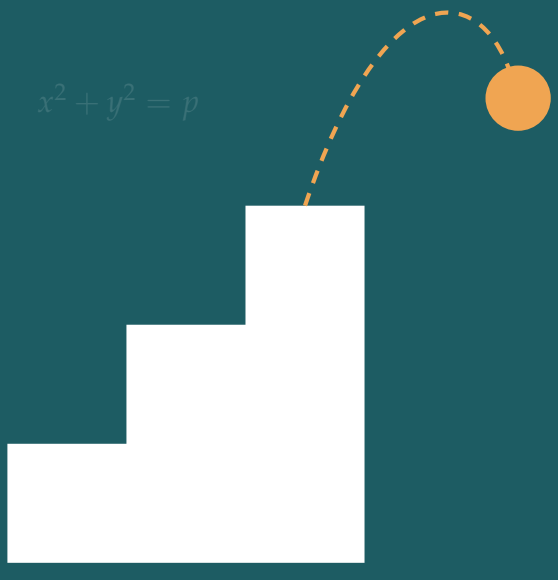
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

第 10 章

守恒定律、碰撞与引力



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

第 10 章

守恒定律、碰撞与引力

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

第 10 章：守恒定律、碰撞与引力

本册是 *Beyond STEP* 全书 13 章中的第 10 章。全书、各章的单行本、每一节的可列印工作纸，以及每一道 STEP 试题的详细解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

10

守恒定律、碰撞与引力

有些东西永远不变。知道是哪些，物理学就懂了一半。

本章内容

10.1	牛顿摆	STEP II 1990
10.2	叠球效应	STEP II 2010
10.3	火箭与枪炮	STEP III 2017
10.4	一个分子与一个活塞	STEP I 2002
10.5	有限时间内的无限次反弹	STEP III 2002
10.6	二体化为一体	STEP III 2004
10.7	球壳内的引力	STEP III 1999
10.8	排成三角形的三颗恒星	STEP I 1999
A	练习答案	第 59 页

甚么保持不变

> 有一个事实，或者你愿意的话，可称之为一条定律，支配着迄今所知的一切自然现象。这条定律至今未见任何例外。
>
> — 费曼（Richard Feynman）论能量守恒，*The Feynman Lectures on Physics*（1963）

学校里的力学（mechanics）通常离不开力：画一幅图，分解各力，再应用 $F = ma$。这套方法对付斜面上的木块绰绰有余，却对付不了历时仅千分之一秒的碰撞（collision），因为其间的力既巨大又未知；也对付不了一边飞行一边改变质量的火箭，或者三颗同时互相牵引的恒星。在这些情况下，出路是不再追问力，而改为追问甚么不能改变。

只要没有外力作用，动量（momentum）就守恒。在弹性碰撞（elastic collision）中能量守恒，而在其他碰撞中，能量的损失可以量度出来。质量、角动量（angular momentum）和质心（centre of mass）的运动也遵从类似的规律。这些定律不会告诉你一切，但它们永远成立，适用于复杂得根本无法仔细分析的系统，而且往往在动手计算之前，就已排除了大部分的可能性。

守恒定律为何重要

守恒定律（conservation law）是物理学中最可靠的工具。在称为 β 衰变（beta decay）的放射过程中，射出的粒子的能量加起来对不上数；泡利（Wolfgang Pauli）没有放弃能量守恒，反而在 1930 年预言有一种看不见的粒子带走了失去的能量，而中微子（neutrino）在二十六年后果然被探测到。工程师靠动量和能量的收支帐来设计防撞栏、安全气袋和火箭。天文学家靠观察质心来秤量恒星、寻找行星。到了 1918 年，诺特（Emmy Noether）解释了这些定律为何成立：每一条守恒定律都是大自然某种对称性（symmetry）的投影。动量守恒，是因为物理定律在任何地方都相同；能量守恒，是因为物理定律在任何时刻都相同。

引力（gravity）是本章的第二个主题。牛顿（Newton）正是用这种力把天上与地上统一起来，而它与守恒定律是天生的拍档：轨道、引力弹弓和塌缩的星云，全都要通过能量和动量，再加上一个关于球体的奇妙事实，才能理解。

你在大学会遇到甚么

大学一年级的动力学（dynamics）课程就从这里开始。你会遇到质点系统、质心与约化质量（reduced mass）、不同参考系（frame）中的碰撞、火箭之类的变质量系统，以及物

体在引力下的运动：开普勒（Kepler）定律、轨道、逃逸速度（escape velocity）。往后的课程会用拉格朗日（Lagrange）和哈密顿（Hamilton）的语言重新表述力学，届时诺特定理（Noether's theorem）会成为一个精确的命题，而守恒定律可以从单独一个函数的对称性中直接读出。再往前走，便是天体力学与三体问题（three-body problem）、分子运动论（kinetic theory）与统计力学（statistical mechanics）（Section 10.4 的活塞在那里会变成气体理论），以及爱因斯坦（Einstein）的引力理论。

贯穿本章的问题

三大问题

1. **守恒定律单凭自身能决定甚么？** 动量和能量何时能决定结果，何时只能排除某些可能？
2. **小步骤如何累积？** 一个简单的事件，例如一次碰撞或一次发射，重复多次甚至无限多次，会发生甚么事？
3. **如何驯服多个物体？** 哪些坐标的选择、哪些对称性，能把涉及几个相互作用物体的问题，化为我们解得到的问题？

本章由碰撞开始：牛顿摆（Newton's cradle）做得到甚么、做不到甚么（Section 10.1），以及一串球如何令速率倍增（Section 10.2）。接着探讨重复的过程：从货车上开炮与火箭方程（rocket equation）、分子撞向活塞而愈来愈快，以及在有限时间内弹跳无限多次的冰球。最后三节转向互相吸引或排斥的物体：质心与约化质量、球壳的引力，以及拉格朗日那个由恒星组成的旋转三角形。

本章的概念

§	课题	概念
10.1	牛顿摆	守恒定律作为约束条件
10.2	叠球	迭代（iteration）同一种碰撞；引力弹弓
10.3	火箭	变质量；火箭方程
10.4	分子运动论	绝热不变量（adiabatic invariant）
10.5	非弹性碰撞（inelastic collision）	有限时间内无限多次弹跳
10.6	二体问题（two-body problem）	质心与约化质量
10.7	牛顿引力	球壳定理（shell theorem）；自由落体式塌缩
10.8	三体问题	拉格朗日的等边三角形解

如何阅读本章

计算之前，先列出甚么是守恒的，以及在哪个参考系中守恒。然后问一问：换个位置看，问题会否简单一些？例如从质心看、从移动中的活塞看、从弹跳中的球看。本章不少题目在合适的参考系中几乎变得不费吹灰之力，而力学的大部分功夫，正在于找出这个参考系。

10.1 牛顿摆

题目

STEP II 1990，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/90-s2-q14`

引子

把牛顿摆（Newton's cradle）的一个球拉开，然后放手：另一端会有一个球飞出。拉开两个，就有两个飞出。为甚么？为甚么不是一个球以两倍速率飞出，或者三个球以三分之二的速率飞出？这两种情况的动量同样正确。

答案要从力学的两大守恒定律（conservation laws）说起。动量（momentum）与能量（energy）合起来所施加的限制，远比其中任何一个单独施加的严格得多，你想像得到的结果大多会被它们排除。本题把这两条定律用作约束条件（constraints）：不是用来计算会发生甚么，而是用来判断甚么可以发生。把守恒定律看成每一个可能结果都必须遵守的规则，这种想法贯穿整个物理学。

动笔之前

想一想 一粒质量为 m 的弹珠以速率 u 运动，撞上一粒质量为 M 的静止弹珠，而动能（kinetic energy）守恒。碰撞后两者的速度是多少？若 $M = m$ 又如何？

设碰撞后的速度为 p 和 q。由动量得 $mp + Mq = mu$，由能量得 $mp^2 + Mq^2 = mu^2$。把这两式写成 $m(u-p) = Mq$ 和 $m(u-p)(u+p) = Mq^2$，然后相除，得 $u + p = q$。于是

$$p = \frac{m-M}{m+M}\,u, \qquad q = \frac{2m}{m+M}\,u.$$

当 $M = m$ 时，第一粒弹珠停下，第二粒以速率 u 离开：两者只是交换了速度。这就是质量相等的弹珠能把运动沿着队列传递下去的原因。

逐步解题

阶段 1　只有最后两粒运动

想一想　假设碰撞后只有 A_n（速度 p）和 A_{n+1}（速度 q）运动。写出守恒定律。哪一粒弹珠的运动限制了 p 的正负号?

