $kT>h$，时间差距 $t_2(y)-t_1(y)$ 先增加，然后减少至零，并求它在何处最大。若 $kT\le h$，又会怎样？试解释其意义。

4 **三辆铲雪车。**第三辆铲雪车在时间 $2T$ 出发。写出它的运动方程。它追上第二辆车，是在第二辆车追上第一辆车之前还是之后?

延伸阅读

► **Ralph Palmer Agnew, *Differential Equations***（McGraw-Hill, 1942）。铲雪车问题的原始

出处。

- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press），书中讨论了铲雪车问题和许多其他问题。
- **Richard Haberman, *Mathematical Models***（SIAM）。交通流与特征线，程度浅易。

11.14 是抛物线，不是悬链线

题目

STEP I 1991，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/91-s1-q10`

引子

用手拿着一条链的两端，它便会垂成一条称为*悬链线*（catenary）的曲线（此名源自拉丁文的“链”字）。伽利略（Galileo）以为它是抛物线（parabola），其实不然，少年时代的惠更斯（Huygens）在 1646 年已证明了这一点。不过，若像悬索桥（suspension bridge）那样，用等距排列的吊杆把沉重的路面挂在链上，链*确实*会形成抛物线。分别在于重量如何分布：悬链线的重量沿弯曲的链身分布，而桥的重量则沿水平方向均匀分布。

本题只需在每个节点分解力（resolving forces），便能证明这条抛物线。关键在于张力（tension）的水平分量在整条链上处处相同，所以每一段的斜率都与它所承托的重量成正比。结果是一个优美的规律：相邻节点之间的落差按奇数 $1, 3, 5, 7, \ldots$ 递增，而这些奇数的部分和（partial sums）正是完全平方数。

动笔之前

想一想 在每个节点 A_i 上有三个力作用：相邻两段链的张力，以及吊杆上所挂的重量 w。重量无法影响张力的哪一个分量？

重量是铅垂的，所以在每个节点上，两个张力的水平分量必须互相平衡。因此，张力的水平分量（设为 H）在链的每一段都相同。

逐步解题

阶段 1　每个节点上的方程

设线段 $A_{i-1}A_i$ 与水平线所成的俯角为 ϕ_i（由 A_{i-1} 向中间方向量度），则其张力 T_i 的水平分量为 $T_i\cos\phi_i$，铅垂分量为 $T_i\sin\phi_i$。对 $1\le i\le n$，在 A_i 分解力：

$$T_i\cos\phi_i = T_{i+1}\cos\phi_{i+1} = H, \qquad T_i\sin\phi_i - T_{i+1}\sin\phi_{i+1} = w.$$

（外侧的一段向上向外拉，铅垂分量较大；内侧的一段向内并稍微向下拉；两者之差承托着吊杆。）

> ? **想一想**　在中间的节点 A_{n+1} 会怎样？试利用桥的对称性。

由对称性，在 A_{n+1} 相接的两段互为镜像，所以各自承托该吊杆的一半重量：$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w$。

阶段 2　由重量求斜率

由中间向外逐段计算，铅垂分量为

$$T_{n+1}\sin\phi_{n+1} = \tfrac{1}{2}w, \quad T_n\sin\phi_n = \tfrac{3}{2}w, \quad \dots, \quad T_1\sin\phi_1 = \tfrac{2n+1}{2}w.$$

把各式除以 H，得斜率为 $\tan\phi_i = \frac{(2(n+1-i)+1)w}{2H}$。线段 $A_{i-1}A_i$ 的斜率同时等于 $\frac{y_{i-1}-y_i}{h}$，所以

$$\frac{y_n - y_{n+1}}{h} = \frac{w}{2H}, \qquad \frac{y_{n-1}-y_n}{h} = \frac{3w}{2H}, \qquad \dots, \qquad \frac{y_0-y_1}{h} = \frac{(2n+1)w}{2H}.$$

取倒数后再乘以相应的奇数，可知 $\frac{h}{y_n-y_{n+1}}$、$\frac{3h}{y_{n-1}-y_n}$、…、$\frac{(2n+1)h}{y_0-y_1}$ 各项均等于 $\frac{2H}{w}$。 ■

阶段 3　抛物线

> ? **想一想**　设 j 为由中间向外数的节点序数，使得 A_{n+1-j} 与 A_{n+1} 的水平距离为 jh。它比 A_{n+1} 高出多少？

把各段落差相加，并设 $c = \frac{wh}{2H}$：

$$y_{n+1-j} - y_{n+1} = c(1+3+5+\cdots+(2j-1)) = cj^2.$$

若 x 由中间量起，则 $x = jh$，所以该点高出最低节点 $\frac{c}{h^2}x^2 = \frac{w}{2Hh}x^2$。由对称性，另一边亦然，而两个支承点（$j = n+1$）也符合同一公式。因此所有点都位于抛物线