由动量和能量得

$$mp + \lambda m q = mu, \qquad \tfrac{1}{2}mp^2 + \tfrac{1}{2}\lambda m q^2 = \tfrac{1}{2}mu^2.$$

这正是质量为 m 的弹珠撞上质量为 λm 的弹珠时的方程，所以（除了 $p = u$、$q = 0$ 这个解之外，而该解需要 A_n 穿过 A_{n+1}）

$$p = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,u, \qquad q = \frac{2}{1+\lambda}\,u.$$

若 $\lambda < 1$，两者皆为正，且 $p < q$：A_n 跟在 A_{n+1} 后面，但走得较慢，所以两者分开，一切并无矛盾。若 $\lambda > 1$，则 $p < 0$：A_n 向后运动。但 A_{n-1} 静止在它的正后方，并与它接触，而 A_n 不能穿过它。所以这种运动不可能发生。 ■

阶段 2　三粒弹珠

想一想　现在假设只有 A_{n-1}、A_n 和 A_{n+1} 运动，速度分别为 a、b、c。已知哪些弹珠静止、哪一粒在哪一粒后面，a、b、c 必须满足甚么不等式 (inequalities)?

弹珠 A_{n-2} 静止在 A_{n-1} 后面（它确实存在，因为 $n \geq 3$），所以 $a \geq 0$。而且没有弹珠可以越过前面的那一粒，所以 $a \leq b \leq c$。合起来就是 $0 \leq a \leq b \leq c$。守恒定律为

$$a + b + \lambda c = u, \qquad a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2.$$

想一想　把动量方程平方，再与能量方程比较。剩下甚么?

平方后，$u^2 = a^2 + b^2 + \lambda^2 c^2 + 2ab + 2\lambda ac + 2\lambda bc$。减去能量方程，

$$0 = \lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b).$$

由于 $\lambda > 1$ 且 $a, b, c \geq 0$，右边每一项都非负，所以每一项都等于零。特别地，$c = 0$，于是 $0 \leq a \leq b \leq c$ 迫使 $a = b = 0$。但这样总动量就是 0，而不是 mu。矛盾：这种运动不可能发生。 ■

停一停，试一试 留意这个论证的结构。把动量方程平方会产生 $2ab$ 之类的交叉项（cross terms），而能量方程却没有这些项。两者之差量度了运动有多“分散”。当 $\lambda > 1$ 时，同一个论证可以排除只有 $A_k, \dots, A_{n+1}$ 以非负速度运动的任何结果，你看得出原因吗?

阶段 3 两粒可以运动的弹珠

想一想 向前运动的弹珠必须全部位于远端，而这种情况既然行不通，也许有一粒弹珠是向后运动的。哪一粒弹珠可以自由地向后运动?

只有 A_0 的后面没有任何东西。不妨试试：A_0 以速度 p 运动（可能是负数），A_{n+1} 以速度 q 运动，其余全部静止。守恒定律再次与质量为 m 和 λm 的两个物体碰撞时相同，所以

$$p = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\,u, \qquad q = \frac{2}{\lambda + 1}\,u.$$

A_0 反弹，A_{n+1} 向前运动，中间的弹珠保持静止，一切并无矛盾。这就完全像是 A_0 直接撞上了 A_{n+1}，而中间那一列相等的弹珠充当了完美的信差。 ■

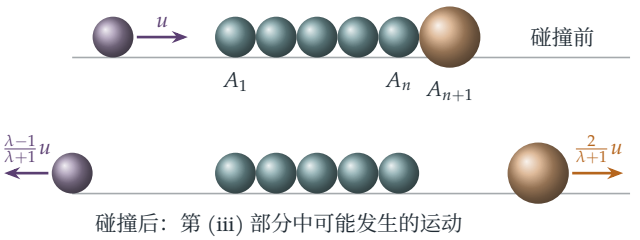


图 10.1.1 一列相等的弹珠（蓝绿色），末端是一粒较重的弹珠（琥珀色，$\lambda > 1$）。碰撞后，A_0 反弹，重弹珠离开，中间每一粒弹珠都保持静止，完全像是 A_0 直接撞上了 A_{n+1}。

回顾

- **以守恒定律作为约束条件。**我们从来没有仔细追踪每一次碰撞，只是问：动量、能量和几何条件容许哪些结果?
- **物理上的不等式十分重要。**“弹珠不能互相穿过”给出了不等式 $0 \le a \le b \le c$，而排除第 (i) 和第 (ii) 部分的，正是这些不等式，而不是守恒定律。
- **平方后相减。**把动量的平方与能量比较，会得出一个由交叉项组成的和，而这个和必须等于零。

背后的数学

为甚么只有一个球飞出

在由相等的球组成的牛顿摆中，假设有 k 个球以速率 w 一起离开。由动量得 $kw = u$，由能量得 $kw^2 = u^2$。两式相除，得 $w = u$ 及 $k = 1$。所以在离开的球一起运动的各种结果之中，只有“一个球以原来的速率离开”同时符合两条定律。两个球以一半速率离开，动量正确，但能量只有一半；一个球以两倍速率离开，则只有当它是半个球时动量才正确。

但问题并未就此解决。若有 n 个球，就有 n 个未知的速度，而守恒定律只有两条，所以同时符合两者的结果有无穷多个（试找出一个三个球以不同速率运动的结果）。实际出现哪一个，取决于各球在接触期间如何变形。1980 年代初，Frank Herrmann 和他的同事证明，我们熟悉的现象有赖于冲击沿着队列传递时*不会扩散开去*，而坚硬的钢球之间留有极小空隙时正是如此。若用软球，或者把球紧紧压在一起，牛顿摆的表现就没有那么干净利落；仔细的量度更显示，其他的球总会稍为移动。

守恒定律与对称

守恒定律从何而来？1918 年，诺特（Emmy Noether）证明了一条定理，它是现代物理学的基石之一：物理系统的每一种连续对称（continuous symmetry），都对应一个守恒量（conserved quantity）。如果物理定律在这里与在左边一米处相同（空间平移对称），动量就守恒。如果物理定律今天与明天相同（时间平移对称），能量就守恒。如果物理定律在每个方向都相同（旋转对称），角动量（angular momentum）就守恒。你会在大学二年级的拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）课程中学到诺特定理（Noether's theorem）；本章自始至终都在运用它的推论。

惠更斯、雷恩与沃利斯

1668 年，英国皇家学会（Royal Society）征求物体碰撞问题的解答。沃利斯（John Wallis）处理了非弹性碰撞（inelastic collisions），而雷恩（Christopher Wren）和惠更斯（Christiaan Huygens）则各自独立地解决了弹性（elastic）的情况。惠更斯的关键洞见是转换参考系（frame）：在一艘随质心（centre of mass）运动的船上观察碰撞，这时两个相等的球只是以相反方向、原来的速率弹回，然后再变换回岸上的观点。他还注意到某一个量，即各质量乘以速率平方之和，在碰撞前后相同；不过要再过一个世纪，动能本身才被确认为一个守恒量。

思维技巧

利用守恒量排除不可能的情况

当一个过程复杂得无法追踪时，列出不会改变的量，看看它们容许哪些结果。

物理学家正是这样推断粒子加速器中的碰撞：当中相互作用的细节并不清楚，但动量、能量和电荷必须平衡。再配合一个不等式（这里是弹珠不能互相穿过），就可以证明某个结果不可能发生。

延伸练习

1 **同一个问题再现。**试做 STEP I 2006，第 11 题（`step.maths.org/questions/06-s1-q11`）：槽中有一列粒子，末端是较重的一粒。哪些最终状态是可能的？

2 **追踪各次碰撞。**把第 (iii) 部分的撞击看成一连串独立的两粒弹珠碰撞，由 A_0 撞上 A_1 开始。逐步追踪这一连串碰撞，并证明最后得到的正是第 (iii) 部分所求得的运动。

3 **两个球撞入。**在一个由五个相等的球组成的牛顿摆中，两个球同时释放，以速率 u 撞上其余三个。证明“两个球以速率 u 离开”与两条守恒定律并无矛盾，并找出另一个同样符合的结果。

4 **末端较轻。**若 $\lambda < 1$，追踪一连串的两粒弹珠碰撞。除了 A_n 和 A_{n+1} 之外，最后还有其他弹珠在运动吗？

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。动量守恒与能量守恒，附有大量关于碰撞的习题。
- **Frank Herrmann & Peter Schmälzle, “Simple explanation of a well-known collision experiment”**，*American Journal of Physics* 49 (1981)。解释牛顿摆为何行得通。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（Johns Hopkins University Press）。深入浅出地讲述对称与守恒之间的联系。

10.2 叠球效应

题目

STEP II 2010，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/10-s2-q10`

引子

把一个网球放在篮球上面，然后让两个球一起落下。篮球从地面反弹，网球随即向上飞射，升到原来下落高度的好几倍，有时甚至高得撞上天花板。这个实验请到户外去做。

题目的第 (i) 部分说明，单独一次碰撞有一个速率上限：无论撞过来的球有多重，一个静止的球被撞之后，速率都不可能超过来球速率的两倍。第 (ii) 部分则说明怎样打破这个上限：让运动沿着一串愈来愈轻的球传递下去，每传一步，速率都会再乘上一个倍数。把太空探测器送往外行星，靠的正是同一个想法；也有人提出，超新星（supernova）爆发的机制当中有一部分也是如此。

动笔之前

想一想 根据 Section 10.1：若质量为 M、以速率 u 运动的物体与质量为 m 的静止物体发生弹性碰撞（elastic collision），碰撞后 m 的速率是多少？

那一节的结果（把两个质量的角色对调）给出被撞粒子的速率为 $\frac{2M}{M+m}u$。还有另一个记法：在弹性碰撞中，相对速度（relative velocity）会反向。如果重球几乎没有减慢，轻球离开时的速率就必定比重球的速率大约多出 u，也就是大约 $2u$。

逐步解题

阶段 1　速率上限

取 $M = bm$，碰撞后 A 的速率为

$$v_A = \frac{2bm}{bm + m}\,u = \frac{2b}{b+1}\,u.$$

> **想一想** $\frac{2b}{b+1}$ 与 2 相比，哪个较大？当 $b \to \infty$ 时会怎样？

由于对任何 b 都有 $\frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{2}{b+1} < 2$，所以 A 的速率总是小于 $2u$，无论 B 有多重。当 $b \to \infty$ 时，这个速率趋近 $2u$：一个无限重的球会把 A 弹开，就像 A 撞上一堵移动中的墙一样。 ■

阶段 2　沿着一串粒子传递

> **想一想** 在第 (ii) 部分，每个粒子的质量都是下一个粒子的 λ 倍。对于这串粒子中的每一次碰撞，第 (i) 部分告诉了我们甚么？

B_1（质量 $\lambda^n m$）撞上 B_2（质量 $\lambda^{n-1} m$），后者的质量是前者的 λ 分之一。在第 (i) 部分取 $b = \lambda$，可知 B_2 以速率 $\frac{2\lambda}{\lambda+1}u$ 离开。接着 B_2 撞上 B_3，后者的质量同样是前者的 λ 分之一，于是 B_3 以速率 $(\frac{2\lambda}{\lambda+1})^2 u$ 离开。经过 n 次这样的碰撞之后（最后一次是 B_n 撞上 A），

$$v_A = \left(\frac{2\lambda}{\lambda+1}\right)^n u.$$

（各个 B 之间其后再发生的碰撞，只会把 A 推得更快，不会使它减慢，因为从来没有东西从前方撞向 A。）

> **想一想** $\frac{2\lambda}{\lambda+1}$ 比 1 大还是比它小？

由于 $\lambda > 1$，故 $2\lambda > \lambda + 1$，因此比值 $r = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$ 大于 1，而且当 $n \to \infty$ 时 $r^n \to \infty$。所以只要 n 取得够大，A 的速率要多快就有多快。 ■

阶段 3　快二十倍

取 $\lambda = 4$，则 $r = \frac{8}{5} = 1.6$，我们需要 $1.6^n > 20$。取以 10 为底的对数（logarithm），

$$\log_{10} 1.6 = \log_{10} 16 - 1 = 4\log_{10} 2 - 1 \approx 0.20412, \qquad \log_{10} 20 = 1 + \log_{10} 2 \approx 1.30103,$$

所以我们需要 $n > \frac{1.30103}{0.20412} \approx 6.37$。最小的值是 $n = 7$。（事实上 $1.6^6 \approx 16.8$，而 $1.6^7 \approx 26.8$。）

■

回顾

- **把单一结果反复套用。**第 (i) 部分的结果在第 (ii) 部分用了 n 次，把有界的增益变成无界的增益。

- **永远达不到的极限。**速率可以趋近上界 $2u$，却永远达不到，所以正确的写法是严格不等式（strict inequality）。
- **对数把乘方化为乘积。**“需要多少步”这个问题，变成了一道除法。

背后的数学

篮球与网球

设两个球从高度 H 一起落下，到达地面时的速率为 $U = \sqrt{2gH}$。假设一切碰撞都是完全弹性的，而且篮球比网球重得多。篮球从地面反弹，以速率 U 向上运动，随即遇上仍以速率 U 向下运动的网球。在篮球的参考系（frame）中，网球以 $2U$ 的速率迎面而来，撞上一个非常重的物体后反弹，再以 $2U$ 的速率离开。回到地面参考系，那就是以 $2U + U = 3U$ 的速率向上运动（图 10.2.1）。由于上升高度与抛射速率的平方成正比，网球会升到 $9H$ 的高度。

现实中的球并不是完全弹性的。若恢复系数（coefficient of restitution）为 e，质量比为 M/m，网球离开时的速率就是 $\frac{Me(2+e)-m}{M+m}U$。练习中的 STEP I 2014 Q10，就是由量度所得的高度反推质量比。

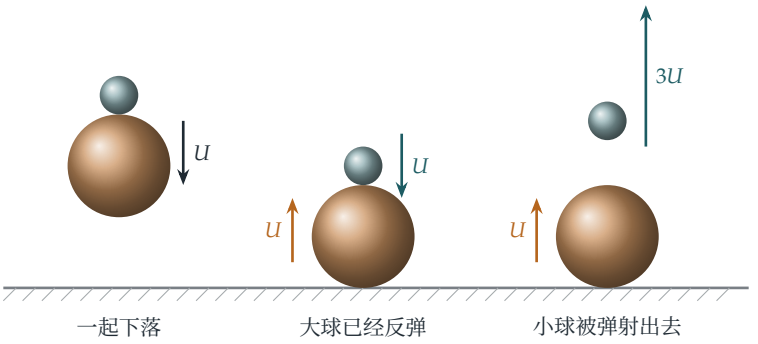


图 10.2.1 叠球效应：两个球都是完全弹性的，而且下面的球重得多。大球以速率 U 向上反弹，遇上以速率 U 落下的小球。相对于大球，小球以 $2U$ 的速率到达，又以 $2U$ 的速率离开，所以在地面参考系中它以 $3U$ 的速率离开，升到原来高度的九倍。

引力弹弓

太空探测器飞掠行星时并没有碰到行星，但引力的作用就像与一个非常重的物体发生一次非常柔和的弹性碰撞。在行星的参考系中，探测器绕过行星，离开时的速率与到达时相同。如果行星正以速率 V 朝探测器运动，那么在太阳的参考系中，探测器的速率最多可以增加 $2V$，与网球的情况完全一样。1977 年发射的两艘航行者号（*Voyager*）探测器，

利用了外行星一次罕见的排列，从木星飞往土星（航行者 2 号（*Voyager 2*）更继续飞往天王星和海王星），每次与行星相遇都获得加速。假如没有这些引力助推（gravity assist），前往海王星的旅程就要花上大约三十年，而不是十二年。能量来自行星，而行星因此减慢的幅度小得无法量度。

弹力球与超新星

1968 年，W. R. Mellen 在 *American Journal of Physics* 上描述了一种“弹力球反弹抛射体”（superball rebound projectile）：把几个由大至小的球叠起来，最顶的球可以用撞击速率的许多倍弹射出去。天体物理学家指出，这与核心塌缩超新星（core-collapse supernova）有一点粗略的相似之处：恒星向内坠落的外层物质撞上坚硬而致密的核心后反弹，冲击波（shock wave）把动量（momentum）向外带进密度愈来愈低的物质，把这些物质加速到极高的速率。叠球效应的示范常用来向学生解释这个想法，不过真实的超新星所涉及的物理比弹跳的球多得多，中微子（neutrino）就是其中之一。

思维技巧

把单一结果反复套用

如果一个过程只是把一个简单步骤重复多次，就先把这一步解决一次，然后把它复合起来。

每一步的增益因子都小于 2，但经过很多步之后，增益却变成无界，因为这些因子是相乘的。到了大学，这就是转移矩阵（transfer matrix）、多级放大器和多级火箭（Section 10.3）背后的想法：一条链的增益，等于链上各个环节的增益的乘积。

延伸练习

1 **真实的情况。**试做 STEP I 2014，第 10 题（`step.maths.org/questions/14-s1-q10`）：这是带有真实数据、反弹并不完美的叠球问题。

2 **非弹性的链。**试做 STEP I 2017，第 10 题（`step.maths.org/questions/17-s1-q10`）。这一题让碰撞沿着一串质量按几何级数增长的粒子传递下去。在甚么情况下，每个粒子都恰好参与两次碰撞？

3 **三个球。**把三个完全弹性的球叠起来，每个球都比它下面的球轻得多。证明最顶的球以 $7U$ 的速率离开，并升到 $49H$ 的高度。若有 k 个球，证明最顶的球以 $(2^k - 1)U$ 的速率离开。

4 **能量从何而来?** 在第 (ii) 部分，证明即使 A 的速率无界，总动能（kinetic energy）仍然守恒。那些重的粒子会怎样?