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}(x - x_{n+1})^2. \qquad ■$$

上。

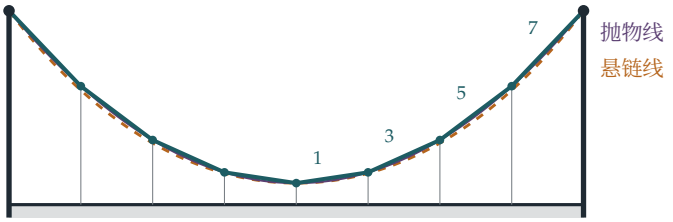


图 11.14.1 一条在相等水平间距上承受相等负载的链（蓝绿色）。它的节点位于一条抛物线上（紫红色），而由中间向外，相邻节点之间的落差之比为 $1:3:5:7$。一条只受自身重量、两端和最低点相同的自由链，则会垂成悬链线（琥珀色虚线），其底部较平坦，近支承点处较陡。

回顾

- **找出不变的量。**只有铅垂负载时，水平张力处处相同。
- **由中间开始累加。**每一段都承托它与中间之间的全部重量，所以铅垂分量每次增加 w。
- **奇数之和是平方数。**$1+3+\cdots+(2j-1)=j^2$ 把一列斜率变成了一条抛物线。

背后的数学

抛物线还是悬链线？

把上述论证改为连续的版本，便能同时解释这两条曲线。对于一条水平张力恒为 H 的链 $y(x)$，张力的铅垂分量为 Hy'，而在一小段上，它的变化等于该段所承受的负载：$H\,\mathrm{d}y' = \mathrm{d}W$。

- 若负载沿*水平方向*均匀分布（沉重的路面，每单位路面长度的重量为 ρ），则 $Hy''=\rho$，所以 y 是二次函数：一条抛物线。
- 若负载是链本身的重量，*沿链身*均匀分布（每单位链长的重量为 ρ），则 $Hy''=\rho\sqrt{1+y'^2}$，其解为悬链线 $y=c\cosh\frac{x}{c}$，其中 $c=H/\rho$。

在底部附近，链几乎是水平的，两者差不多一样；它们在支承点附近才有分别，因为那里的链较陡，同一段水平距离内包含较多的链。真实的悬索桥，桥面远比缆索重，所以形状十分接近抛物线。

倒转的链与拱

链处于纯张力状态；把它的形状上下倒转，便得到一个处于纯压力（compression）状态的拱，完全没有弯曲的倾向。胡克（Robert Hooke）在 1675 年以一个字谜（anagram）的形式发表了这个发现，解开后的意思是：“柔软的绳怎样悬垂，倒转过来，坚硬的拱便怎样屹立。”雷恩（Christopher Wren）与胡克把这个想法用于圣保罗大教堂（St Paul's Cathedral）的圆顶，而高迪（Antoni Gaudí）设计巴塞隆拿的圣家堂（Sagrada Família）时，则从天花板垂下挂着重物的绳子，再把照片倒转来看。圣路易斯的拱门（Gateway Arch）就是一条（加权的）倒置悬链线。

悬链线的挑战

1690 年，雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）向数学家提出挑战：求出悬垂的链的形状。不出一年，他的弟弟约翰（Johann）、莱布尼兹（Leibniz）和惠更斯都发表了解答。约翰·伯努利后来得意地忆述，出题的哥哥自己反而解不出来。悬链线是新兴的微积分（calculus）最早的胜利之一，并引出了双曲函数（hyperbolic functions）cosh 和 sinh；到了十八世纪，Vincenzo Riccati 和兰伯特（Johann Heinrich Lambert）对这些函数作了有系统的研究。

思维技巧

在每个节点分解力

对于由节点和直杆件组成的结构，在每个节点上令各力平衡。不变的分量和逐步累积的负载，往往会揭示结构的形状。

到了大学，这会发展成工程学中桁架（trusses）和框架（frameworks）的分析，而在连续极限下，则成为缆索、梁和薄膜的微分方程（differential equations）。由离散的链过渡到连续的链，与 Section 10.3 中由求和过渡到积分是同一步。

延伸练习

1 **偶数条吊杆。**把题目改为 $2n$ 条吊杆再做一次，此时链的最低处是中间的一段水平线段。各节点是否仍然位于一条抛物线上？

2 **张力。**以 H、w 和 n 表示链中的最大张力。它出现在哪里？

3 **悬链线。**验证 $y = c\cosh\frac{x}{c}$ 满足 $y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1+y'^2}$。证明悬链线由 $x = 0$ 到 $x = X$ 的长度为 $c\sinh\frac{X}{c}$。

4 **伽利略的错误。**一条长度为 $2L$ 的链悬挂在相距 $2d$ 的两个支承点之间。当 L 只比 d 稍大时，证明悬链线的垂度（sag）与抛物线的垂度近似相同。为甚么伽利略的实验没有显示出两者的分别？