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章，当中包括叠球问题。
- **W. R. Mellen,“Superball rebound projectiles”**, *American Journal of Physics* 36 (1968)。篇幅短小，读来有趣。
- **Gary Flandro,“Fast reconnaissance missions to the outer solar system utilizing energy derived from the gravitational field of Jupiter”**, *Astronautica Acta* 12 (1966)。这篇论文提出了航行者号的“行星大巡游”（grand tour）。

10.3 火箭与枪炮

题目

STEP III 2017，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/17-s3-q11`

引子

太空中的火箭没有任何东西可以借力。它靠把质量向后抛出而前进，其余的就交给动量守恒（conservation of momentum）。一辆从车尾开炮的货车，就是一枚拆成一块块的火箭：每枚抛射体（projectile）都是一团喷出的废气。

那么，这些炮应该同时发射，还是逐一发射？这道题给出了明确的答案，但要看清楚它比较的是甚么。同时发射会令货车得到较大的速率，但也消耗较多能量，所以在两种情况下，这些炮所做的并不是同一件事。只要改变保持不变的量，答案就会逆转。把这一点弄清楚，便会引出太空飞行中最重要的方程——齐奥尔科夫斯基（Tsiolkovsky）的*火箭方程*（rocket equation），也会明白为甚么真正的火箭要分成多级。

动笔之前

想一想 某一门炮发射之前，货车以 V 行驶。发射之后，抛射体的速度是 $V - v$（即以速率 $v - V$ 向后运动）。抛射体*相对于发射前的货车*的速度是多少？

答案是 $(V - v) - V = -v$。所以每门炮都以速率 v 把抛射体向后抛出，这个速率是相对于货车在发射前一刻的速度而言的。这就是本题的固定规则；请牢记它，因为答案正是由它决定的。

逐步解题

阶段 1　同时发射

系统最初静止，动量为零。发射之后，货车（质量为 M）以 u 向前运动，而 n 枚抛射体则以速率 v 向后运动（因为发射前 $V=0$）。所以

$$Mu - nmv = 0, \qquad u = \frac{nmv}{M}.$$

所获得的动能（kinetic energy）为

$$K = \tfrac{1}{2}Mu^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}\frac{n^2m^2v^2}{M} + \tfrac{1}{2}nmv^2 = \tfrac{1}{2}nmv^2\Big(1 + \frac{nm}{M}\Big). \qquad \blacksquare$$

阶段 2　逐一发射

> **想一想**　在第 r 门炮发射前的一刻，货车连同余下的抛射体的质量是多少？速率又是多少？写出第 r 次发射的动量守恒式。

第 r 次发射之前，货车载有 $n-r+1$ 枚抛射体，所以它的质量是 $M+(n-r+1)m$，速率是 u_{r-1}。发射之后，载有 $n-r$ 枚抛射体的货车速率为 u_r，而射出的抛射体速度为 $u_{r-1}-v$。动量守恒：

$$\big(M+(n-r+1)m\big)u_{r-1} = \big(M+(n-r)m\big)u_r + m(u_{r-1}-v).$$

把含 mu_{r-1} 的项整理后，得 $\big(M+(n-r)m\big)(u_r-u_{r-1}) = mv$，这就是 $(*)$。 $\blacksquare$

把各个增量相加，

$$u_n = \sum_{r=1}^{n} \frac{mv}{M+(n-r)m} = \frac{mv}{M} + \frac{mv}{M+m} + \cdots + \frac{mv}{M+(n-1)m}.$$

第一项之后的每一项都小于 $\frac{mv}{M}$，而且 $n>1$，所以 $u_n < \frac{nmv}{M} = u$。 $\blacksquare$

> **停一停，试一试**　为甚么在这里逐一发射的效果较差？第一门炮发射时，它要加速的不只是货车，还有那 $n-1$ 枚未发射的抛射体，所以它带来的速率增幅，比起作用在空车上时要小。

阶段 3　能量的帐单

> **想一想**　写出第 r 次发射时动能的变化。$(*)$ 怎样帮助你化简含 $u_r^2 - u_{r-1}^2$ 的那一项？

动能的变化为

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_r^2 + \tfrac{1}{2}m(u_{r-1} - v)^2 - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r+1)m\big)u_{r-1}^2.$$

最后两项合并成 $\tfrac{1}{2}m(v^2 - 2vu_{r-1}) - \tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)u_{r-1}^2$。然后，把平方差因式分解，并利用 $(*)$，

$$\tfrac{1}{2}\big(M + (n-r)m\big)(u_r^2 - u_{r-1}^2) = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}).$$

所以

$$K_r - K_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv(u_r + u_{r-1}) + \tfrac{1}{2}mv^2 - mvu_{r-1} = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}mv(u_r - u_{r-1}). \qquad \blacksquare$$

由 $r = 1$ 加到 n，增量 $u_r - u_{r-1}$ 逐项相消（telescope），余下 u_n：

$$K_n = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu_n. \qquad \blacksquare$$

最后，$K = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}nmv^2 \cdot \tfrac{nm}{M} = \tfrac{1}{2}nmv^2 + \tfrac{1}{2}mvu$，而 $u_n < u$，所以 $K_n < K$。 $\blacksquare$

回顾

- **每一步都用动量。**每次发射都是一个小型的二体问题：一边是货车连同所载的东西，另一边是一枚抛射体。
- **裂项求和。**$(*)$ 的增量和能量的增量都能干净利落地加起来。
- **仔细阅读结论。**同时发射得到较大的速率，但要付出较多能量。题目比较的是两个做功多少并不相同的过程。

背后的数学

应该让甚么保持不变？

真正的炮或火箭引擎，是以相对于*自身*的固定速率抛出抛射体的，而这个速率是在抛射体刚离开之后量度的。本题的参照对象却是货车在发射*之前*的速率。对一枚细小的抛射体来说，两者相差极微；但当 n 枚抛射体同时发射时，差别就很大：在第 (i) 部分，一大批沉重的抛射体以速率 v 被向后抛出，仿佛货车完全没有后座（recoil）一样，这需要大量能量。

假如改为每枚抛射体都以相对于发射*之后*的货车的速率 v 离开，结论就会逆转。同时发射得 $u = \frac{nmv}{M+nm}$；逐一发射得 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{mv}{M+km}$，后者较大，因为每一项都至少是 $\frac{mv}{M+nm}$。这时逐一发射胜出：每枚抛射体都是从一辆已在运动的货车上蹬出去的，而且越后发射的炮，要加速的质量越少。（请在练习中验证这一点。）

火箭方程

现在让抛射体变得极小而数目极多，并保持总质量 $\mu = nm$ 不变：这就是一枚连续燃烧燃料的火箭。u_n 的和变成一个积分（两种约定给出相同的极限）：

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{mv}{M + km} \;\to\; \int_0^{\mu} \frac{v\,\mathrm{d}s}{M + s} = v \ln \frac{M + \mu}{M}.$$

这就是*齐奥尔科夫斯基火箭方程*：若火箭喷出的废气以相对于火箭的速率 v 离开，火箭所增加的速率为

$$\Delta u = v \ln \frac{m_{\text{初}}}{m_{\text{末}}}.$$

图 10.3.1 比较了这三个答案。麻烦就出在对数（logarithm）上：若排气速率约为 4.5 km/s（优良的化学燃料），要达到约 7.8 km/s 的轨道速率，质量比必须是 $e^{7.8/4.5} \approx 5.7$；一旦把空气阻力和重力计算在内，这个比值更接近 10 或以上。火箭几乎全是燃料。

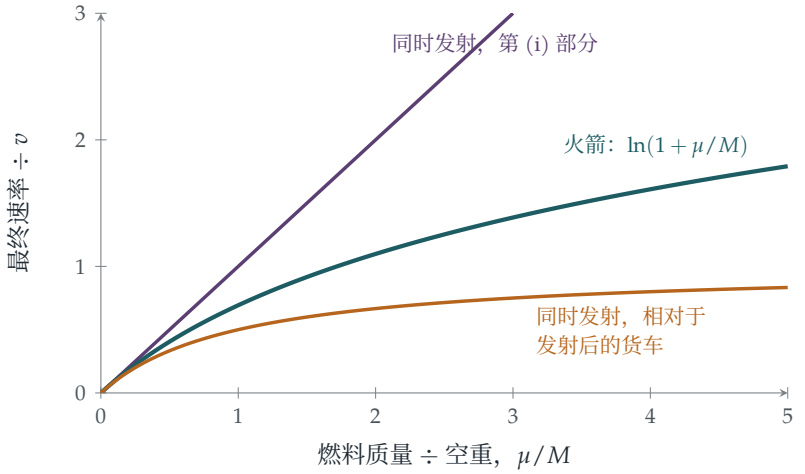


图 10.3.1　最终速率与燃料质量对空重之比的关系。按题目的约定，全部同时发射得 μ/M（紫红色）；但若排气速率是相对于后座中的货车量度，则只得 $\frac{\mu/M}{1+\mu/M}$（琥珀色）。连续发射的火箭介乎两者之间，为 $\ln(1+\mu/M)$（蓝绿色）。这幅图所表达的就是不等式 $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$。

为甚么火箭要分级

对数也解释了分级（staging）的道理。火箭若在升空途中抛掉用完的燃料箱，就不必再加速这些无用的质量。各级所得的速率增量是*相加*的（就像那些炮一样），而每一级的增量则取决于该级质量的*比*，所以把火箭分成多级，就能达到总质量相同的单级火箭无法达到的速率。把太空人送上月球的土星五号（Saturn V）有三级；它的第一级在不足三分钟内烧掉约 2000 公吨燃料。

齐奥尔科夫斯基

康斯坦丁.齐奥尔科夫斯基(Konstantin Tsiolkovsky)是俄罗斯外省小城卡卢加(Kaluga)一位失聪的教师，他在 1903 年一篇题为“利用反作用装置探索外太空”的论文中发表了火箭方程。多级火箭、液态氢和液态氧燃料，以及太空站，他都一一推算过，比这些东西真正造得出来早了数十年。这条方程其实更早就在一些较不起眼的地方出现过(William Moore 在 1810 年已推导出其中一个版本)，但齐奥尔科夫斯基是第一个看出它对太空飞行意味着甚么的人。他写道：“地球是人类的摇篮，但人不能永远活在摇篮里。”

思维技巧

从离散过程到极限

连续的过程，往往可以理解为许多细小离散步骤的极限（*limit*）。先把离散的问题精确地解出来，再让步长缩小：和就变成积分。

在这里，n 门炮变成了一枚火箭，一个和变成了一个对数。到了大学，每逢推导物理定律，你都会见到同一手法：先分析一个微小的单元，再把结果加起来，成为一个积分或一条微分方程（differential equation）。

延伸练习

1 **另一种约定。**假设每枚抛射体都以相对于发射之后的货车的速率 v 离开，重做第 (i) 和第 (ii) 部分。证明这时逐一发射所得的最终速率较大。

2 **尘埃云中的彗星。**试做 STEP III 2009，第 11 题（`step.maths.org/questions/09-s3-q11`）。它和火箭一样是变质量（variable mass）问题，但彗星的质量是增加而不是减少。留意它的速率趋向甚么值。

3 **两级火箭。**一枚火箭的排气速率为 v，空重为 M，燃料质量为 $9M$。求它的最终速率。现在把它分成两级，每级的空重为 $\frac{1}{2}M$，燃料为 $4.5M$，第一级在燃料用尽后抛掉。比较两个最终速率。

4 **不等式。**在 $[0, x]$ 上把 $\frac{1}{1+s}$ 分别与 1 和 $\frac{1}{1+x}$ 比较，从而证明当 $x \geq 0$ 时，$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$。

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 4 章。动量、变质量和火箭方程。
- **George Sutton & Oscar Biblarz, *Rocket Propulsion Elements***（Wiley）。工程学上的标准教科书；读完本节后，开首几章已可读懂。
- **Hermann Oberth, *Ways to Spaceflight***（NASA 译本，可在网上免费阅读）。一位先驱的亲身记述。

10.4 一个分子与一个活塞

题目

STEP I 2002，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/02-s1-q10`

引子

替单车轮胎打气时摸一摸气泵：它会发热。压缩气体会令气体变暖，柴油引擎（单靠压缩就能点燃燃料）、雪柜以至恒星的形成，背后都是这个原理。但为甚么压缩会令气体升温？温度就是分子的平均动能（kinetic energy），所以问题其实是：为甚么分子会加速？

这道题目只用一个分子就回答了这个问题。分子每次从推进中的活塞（piston）反弹，都会多得一点速率，就像网球碰上挥动中的球拍一样。把每次反弹准确地追踪下去，便会发现一条隐藏的定律：分子的速率乘以气缸的长度，几乎保持不变。这就是一个绝热不变量（adiabatic invariant），也是你在物理课遇到的气体定律在微观层面的来源。

动笔之前

想一想 一个以速率 w 运动的球，撞上一堵以速率 u 迎面移来的墙，并作弹性（elastic）反弹。反弹后球的速率是多少？（试在墙的参考系中思考。）

在墙的参考系（frame）中，球以 $w+u$ 接近；由于它是从一个极重的物体上弹性反弹，所以亦以 $w+u$ 离开。回到地面参考系，墙正以 u 朝着与反弹后的球相同的方向运动，所以球的速率是 $w+2u$。每次从推进中的活塞反弹，速率都增加 $2u$。（从气缸静止的一端反弹，则甚么也不会改变。）

逐步解题

阶段 1　反弹 n 次后的速率

质点（particle）起初的速率是 v。每次与活塞碰撞（collision），速率增加 $2u$，而与末端碰撞则不会改变速率。所以与活塞碰撞 n 次之后，

$$v_n = v + 2nu. \qquad \blacksquare$$

阶段 2　长度的递推关系

> **想一想**　在第 n 次与第 $(n+1)$ 次碰撞之间，质点由活塞走到末端再折返。它走了多远？活塞又移动了多远？

在时间 t_n 内，活塞移动了 ut_n，所以 $d_n - d_{n+1} = ut_n$。与此同时，质点以速率 v_n 由活塞走到末端（距离 d_n），再返回活塞（距离 d_{n+1}），所以 $d_n + d_{n+1} = v_n t_n$。把两条方程相除，便可消去 t_n：

$$\frac{d_n + d_{n+1}}{d_n - d_{n+1}} = \frac{v_n}{u}, \qquad \text{所以} \qquad d_{n+1}(v_n + u) = d_n(v_n - u).$$

代入 $v_n = v + 2nu$，得

$$d_{n+1} = \frac{v + (2n-1)u}{v + (2n+1)u}\, d_n. \qquad \blacksquare$$

这就是所求的递推关系（recurrence）。

阶段 3　裂项相消

> **想一想**　把 d_n 写成 d_1 乘以 $n-1$ 个这样的分数之积。哪些项会互相抵消？

$$d_n = d_1 \cdot \frac{v+u}{v+3u} \cdot \frac{v+3u}{v+5u} \cdots \frac{v+(2n-3)u}{v+(2n-1)u} = \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1. \qquad \blacksquare$$

每个分子都与前一个分母抵消，只剩下第一个分子和最后一个分母。

阶段 4　$v = u$ 的情况

这时 $d_n = \frac{2u}{2nu} d_1 = \frac{d_1}{n}$，而

$$ut_n = d_n - d_{n+1} = d_1\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{d_1}{n(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

把这些加起来，$u(t_1 + t_2 + \cdots) = d_1\big(1 - \tfrac12 + \tfrac12 - \tfrac13 + \cdots\big) = d_1$：活塞在第一次碰撞后经过时间 d_1/u 到达气缸末端，这正是理所当然的结果。在活塞到达之前，质点反弹了无限多次（图 10.4.1）。

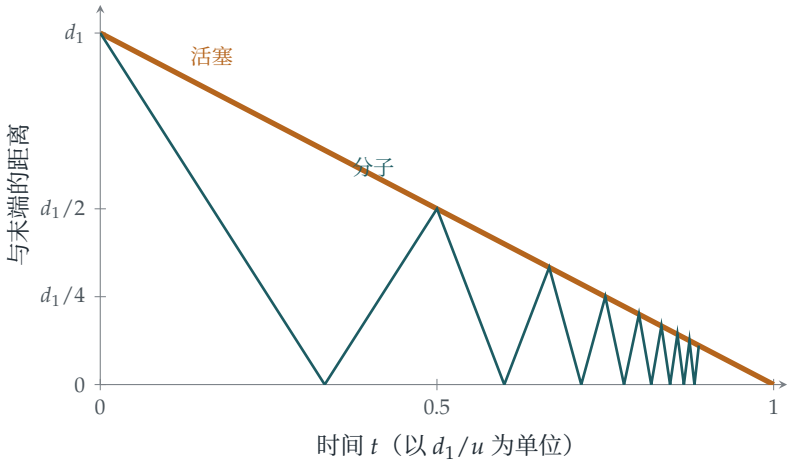


图 10.4.1 $v = u$ 情况下的时空图：与气缸末端的距离对时间。活塞（琥珀色）稳步推进；分子（蓝绿色）在活塞与末端之间来回反弹。它的锯齿形轨迹愈来愈陡（愈来愈快），也愈来愈短。第 n 次与活塞的碰撞发生在距离 d_1/n 处，所以分子的速率大致与 1/(长度) 成正比。

回顾

- **处理碰撞时转换参考系。**在活塞的参考系中，反弹再简单不过。
- **两条方程，消去未知量。**质点与活塞在同一段时间内所走的距离，给出了一个不含 t_n 的递推关系。
- **裂项相消（telescoping）。**那个乘积一下子化简了，正如 $\frac{1}{n(n+1)}$ 之和一样。

背后的数学

一个绝热不变量

把速率乘以长度：

$$v_n d_n = (v + 2nu) \cdot \frac{v+u}{v+(2n-1)u}\, d_1 \approx (v+u)d_1$$

这在 n 很大时成立，在 u 远小于 v 时亦然。所以

$$\text{速率} \times \text{长度} \approx \text{常数}.$$

如果活塞相对于分子移动得很慢，那么无论活塞移动多远，乘积 vd 都几乎不变。像这样在系统缓慢改变时几乎保持不变的量，称为*绝热不变量*。一般而言，往复运动的绝热不变量是 $\oint p\,\mathrm{d}q$，即动量（momentum）沿一个周期的积分；在这里它就是 $mv \times 2d$。