延伸阅读

- **E. H. Lockwood, *A Book of Curves***（Cambridge University Press）。悬链线、抛物线及其相关曲线。
- **Jacques Heyman, *The Stone Skeleton***（Cambridge University Press）。由胡克的链说起，讲述砖石拱和圆顶如何屹立不倒。
- **David Billington, *The Tower and the Bridge***（Princeton University Press）。桥梁的艺术与工程。

我们学到了甚么

这一章由会摆动的物体、会旋转的物体，以及从运动中的位置所看到的景象说起。我们提出了三个问题：运动在甚么时候才算简单？怎样才是合适的观点？直觉是否可靠？以下是本章十四道题目所揭示的答案。

1. 运动在甚么时候才算简单？

简谐运动（simple harmonic motion）只有单一频率（frequency），而且频率与振幅（amplitude）无关，是最理想的情况。以固有频率（natural frequency）驱动它，便会产生共振（resonance）（Section 11.1）：稍为偏离共振时出现拍（beats），恰好处于共振时则无止境地增长。两个耦合振子（coupled oscillators）原来只是两个各自独立的简单振子乔装而成（Section 11.2），但两者频率之比是无理数 $\sqrt{3}$，所以合成的运动永不重复。真实的摆一点也不简单（Section 11.3）：它的周期（period）随振幅增大，当中涉及一个椭圆积分（elliptic integral），而高斯（Gauss）的算术几何平均（arithmetic–geometric mean）能以惊人的速度把它算出来。至于等时曲线（tautochrone）（Section 11.4），则说明了只要把轨道弯成摆线（cycloid），运动便可以再次变得完全简单。

2. 怎样才是合适的观点？

几乎每一道题目，都是靠选对变量或选对参考系（frame）而解决的。

- **坐标。**弧长（arc length）令等时曲线变得简单；组合 $x \pm y$ 把两个弹簧解耦（decouple）；改用占绳长的比例，便消去了蚂蚁问题中绳子的伸长（Section 11.12）；把时间写成距离的函数，令铲雪车的方程变成线性（Section 11.13）。
- **参考系。**在加速的火车中（Section 11.5），一个虚拟力（fictitious force）使重力倾斜，珠子于是围绕新的最低点振动。爱因斯坦（Einstein）把这个观察发展成广义相对论（general relativity）。
- **取矩的参考点。**对于旋转的弹珠（Section 11.6），由于摩擦力正正作用于接触点，所以对接触点的角动量（angular momentum）守恒，毋须知道摩擦力的大小也可求得最终速率。
- **等效系统。**一根杆的表现与三个质点完全相同（Section 11.7），各质点的权重正是辛普森法则（Simpson's rule）中的权重；而一个立体的平衡位置，就是其法线（normal）

穿过质心（centre of mass）之处（Section 11.8）。

3. 直觉是否可靠?

往往并不可靠。大炮射程所及区域的边界并不是一条弹道，而是所有弹道的包络线（envelope）（Section 11.9）。把球抛得够陡，它在落地之前会朝你飞回来（Section 11.10）。外野手毋须预测球的落点，只要令球的影像保持稳定上升，便可以把球接住（Section 11.11）。一只蚂蚁沿着绳子慢慢爬行，即使绳子伸长的速度比牠快十万倍，牠仍然能到达尽头（Section 11.12）。悬垂的链并不是抛物线，但承托着桥面的链却是（Section 11.14）。在每一个例子中，一段简短的计算都以精确的陈述取代了自信却错误的直觉，而且通常还附带一个解释。

4. 处理振动与参考系的工具箱

方法	在哪里用过
特解加余函数（particular plus complementary solution）	共振（11.1）
以特征向量（eigenvector）解耦	简正模式（normal modes）（11.2）
能量积分与代换	摆（11.3）
自然变量	等时曲线（11.4）；蚂蚁（11.12）
虚拟力	火车（11.5）
对某一点的角动量	回旋（11.6）
配对各阶矩（matching moments）	辛普森杆（11.7）
数算驻点（stationary point）	倾斜的平衡（11.8）
判别式（discriminant）与包络线	安全抛物线（11.9）
导数的正负号	飞回来（11.10）
比较系数	外野手（11.11）
积分因子（integrating factor）	蚂蚁（11.12）；铲雪车（11.13）
在接点处分解力	桥（11.14）

下一步

- 接下来的两章转向概率与统计，由 Section 12.1 开始。
- 简正模式就是特征向量（Section 7.2），而 Section 8.6 的量子谐振子（quantum harmonic oscillator），就是本章的振子在量子力学中的版本。
- 极限环（limit cycle）（Section 8.4）是能够自我维持的振动，而混沌（chaos）（Section 8.7）则是非线性振子受驱动时可能出现的现象。

如果你想在入读大学之前再进一步

- **A. P. French, *Vibrations and Waves***：讲解振动、共振与简正模式的经典入门书。
- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***：转动、参考系，以及许多出人意表的问题。
- **Steven Strogatz, *Sync***：由萤火虫到桥梁，振子如何变得步伐一致。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***：等时曲线、最速降线（brachistochrone）与铲雪车问题，连同它们的历史。

Coleman 曾打趣说，物理学家的一生，就是以愈来愈抽象的方式处理谐振子。本章尝试说明个中原因：振子是最简单的运动，而只要选对观点，几乎任何事物看起来都像一个振子。学会寻找这个观点，不论是一个变量、一个参考系，还是一个组合，正是力学所教的最有用的技巧。

延伸练习答案

以下只是简短的答案和提示，并非完整解答：只列出结果和关键步骤，让你核对自己的做法。请先认真做完每道练习，然后才翻看。

11.1 共振

1. 在升降机的参考系（frame）中，重力实际上相当于 $g-f$，而弦线的劲度（stiffness）是 $\frac{mg}{a}$（在 mg 的作用下它伸长 a）。因此 $\ddot{y}+\frac{g}{a}y=g-f$，开始时 $y=a$、$\dot{y}=0$。新的平衡位置（equilibrium）是 $a-\frac{af}{g}$，所以 $y=a-\frac{af}{g}(1-\cos\omega t)$：振幅（amplitude）为 $\frac{af}{g}$，而最小伸长量 $a(1-\frac{2f}{g})$ 是正数。升降机停止加速时，平衡位置回到 a，此时质点的位移是 $-\frac{af}{g}(1-\cos\omega T)$，速度是 $-\frac{af}{g}\omega\sin\omega T$。新的振幅是 $\frac{af}{g}\sqrt{(1-\cos\omega T)^2+\sin^2\omega T}=\frac{2af}{g}\left|\sin\frac{1}{2}\omega T\right|$。

2. 由 $x=Ct\cos nt$ 得 $\ddot{x}+n^2x=-2Cn\sin nt$，所以 $C=-\frac{nb}{2}$。再加上 $\frac{b}{2}\sin nt$ 以符合初始条件：$x=\frac{b}{2}(\sin nt-nt\cos nt)$。对题目中的公式就 p 使用洛必达法则（L'Hôpital's rule），当 $p\to n$ 时会得到相同的结果。

3. $n\sin pt-p\sin nt=n(\sin pt-\sin nt)+(n-p)\sin nt=2n\cos\frac{(n+p)t}{2}\sin\frac{(p-n)t}{2}+(n-p)\sin nt$。第二项很小。第一项是一个快速振荡，被包在缓慢变化的包络（envelope）$\left|\sin\frac{(n-p)t}{2}\right|$ 之内，而这个包络每隔 $\frac{2\pi}{n-p}$ 重复一次。

4. 振幅是 $\frac{F}{\sqrt{(n^2-p^2)^2+4k^2p^2}}$。把分母对 p^2 求极小：$-2(n^2-p^2)+4k^2=0$，所以 $p^2=n^2-2k^2$。

11.2 简正模式

1. 求导后，能量的变化率是 $\dot{x}\big(m\ddot{x}+\frac{\lambda}{a}(2x+y)\big)+\dot{y}\big(m\ddot{y}+\frac{\lambda}{a}(x+2y)\big)=0$。设 $u=x-y$ 及 $v=x+y$，能量便是 $\big(\frac{m}{4}\dot{u}^2+\frac{\lambda}{4a}u^2\big)+\big(\frac{m}{4}\dot{v}^2+\frac{3\lambda}{4a}v^2\big)$，每个括号都是一个简谐振子（simple harmonic oscillator）的能量，所以各自都是常数。

2. 周期 $\frac{2\pi}{\omega}$：以 $x=-y$ 及 $\dot{x}=-\dot{y}$ 开始（使得 $v\equiv0$）。周期 $\frac{2\pi}{\sqrt{3}\omega}$：以 $x=y$ 及 $\dot{x}=\dot{y}$ 开始。

3. 作用于 X 的力是 $-\frac{\lambda}{a}x-\frac{\mu}{a}(x+y)$。模式（mode）$x-y$ 仍然有 $\omega^2=\frac{\lambda}{ma}$，而 $x+y$ 现在则是 $\frac{\lambda+2\mu}{ma}$。当且仅当频率之比 $\sqrt{1+2\mu/\lambda}$ 是有理数时，所有运动都是周期性

的。

4. 矩阵是 $\frac{k}{m}\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$，特征向量（eigenvector）为 $(1,\sqrt{2},1)$、$(1,0,-1)$ 和 $(1,-\sqrt{2},1)$，分别对应 $2-\sqrt{2}$、2 和 $2+\sqrt{2}$。三个模式是：三者一同摆动，中间的摆幅最大；外侧两个反向摆动，中间的静止不动；以及中间的与外侧两个反向摆动。