从一个分子到一团气体

由于 $v \propto 1/d$，动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 与 $1/d^2$ 成正比。对于由许多沿同一方向运动的分子组成的气体，温度与平均动能成正比，所以 $T \propto 1/d^2$：长度减半，温度便变成四倍。在三维空间中，能量由三个运动方向分担，而同样的论证（费曼（Feynman）在他的 *Lectures* 中给出了这个论证）可推出单原子气体（monatomic gas）的绝热压缩定律，

$$TV^{2/3} = \text{常数}, \qquad \text{或等价地} \qquad pV^{5/3} = \text{常数}.$$

指数 $\frac{5}{3}$ 就是单原子气体著名的比热比（ratio of specific heats）γ。把单车气泵内的空气压缩至原来体积的五分之一，如果做得够快而且没有热量散失，其绝对温度会升高至原来的 $5^{0.4} \approx 1.9$ 倍（空气分子有两个原子，因而 $\gamma = 1.4$）：由 20°C 升至约 280°C。气泵之所以没有那么热，只是因为压缩得慢，热量又会散走。

费米的宇宙射线

1949 年，恩里科·费米（Enrico Fermi）提出，宇宙射线（cosmic rays）这些从太空而来、能量极高的粒子，其加速方式与本题的分子如出一辙：它们在星际气体云中运动的磁场上反复反弹，每次获得一点能量。现时认为，“费米加速”（Fermi acceleration）在超新星残骸的激波处发生，粒子在那里来回穿越激波，就像分子在活塞与墙壁之间往返一样。绝热不变量在量子力学的诞生中也扮演过一个角色：保罗·埃伦费斯特（Paul Ehrenfest）在 1916 年指出，被量子化的量必定是绝热不变量，因为缓慢的改变不可能令系统在量子态之间跃迁。

思维技巧

从物理过程建立递推关系

当一个过程不断重复时，把其中一个周期准确地描述出来，并写下状态怎样由一个周期变到下一个周期。

这里的状态是每次碰撞时的一对量（速率，长度）。这个递推关系可以精确地解出，而它的解揭示了一个近似守恒的量。在大学里，同样的方法（先考虑一个周期，然后得出递推关系或“回归映射”（return map））会用于轨道、振子，以及 Section 8.7 的迭代映射。

延伸练习

1 **不变量的精确形式。**证明 $v_n d_n - (v+u)d_1 = \frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，并由此推出当 $n \to \infty$ 时 $v_n d_n \to (v+u)d_1$。

2 **把活塞拉出。**设活塞改为以速率 $u < v$ 向外抽出，把题目重做一次。证明质点会减速，并求 $v_n d_n$。（气体膨胀时会冷却。）

3 **能量。**在 $v = u$ 的情况下，随着活塞逼近末端，分子的速率会无止境地增长。求第 n 个周期内活塞所受的平均力（动量的改变除以 t_n），并证明它按 n^3 的速度增长。这说明了把活塞一直推到尽头所需的功有甚么特点?

4 **弹跳的球。**一个球在重力作用下于地板上作弹性弹跳，而地板被缓慢地升高。试猜出这个运动的一个绝热不变量。（提示：与 vd 相对应的量是平均速率乘以弹跳的高度，或等价地，能量乘以两次弹跳之间的时间。）

延伸阅读

- **Richard Feynman, Robert Leighton & Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I**（《费曼物理学讲义》第一卷，可在网上免费阅读），第 39 章“The kinetic theory of gases”（气体动力论）。同一个活塞论证，并推广至三维。
- **Stephen Blundell & Katherine Blundell, *Concepts in Thermal Physics***（Oxford University Press）。大学一年级程度的绝热过程与气体动力论。
- **Lev Landau & Evgeny Lifshitz, *Mechanics***（Butterworth-Heinemann），§49。对绝热不变量的精简论述，留待日后阅读。

10.5 有限时间内的无限次反弹

题目

STEP III 2002，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/02-s3-q11`

引子

埃利亚的芝诺（Zeno of Elea）曾经论证，你永远走不到一堵墙：你必须先走完一半的距离，然后再走完余下距离的一半，如此类推，永无止境。化解这个悖论的关键，在于无穷多步所需的总时间可以是有限的，也就是一个收敛（converge）的无穷级数（infinite series）。这道题目正是芝诺悖论（Zeno's paradox）的真实版本：一个冰球滑进楔形的角落，在两面墙之间反弹无穷多次，却在有限时间内到达角落。

大自然也会这样做。一个球在地板上弹跳，若恢复系数（coefficient of restitution）小于 1，它会在有限时间内弹跳无穷多次，然后静止下来。在颗粒物质（沙、谷物、雪）的电脑模拟中，这种“非弹性坍缩”（inelastic collapse）是个实实在在的难题：电脑要在有限时间内处理无穷多次碰撞。

动笔之前

想一想 当一个质点（particle）以恢复系数 e 撞向一面光滑的墙时，速度沿墙方向的分量会怎样？垂直于墙的分量又会怎样？

光滑的墙不会沿着墙面施力，所以速度平行于墙的分量保持不变。垂直分量则会反向，并乘以 e。因此，若质点以与墙成 α 的角度到达，并以 β 的角度离开，则

$$\tan\beta = e\tan\alpha,$$

而由于平行分量不变，（入射速率）$\cos\alpha$ =（离开速率）$\cos\beta$。

逐步解题

阶段 1　离开的角度

想一想　质点到达 M_1 时与墙 OA 成角 θ（在远离 O 的一侧量度）。它离开时与 OA 所成的角 φ 是多少？利用三角形 OM_1N_1，以 θ 表示 φ。

质点离开 M_1 时朝着 O 的一侧前进，与墙成角 φ，所以角 OM_1N_1 等于 φ。在三角形 OM_1N_1 中，位于 O 的角是 30°。在 N_1，角 M_1N_1B 等于 θ，而 O、N_1、B 在同一直线上，所以角 ON_1M_1 等于 $180^\circ - \theta$。三角形的内角和为 180°：

$$30^\circ + \varphi + (180^\circ - \theta) = 180^\circ, \qquad \text{所以} \qquad \varphi = \theta - 30^\circ.$$

（特别地，$\theta > 30^\circ$。）于是由恢复定律 $\tan\varphi = e\tan\theta$ 可得

$$e = \frac{\tan(\theta - 30^\circ)}{\tan\theta},$$

而由平行分量守恒 $u_1\cos\theta = v_1\cos\varphi$ 可得

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30^\circ)}. \qquad \blacksquare$$

阶段 2　规律重复出现

想一想　在 N_1，质点到达时与墙 OB 成角 θ（在远离 O 的一侧量度）。把这个情况与它到达 M_1 时的情况比较一下。接下来会发生甚么事？

N_1 的情况是 M_1 的情况的镜像：质点以角 θ 撞上一面墙，而这个角位于远离 O 的一侧。所以它以角 $\theta - 30^\circ$ 离开，再以角 θ 撞上 OA，如此类推，永无止境。每一次反弹都是第一次反弹按比例缩放后的复制品。三角形 OM_kN_k、ON_kM_{k+1}、… 每一个都与前一个相似（图 10.5.1），而每次反弹时速率都乘以同一个因子。

阶段 3　两个比

想一想　由一次反弹到下一次反弹，与 O 的距离按甚么因子 ρ 缩小？速率按甚么因子 k 缩小？那么每一段路程所需的时间又按甚么因子缩小？

在三角形 OM_1N_1 中应用正弦定理（sine rule），可得

$$\rho = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin(\theta - 30^\circ)}{\sin\theta}.$$

下一个三角形的所有长度都是这个三角形的 ρ 倍，所以路径的每一段都是前一段的 ρ 倍长。每次反弹时速率都乘以 $k = \frac{\cos\theta}{\cos(\theta-30^\circ)}$。时间等于长度除以速率，所以每一段所需的时间是前一段的

$$\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-30^\circ)\cos(\theta-30^\circ)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$$

倍。

阶段 4　一个等比级数

总时间是 $T_1(1 + r + r^2 + \cdots)$，其中 T_1 是第一段所需的时间，而 $r = \frac{\sin(2\theta-60^\circ)}{\sin 2\theta}$。这是一个等比级数（geometric series），若 $0 < r < 1$，总时间便是有限的。

> **想一想**　$\sin(2\theta - 60^\circ) < \sin 2\theta$ 在甚么时候成立？利用恒等式 $\sin X - \sin Y = 2\cos\frac{1}{2}(X+Y)\sin\frac{1}{2}(X-Y)$。

$$\sin 2\theta - \sin(2\theta - 60^\circ) = 2\cos(2\theta - 30^\circ)\sin 30^\circ = \cos(2\theta - 30^\circ),$$

当 $2\theta - 30^\circ < 90^\circ$，即 $\theta < 60^\circ$ 时，上式为正。另外，由于 $\theta > 30^\circ$，故 $r > 0$。所以当 $30^\circ < \theta < 60^\circ$ 时，级数收敛：质点反弹无穷多次，它与 O 的距离每次按因子 $\rho < 1$ 缩小，并在有限时间 $\frac{T_1}{1-r}$ 之后到达 O。 ■