11.3 真实的摆

1. 能量：$\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{\lambda}{2a}\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)^2=\frac{1}{2}mv^2$。位移最大时 $\sqrt{x^2+a^2}=a+\frac{v}{k}$，所以 $x_{\max}=\sqrt{\frac{2av}{k}+\frac{v^2}{k^2}}$。当 v 很小时，伸长量约为 $\frac{x^2}{2a}$，所以 $\dot{x}^2\approx v^2-\frac{k^2x^4}{4a^2}$。设 $x=Xu$ 及 $X=\sqrt{2av/k}$，周期 $4\int_0^X\frac{\mathrm{d}x}{\dot{x}}$ 便化为 $\frac{4X}{v}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$。回复力（restoring force）与 x^3 成正比，而不是与 x 成正比（在 $x=0$ 时弦线刚好处于自然长度），所以不存在简谐极限。

2. $(1-m\sin^2\phi)^{-1/2}\approx 1+\frac{m}{2}\sin^2\phi+\frac{3m^2}{8}\sin^4\phi$，其中 $m=\sin^2\frac{\gamma}{2}\approx\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma^4}{48}$。对 ϕ 取平均得 $1+\frac{m}{4}+\frac{9m^2}{64}$，而 γ^4 项是 $-\frac{1}{192}+\frac{9}{1024}=\frac{11}{3072}$。

3. 由 1 和 $\cos 45^\circ=0.70711$ 开始：$(0.85355,0.84090)$，然后 $(0.84722,0.84720)$，然后 0.847213。周期因子是 $\frac{1}{0.847213}=1.18034$。

4. 周期因子的变化是 $\frac{1}{16}(\gamma_5^2-\gamma_4^2)\approx 1.71\times10^{-4}$（以弧度计），所以时钟每天大约慢 15 秒。

11.4 等时曲线

1. 由于 $y=\frac{s^2}{4k}$，$\ddot{s}=-g\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=-\frac{g}{2k}s$：这是 $\omega^2=\frac{g}{2k}$ 的简谐运动（simple harmonic motion）。由 $s_0=2\sqrt{kh}$ 出发，在 V 处的速率是 $\omega s_0=\sqrt{2gh}$。

2. 这个碗相当于一个长度为 R 的摆。从很小的高度出发，到达底部所需的时间是 $\frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$。从碗边（$\gamma=90^\circ$）出发，所需时间是这个值的 1.180 倍，约为 $1.85\sqrt{R/g}$。

3. 会。两者都在四分之一周期后到达 V，并在该处碰撞。无论它们碰撞后以甚么速度离开，各自都以 s 作简谐运动，而且周期相同，所以各自恰好在半个周期后回到 V，并再次在 V 碰撞。（碰撞后静止于 V 的质点则会一直留在该处。）

4. 设 $x=R(\theta-\sin\theta)$ 及 $y=R(1-\cos\theta)$，则 $\mathrm{d}s=2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$，所以一拱的长度是 $\int_0^{2\pi}2R\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=8R$。面积是 $\int y\,\mathrm{d}x=R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=3\pi R^2$。

11.5 加速火车中的重力

1. 在车厢的参考系中，每单位质量受到一个向后（向南）的力 a，方向与发射方向相同。飞行时间为 $\frac{2V\sin\theta}{g}$，所以射程是 $\frac{V^2}{g}\big(\sin 2\theta+\frac{a}{g}(1-\cos 2\theta)\big)$。当 $\tan 2\theta=-\frac{g}{a}$ 时它的导数为零，所以 $2\theta\approx\frac{\pi}{2}+\frac{a}{g}$。极大值是 $\frac{V^2}{g}\big(\sqrt{1+a^2/g^2}+\frac{a}{g}\big)\approx\frac{V^2}{g}+\frac{V^2a}{g^2}$。

2. $x=ut\cos\theta-\frac{1}{2}ft^2$，在 $t=\frac{2u\sin\theta}{g}$ 时着地，着地点为 $x=\frac{2u^2\sin\theta}{g^2}(g\cos\theta-f\sin\theta)$。若 $\tan\theta>\frac{g}{2f}$，水平速度 $u\cos\theta-ft$ 会在着地前变为负数，所以 $\alpha=\tan^{-1}\frac{g}{2f}$。当 $f=g$ 及 $\theta=45^\circ$ 时，加速度刚好与初速度方向相反：抛体（projectile）沿直线 $y=x$ 笔直向上，停下，然后沿原路直接返回 O。

3. 有效重力（effective gravity）是向下的 g 加上向后的 a。自由液面与它垂直，所以倾斜的角度是 $\tan^{-1}\frac{a}{g}$。

4. 有效重力的大小是 $\sqrt{g^2+a^2}$，在 $x=\frac{ak}{2g}$ 处斜率是 $\frac{a}{g}$，曲率半径（radius of curvature）是 $\rho=\frac{k}{2}\big(1+\frac{a^2}{g^2}\big)^{3/2}$。周期是 $2\pi\sqrt{\rho/\sqrt{g^2+a^2}}=2\pi\sqrt{\frac{k(g^2+a^2)}{2g^3}}$，当 $a=0$ 时简化为 $2\pi\sqrt{\frac{k}{2g}}$。

11.6 后旋

1. 摩擦力作用于接触点，所以对该点的角动量（angular momentum）守恒：$maV+\frac{2}{5}ma^2\frac{V}{a}=mav_0+\frac{2}{5}ma^2\omega_0$。因此 $V=\frac{5v_0+2a\omega_0}{7}$，当 $\frac{v_0}{a\omega_0}<1$ 时它大于 v_0。

2. $V=\frac{5}{7}v_0$。最终能量是 $\frac{1}{2}m\big(\frac{5}{7}v_0\big)^2\big(1+\frac{2}{5}\big)=\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{2}mv_0^2$，所以损失了 $\frac{2}{7}$ 的能量。

3. 以 $I=ma^2$ 重复同一论证，得 $V=\frac{1}{2}(v_0-a\omega_0)$。令 $V=-\frac{v_0}{7}$，得 $\frac{v_0}{a\omega_0}=\frac{7}{9}$。

4. 在球心上方高度 h 处施加冲量（impulse）J，得 $mv=J$ 及 $\frac{2}{5}ma^2\omega=Jh$。滚动需要 $v=a\omega$，所以 $h=\frac{2}{5}a$。

11.7 杆中的辛普森法则

1. $\frac{1}{6}\big(1+4\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\big)=\frac{47}{60}\approx0.7833$，而 $\frac{\pi}{4}\approx0.7854$。对于 $\int_{-1}^{1}$，法则 $\frac{1}{3}\big(\mathrm{f}(-1)+4\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(1)\big)$ 对 x^3 给出 0，对 x^2 给出 $\frac{2}{3}$（两者都是准确值），但对 x^4 给出 $\frac{2}{3}$，而它的积分其实是 $\frac{2}{5}$。

2. 对于与基准方向成角 ψ 的轴，转动惯量（moment of inertia）是一个二次型（quadratic form）$A\cos^2\psi+B\sin^2\psi+2C\sin\psi\cos\psi$。在 $\psi\mapsto\psi+90^\circ$ 之下不变，迫使 $A=B$ 及 $C=0$，所以对每一条轴都相同：$\frac{1}{3}Ma^2$，即对平行于一边的轴的值。

3. 在每边中点各放置 $\frac{1}{3}$ 的面积，便能准确地在三角形上积分任何二次式（可在直角三角形上验证 1、x、x^2、xy）。所以这三个质点与该薄片（lamina）有相同的质量、质心（centre of mass）和二阶矩（second moments）。

4. 在每个方向上，取杆在 $-a$、0、a 处的权重 $\frac{1}{6}$、$\frac{2}{3}$、$\frac{1}{6}$ 的乘积：顶点处为 $\frac{M}{216}$，棱的中点处为 $\frac{M}{54}$，面心处为 $\frac{2M}{27}$，中心处为 $\frac{8M}{27}$。对通过中心且平行于一条棱的轴，$I = M\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{2}{3}Ma^2$。根据平行轴定理（parallel axis theorem），对一条棱的转动惯量是 $\frac{2}{3}Ma^2 + M(\sqrt{2}a)^2 = \frac{8}{3}Ma^2$。

11.8 倾斜的平衡

1. 由公共面起向圆锥方向量度，G 位于 $\frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3a}{8} + \frac{\lambda}{3}\cdot\frac{\lambda a}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{\lambda}{3}} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(2+\lambda)}$。在半球上，接触点处的法线必定通过该面的中心，所以当 G 低于该中心，即 $\lambda < \sqrt{3}$ 时，玩具会自行回正。侧卧时，玩具沿圆锥的一条母线（generator）及在边缘处与桌面接触；若通过 G 的铅垂线落在顶点与边缘之间，它便会停留在那里。这需要 G 的高度至少为 $-\frac{a}{\lambda}$，化简后即 $\lambda^3 + \lambda + 8 > 0$：恒成立。

2. 均匀球体上的每一点都是平衡位置（随遇平衡）。若质心稍微偏离球心，便只有两个：G 在最低处（稳定）和 G 在最高处（不稳定）。

3. 平衡出现在法线通过中心之处：即两轴的四个端点。靠在短轴的一端是稳定的（G 尽可能低）；靠在长轴的一端则不稳定。

4. 由对称性，G 在原点。当 $n = 2$ 时，$Y = r\left(\frac{1}{2} - p^2\right)$，而倾斜平衡需要法线通过 G，所以 $Y = 0$ 及 $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$。该处的斜率是 $-\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 倾斜的角度是 $\tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.7°$，若靠在另一个抛物面上则是 125.3°。两者互为关于 x 轴的反射，这就是倾斜角成对出现的原因。