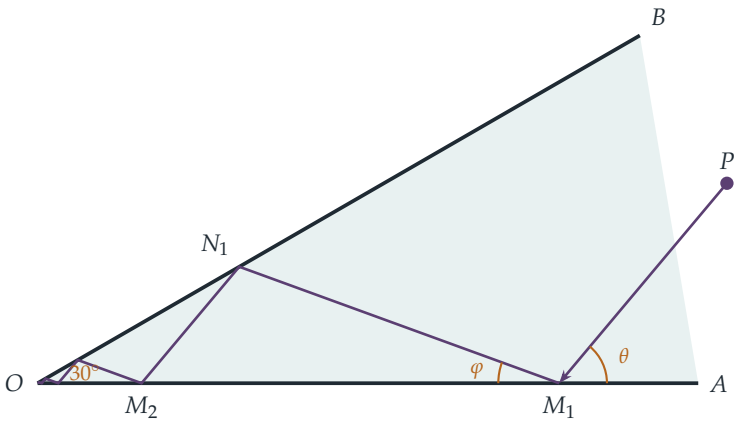


图 10.5.1　$\theta = 50^\circ$ 时质点在楔形内的路径，此时 $\varphi = 20^\circ$，$e = \tan 20^\circ / \tan 50^\circ \approx 0.31$。每一次反弹都是前一次的复制品，按 $\rho \approx 0.45$ 的比例缩小，而每一段所需的时间约为前一段的 0.65 倍。质点经过无穷多次反弹后，在有限时间内到达 O。

回顾

- **自相似性（self-similarity）。**一旦弄清楚一次反弹，其后每一次反弹都只是按比例缩放的复制品，所以整个无穷过程就归结为两个比。
- **正确地组合各个比。**距离按 ρ 缩小，速率按 k 缩小，所以时间按 ρ/k 缩小。
- **无穷多个事件，有限的总和。**公比小于 1 的等比级数收敛。

背后的数学

当 $\theta \geq 60^\circ$ 时

当 $\theta = 60^\circ$ 时，这个比恰好等于 1：每一段所需的时间都相同，质点虽然愈来愈接近 O，却永远到不了。（速率和每段的长度都按同一个因子缩小。）当 $\theta > 60^\circ$ 时，每一段所需的时间愈来愈长。在所有情况下，质点都会趋近 O，并反弹无穷多次；只有当 $\theta < 60^\circ$ 时，它才会在有限时间内到达。$e = \tan 30^\circ / \tan 60^\circ = \frac{1}{3}$ 这个值就是分界线。

弹跳的球与非弹性坍缩

同一现象最简单的例子：一个球掉落到地板上，反弹至高度 e^2H，然后是 e^4H，如此类推。两次弹跳之间的时间与每次弹跳时的速率成正比，而速率按因子 e 缩小，所以总时间是一个等比级数：设 $T_0 = \sqrt{2H/g}$ 为第一次下落的时间，则球在

$$T_0 + 2eT_0 + 2e^2T_0 + \cdots = T_0\,\frac{1+e}{1-e}.$$

之后停止弹跳。无穷多次弹跳，然后静止。1992 年，Sean McNamara 和 William Young 证明了，在模拟排成一直线的多个非弹性质点时，同样的事情也会发生：其中一组质点可以在有限时间内发生无穷多次碰撞，这就是“非弹性坍缩”。沙和颗粒流的模拟必须加入特别的规则来避免这种情况，而这个现象也有助解释为何颗粒气体会自发地聚集成团。

芝诺与收敛

芝诺的悖论约于公元前 450 年提出，困扰了哲学家两千年。数学上的解答，即无穷和可以有有限的值，要到十九世纪才变得严谨，当时柯西（Cauchy）、魏尔斯特拉斯（Weierstrass）等人以极限（limit）来定义收敛（这是第 2 章的主题）。这道题目令人惊讶之处，在于这个过程在物理上是无穷的：确确实实有无穷多次碰撞，发生在有限时间之内。研究多边形内的桌球运动和碰撞质点运动的数学家，把这种行为称为*芝诺现象*（Zeno phenomenon）；要证明由互相碰撞的硬球组成的系统在所有时刻都有明确定义的运动，这正是其中一个微妙之处。

思维技巧

为无穷过程求和

当一个过程以固定的缩放因子不断重复时，任何可加的量（时间、距离、能量）的总和都是一个等比级数。根据公比判断它是否收敛。

这里的关键是找出正确的比：不是距离之比，也不是速率之比，而是时间之比。在大学里，同样的推理支配着迭代法（iterative methods）的收敛性、分形（fractal）理论，以及对反复把问题减半的算法（algorithm）的分析。

延伸练习

1 **总距离。**证明对于 30° 与 90° 之间的每一个 θ，由 M_1 到 O 所走的总距离都是有限的，并以 OM_1 和 θ 表示这个总距离。

2 **其他楔形。**把 30° 换成角 α 的楔形，重做这道题目。证明 $\varphi = \theta - \alpha$，并求出质点在有限时间内到达 O 时 θ 须满足的条件。

3 **弹性墙。**若 $e = 1$，质点有可能到达 O 吗？（提示：把楔形沿它的墙反复反射，使路径变成一条直线。围绕 O 可以放下多少个 30° 的楔形？）

4 **弹跳的球。**一个球从 1 m 的高度掉下，$e = 0.8$。它会弹跳多久？它总共走了多远？（取 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$。）

延伸阅读

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（Cambridge University Press），第 5 章。书中有多道关于弹跳的球和无穷多次连续碰撞的题目。
- **Sean McNamara & William Young, "Inelastic collapse and clumping in a one-dimensional granular medium"**（一维颗粒介质中的非弹性坍缩与聚团），*Physics of Fluids A* 4 (1992)。
- **Serge Tabachnikov, *Geometry and Billiards***（American Mathematical Society；可在网上免费阅读）。讲述桌球的数学，包括练习中用到的展开技巧。

10.6 二体化为一体

题目

STEP III 2004，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/04-s3-q11`

引子

两个物体互相吸引或排斥：地球与月球、两颗恒星、一个质子与一个电子。每个物体的运动都取决于另一个物体的位置，因此两条方程是耦合（coupled）的，看来非要同时求出两个运动不可。牛顿（Newton）的重大简化在于更换变量：不用两个位置，而改用质心（centre of mass）和间距（separation）。质心的运动仿佛完全不受力，而间距的运动则像一个质量经过修正的单一质点。一个难题就此化为两个易题。

本题就两个在直线上运动的质点，实际做一次这样的分离。过程中还有一个小小的奇迹：间距原来是 t 的二次式的平方根，而个中原因与题目本身的设置毫无关系，却完全源于平面上的运动。

动笔之前

想一想 写出每个质点的牛顿第二定律（Newton's second law）。每个力朝哪个方向作用？

这个力是排斥力，所以它把（左边的）P 推向左，把（右边的）Q 推向右：

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad 1\cdot\ddot{x}_2 = +\frac{2}{z^3}.$$

这两条方程是耦合的，因为每一条都含有 $z = x_2 - x_1$。

逐步解题

阶段 1　间距

想一想　两条方程的哪一个组合只含有 z？

相减：$\ddot{z} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3}$。 ■

间距的表现就像一个质量为 $\frac{2}{3}$ 的单一质点，受力 $\frac{2}{z^3}$ 推动。$\frac{2}{3} = \frac{2\times 1}{2+1}$ 这个数就是约化质量（reduced mass）$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$。

阶段 2　间距的能量

想一想　利用 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$，分离变量然后积分。$z$ 和 $v = \dot{z}$ 的初始值是多少？

由 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3}$，积分得 $\frac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C$。起初 $z = 1$ 而 $\dot{z} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0 - 1 = -1$，所以 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$，得 $C = 2$：

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}.$$

（这就是间距的能量守恒（conservation of energy）：以每单位约化质量计，动能加上势能 $\frac{3}{2z^2}$ 是常数。）

阶段 3　出奇简单的解

想一想　要证明的答案是 $z^2 = 4t^2 - 2t + 1$。所以不妨考虑 $w = z^2$，而不是 z。以 w 表示，$\dot{w}^2$ 是甚么？

设 $w = z^2$，则 $\dot{w} = 2z\dot{z}$，所以

$$\dot{w}^2 = 4z^2\dot{z}^2 = 4z^2\left(4 - \frac{3}{z^2}\right) = 16w - 12.$$

求导得 $2\dot{w}\ddot{w} = 16\dot{w}$，所以（只要 $\dot{w} \neq 0$）$\ddot{w} = 8$。因此 w 是 t 的二次式：$w = 4t^2 + \alpha t + \beta$。起初 $w = 1$ 而 $\dot{w} = 2z\dot{z} = -2$，所以 $\beta = 1$ 及 $\alpha = -2$：

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}. \qquad \blacksquare$$

（你可以直接验证：$\dot{w}^2 = (8t-2)^2 = 64t^2 - 32t + 4 = 16(4t^2 - 2t + 1) - 12$。）两个质点在 $t = \frac{1}{4}$ 时最接近，此时 $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$，其后便永远愈离愈远。

阶段 4　质心

想一想　$2x_1 + x_2$ 满足甚么方程？为甚么它是最自然要考虑的组合？

把两条运动方程相加，$2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0$。两个力大小相等、方向相反（牛顿第三定律），所以总动量（momentum）$2\dot{x}_1 + \dot{x}_2$ 是常数。它的初始值是 $2 \times 1 + 0 = 2$，而 $2x_1 + x_2$ 的初始值是 1，所以

$$2x_1 + x_2 = 1 + 2t.$$

质心位于 $\frac{2x_1+x_2}{3}$，以速率 $\frac{2}{3}$ 匀速移动。再结合 $x_2 - x_1 = z$，

$$x_1 = \frac{1 + 2t - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{1 + 2t + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}. \qquad \blacksquare$$

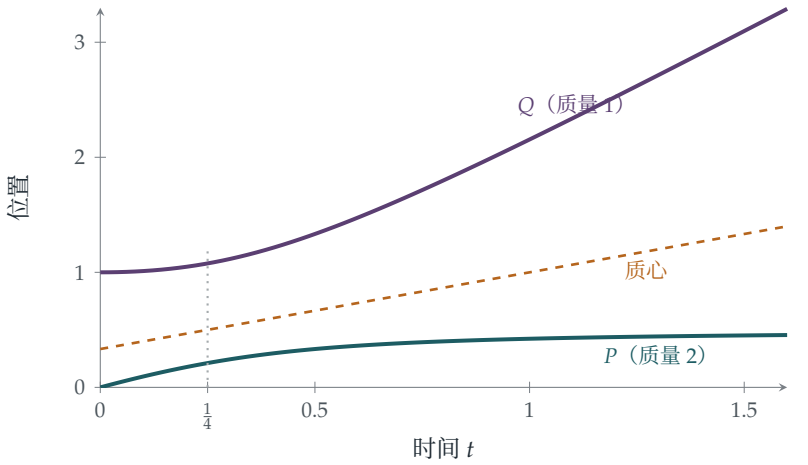


图 10.6.1 P（蓝绿色）和 Q（紫红色）的位置随时间的变化。P 向 Q 移动，受排斥力减慢并折返，逐渐趋近一个固定位置，而 Q 则被推开。两者在 $t = \frac{1}{4}$ 时最接近。质心（琥珀色虚线）自始至终以恒定速率移动。

回顾

- **更换变量以解除耦合。**两条方程之差只含有 z；加权之和只涉及质心。
- **能量积分。**写成 $\ddot{z} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$，便把二阶方程化为一阶方程：这就是能量守恒。
- **更换未知量。**z 的方程不好处理；z^2 的方程却简单不过。

背后的数学

为甚么 z^2 是二次式

对任何形如 $\ddot{z} = k/z^3$ 的力律，同样的计算都给出 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(z^2) = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\dot{z}^2 + \frac{2k}{z^2} =$ 常数，因为 $\frac{1}{2}\dot{z}^2 + \frac{k}{2z^2}$ 正是守恒的能量。所以 z^2 必定是 t 的二次式。为甚么？

隐藏的原因是这样的。设想一个质点在平面上自由运动，即沿直线以恒定速率前进。它与原点的距离 r 满足 $r^2 = (\text{一个二次式，变量为} t)$，因为 $r^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2$。而在极坐标（polar coordinates）中，它的径向运动方程是 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$；由于角动量（angular momentum）$h = r^2\dot{\theta}$ 是常数，方程变成

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^3}.$$

立方反比的排斥力，正正就是隐藏的角向运动所产生的离心（centrifugal）效应。在我们的问题中，$z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = (2t - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}$ 是某一点与原点距离的平方，该点以速率 2 沿一条直线运动，而这条直线与原点的距离为 $\tfrac{\sqrt{3}}{2}$。一维上互相排斥的两个质点，就是二维自由运动的影子。

二体问题

只要两个物体之间的力仅取决于它们的间距，并沿两者的连线作用，本题的方法便适用，一维如是，三维亦如是。质心作匀速运动，而间距向量 $\mathbf{r}$ 服从 $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$，其中 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$。对引力而言，这就是开普勒问题（Kepler problem），由牛顿在《自然哲学的数学原理》（*Principia*）中解决：间距描出的轨迹是椭圆、抛物线或双曲线。地球和太阳都绕着它们的共同质心运行，而这个质心位于太阳内部；地球和月球则绕着距离地心约 4700 km 的一点运行，这一点在地球内部，但离地心颇远，所以地球每月都会摆动一次。天文学家正是靠侦测恒星的这种摆动，来寻找环绕其他恒星的行星。

可积系统

1969 年，Francesco Calogero 研究直线上多个质点以平方反比势（即立方反比力）互相排斥的情况，发现无论质点数目多少，这个系统竟然都可以精确求解。Jürgen Moser 在 1975 年解释了个中原因，他用上一个矩阵，其特征值（eigenvalues）在矩阵随时间演化时保持不变：这就是 Section 7.7 的 *Lax* 对（Lax pairs）。*Calogero–Moser* 系统如今是可积系统（integrable system）的核心例子，所谓可积系统，就是守恒量多得足以完全求解的系统；它把力学与随机矩阵、量子场论及孤立子理论联系起来。

思维技巧

选择能解除耦合的坐标

当两个量互相耦合时，找出不耦合的组合。和与差，配上适当的常数作加权，往往能把问题拆成互相独立的部分。

质心坐标与相对坐标是第一个例子。到了大学，同一个想法会以矩阵对角化（简正模态（normal modes），Section 11.2）、偏微分方程的分离变量法等形式出现，也见于量子力学。

延伸练习

1 **绳上的两个质量。**试做 STEP III 2023，第 9 题（载于 OCR 提供下载的 2023 年试卷，`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`）。题目考察以绳相连的两个质点，并利用质心把运动分离。留意其中一个质点何时向后移动。

2 **吸引力。**把力改为吸引力 $\frac{2}{z^3}$，重做本题。证明 z^2 仍然是 t 的二次式，并求两个质点何时相撞。

3 **隐藏的平面。**就题目中的运动，求出平面上与原点距离为 $z(t)$ 的那条直线运动轨迹，以及扫过的角 $\theta(t)$。验证 $z^2\dot{\theta}$ 是常数，且 $(z^2\dot{\theta})^2 = 3$。

4 **开普勒第三定律。**两颗质量分别为 m_1 和 m_2 的恒星相距 a，在引力作用下绕它们的质心作圆周运动。证明周期 T 满足 $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1+m_2)}$。

延伸阅读

- **John Taylor, *Classical Mechanics***（University Science Books），第 8 章。二体问题、约化质量与轨道。
- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），第 10 章，论有心力。
- **Francesco Calogero, *Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments***（Springer）。给有志挑战的读者：精确可解系统的世界。

10.7 球壳内的引力

题目

STEP III 1999，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/99-s3-q9`

引子

试想像一颗空心的行星：一层薄薄的岩石球壳（spherical shell），里面空无一物。假如你站在球壳内靠近壳壁的地方，也许会以为自己会被附近的岩石吸过去。事实上你会浮在原处：球壳内任何一处，球壳的引力都恰好是零。球壳较近的一侧距离较短，但较远的一侧面积较大，两种效应刚好完全抵销。

这就是牛顿球壳定理（*Newton's shell theorem*）。牛顿（Newton）花了多年才把它证明出来，而它对牛顿的引力理论至为重要：连同与它配对的另一个结果（在球体之外，引力就如全部质量都集中在球心一样），它说明了为何可以把地球和太阳当作点来处理。在练习和“背后的数学”一节中，我们会用这个定理计算一团气体云塌缩成恒星需要多少时间。

动笔之前

想一想 考虑圆环上两小段位于同一直径两端的部分。画出它们对质点（particle）所施的力。哪些分量（component）互相抵销，哪些相加？

这两小段与质点的距离相同。它们的引力沿轴方向的分量相等，因而相加；垂直于轴的分量大小相等、方向相反，因而抵销。把整个圆环这样逐对配起来，可知合力沿着轴，指向圆环的中心。

逐步解题

阶段 1　圆环

圆环上每一小段与质点的距离都是 $\sqrt{x^2+r^2}$，而连接两者的直线与轴成角 ψ，其中 $\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$。质量为 δm 的一小段所施的引力为 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}$，其中沿轴方向的分量为 $\frac{G\,\delta m}{x^2+r^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$。每一小段的距离和角度都相同，所以这些分量直接相加，得

$$\frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}}. \qquad \blacksquare$$

阶段 2　把球壳切成圆环

> **想一想**　设球壳的中心为 O，质点位于轴上，与 O 相距 b。把球壳切成多个垂直于轴的薄圆环，并以圆环上的点在 O 处与轴所成的角 ϕ 来标记各圆环。圆环的半径、位置和质量分别是甚么？

角度为 ϕ 的圆环半径为 $a\sin\phi$，其中心