11.9 安全抛物线

1. 每个质点位于 $ut\,\hat{\mathbf{n}} - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$，即在以 $-\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j}$ 为球心、半径为 ut 的球面上。从 $(0, \frac{u^2}{2g})$ 水平射出的质点沿 $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ 运动：这正是安全抛物线（parabola of safety）。以角 α 射出的质点在时间 $\frac{u}{g\sin\alpha}$ 于 $x = \frac{u^2}{g\tan\alpha}$ 处与它相切；水平射出的质点需时 $\frac{x}{u}$ 到达该处，所以它必须在时间 $\frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha} = \frac{u}{g}\tan\frac{\alpha}{2}$ 发射（这需要 $\alpha \geq 45°$，使切点在地面之上）。

2. 该直线与安全抛物线相交于 $R\sin\beta = \frac{u^2}{2g} - \frac{gR^2\cos^2\beta}{2u^2}$ 之处，得 $R = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$。在极大值处，练习 3 的两个角重合，所以最佳角度是角平分线的方向，即 $45° + \frac{1}{2}\beta$。

3. 设 $\lambda = \tan\theta$，两个值满足 $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2u^2}{gx}$ 及 $\lambda_1\lambda_2 = 1 + \frac{2u^2y}{gx^2}$。所以 $\tan(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{x}{y}$ 及 $\theta_1 + \theta_2 = 90° + \varphi$，其中 φ 是 OP 的仰角。OP 与铅垂线的角平分线位于 $\frac{1}{2}(90° + \varphi)$。

4. 顶点位于 $\left(\frac{u^2}{2g}\sin 2\theta, \frac{u^2}{2g}\sin^2\theta\right)$，焦距（focal length）是 $\frac{u^2\cos^2\theta}{2g}$，所以焦点（focus）的高度是 $\frac{u^2}{2g}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$。无论 θ 是多少，它与 O 的距离都是 $\frac{u^2}{2g}$。

11.10 会朝你飞回来的球

1. 取单位使 $u = g = 1$，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}OP^2 = t(t^2 - 3t\sin\alpha + 2)$，其根为 $t \approx 1.050$（局部极大，$OP \approx 0.516\frac{u^2}{g}$）和 $t \approx 1.904$（局部极小，$OP \approx 0.336\frac{u^2}{g}$）。球在 $t \approx 1.970$ 着地。

2. 沿斜面及垂直于斜面方向分解，$OP^2 = u^2t^2 - ugt^3\sin(\alpha' + \beta) + \frac{1}{4}g^2t^4$，其中 α' 由斜面起量度。这就是平地的公式，只是 $\alpha = \alpha' + \beta$。所以条件 $\sin(\alpha' + \beta) > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 所涉及的是与水平所成的角；若由斜面起量度，临界角便降至 $70.5° - \beta$（前提是球尚未着地）。

3. 较小。阻力（drag）抵消水平运动，并使下降变得更陡，所以球落回时更接近铅垂方向，令 OP 更容易缩短。

4. OP^2 的公式不涉及着地点，所以与之前一样，当且仅当 $\sin\alpha > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，OP 会有一段时间递减（而飞行时间较长，意味着递减阶段必定在着地之前出现）。最终下落占主导，OP 便会递增。

11.11 外野手如何接球

1. 若她站在 D_0 处，并以速度 v 背离击球手（batsman）跑动，球便在她前方 $D_0 + vt - Ut$ 的距离处。要接到球，她需要 $D_0 + vT = UT$，这时距离是 $(U - v)(T - t)$，所以 $\tan\theta = \frac{gt}{2(U-v)}$，同样是线性的。若球落在她身后，则 $UT > D_0$ 及 $v > 0$：她向后跑。

2. $\theta = \tan^{-1}\frac{gt}{2U}$，所以 $\dot\theta = \frac{g/2U}{1+(gt/2U)^2}$，它是递减的。$\tan\theta$ 之所以是线性的，是因为高度 $\frac{1}{2}gt(T - t)$ 和距离 $U(T - t)$ 有公因式 $T - t$。

3. 会。相对于她眼睛的高度是一个在接球时刻为零的二次式，所以可因式分解为 $(T - t)(c + dt)$；除以 $U(T - t)$ 后剩下一个线性函数（它起初是负数：她最初要向下看）。

4. 不会。有阻力时，水平距离是 $\frac{U}{k}(\mathrm{e}^{-kt} - \mathrm{e}^{-kT})$，而高度并不等于它乘以 t 的一个线性函数，所以 $\tan\theta$ 不再是线性的。

11.12 橡皮绳上的蚂蚁

1. $\frac{x}{a+ut} = \frac{1}{k}\ln\frac{a+ut}{a}$，它在 $t = \frac{a}{u}(\mathrm{e}^{k/2} - 1)$ 时等于 $\frac{1}{2}$。由于 $\frac{T}{2} = \frac{a}{2u}(\mathrm{e}^{k/2} - 1)(\mathrm{e}^{k/2} + 1)$ 而 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{k/2} + 1) > 1$，这个时刻在 $\frac{T}{2}$ 之前。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{L} = \frac{v}{L} = \frac{v}{a}\mathrm{e}^{-\lambda t}$，所以 $\frac{x}{L} = \frac{v}{a\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})$，只有当 $v > \lambda a$ 时才会达到 1。

3. $\frac{x}{L} = v\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{a+\frac{1}{2}bs^2}$，它趋向 $\frac{v\pi}{\sqrt{2ab}}$。所以只有当 $v > \frac{\sqrt{2ab}}{\pi}$ 时，蚂蚁才会到达。

4. 这需要 $\frac{H_N}{100\,000} = \frac{1}{100}$，所以 $H_N = 1000$，而 $N \approx \mathrm{e}^{999.4} \approx 10^{434}$ 秒。

11.13 铲雪车问题

1. 正午后时间 t 的积雪深度与 $t+t_0$ 成正比，所以铲雪车走过的距离是 $c\ln\frac{t+t_0}{t_0}$。条件 $x(1)=2$ 及 $x(2)=3$ 给出 $\left(1+\frac{1}{t_0}\right)^3=\left(1+\frac{2}{t_0}\right)^2$。设 $u=\frac{1}{t_0}$，这便化简为 $u^2-u-1=0$，所以 $u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 及 $t_0\approx 0.618$ 小时：大约在 11:23 开始下雪。

2. $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y}-\frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y}+\alpha\left(T-\frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$，而 $\alpha\left(t-(\mathrm{e}^{\alpha y}-1)\frac{h}{k}\right)$ 与它相同。

3. 时间差距是 $\left(T-\frac{\alpha h y}{k}\right)\mathrm{e}^{\alpha y}$，它的导数在 $y=\frac{kT-h}{\alpha h}$ 处为零。若 $kT>h$，差距会一直增大到该处，然后缩小，在 $y=\frac{kT}{\alpha h}$ 处减至 0。若 $kT\le h$，导数 $\alpha\mathrm{e}^{\alpha y}\left(T-\frac{h}{k}-\frac{\alpha h y}{k}\right)$ 对所有 $y>0$ 都是负数，所以差距从一开始便缩小。第二辆铲雪车面对的积雪深度是 $k\times$（差距）；只要这比第一辆铲雪车在同一地点遇到的积雪深，它便会落后得更远。

4. $\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t_3}{\mathrm{d}y}=t_3-t_2(y)$。写成 $t_3=t_2+g$，得 $g=\mathrm{e}^{\alpha y}\left(T-\alpha T y+\frac{\alpha^2 h y^2}{2k}\right)$。若 $kT\ge 2h$，它在 $y=\frac{k}{\alpha h}\left(T-\sqrt{T^2-2hT/k}\right)$ 处为零，早于第二辆铲雪车追上第一辆之处；若 $kT<2h$，则第二辆会先追上第一辆。

11.14 是抛物线，不是悬链线

1. 是。水平张力 H 仍然是常数，中间一段的斜率为 0，其后斜率每次递增 $\frac{w}{H}$。以水平一段的中点为起点量度 x，第 k 个接点位于 $x=(k-\frac{1}{2})h$，比最低的接点高出 $\frac{wh}{2H}k(k-1)$，即 $\frac{w}{2Hh}\left(x^2-\frac{h^2}{4}\right)$：是一条抛物线。

2. 张力是 $\sqrt{H^2+V^2}$，在垂直分量 V 最大之处最大：即在两端的一段，该处 V 承托一半的负载，即 $\frac{(2n+1)w}{2}$。所以 $T_{\max}=\sqrt{H^2+\frac{1}{4}(2n+1)^2w^2}$。

3. $y'=\sinh\frac{x}{c}$ 及 $y''=\frac{1}{c}\cosh\frac{x}{c}=\frac{1}{c}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{c}}$。长度是 $\int_0^X\cosh\frac{x}{c}\,\mathrm{d}x=c\sinh\frac{X}{c}$。

4. 对于垂度（sag）为 s 的平缓曲线，悬链线（catenary）和抛物线的长度都约为 $2d+\frac{4s^2}{3d}$，所以两者都给出 $s\approx\sqrt{\frac{3}{2}d(L-d)}$；它们只在 s^4 阶才有分别。对于一条几乎拉紧的链，这个差别远小于伽利略（Galileo）所能量度的任何数值。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

全书共 13 章，本册为第 11 章。 全书各章及所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为

beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。

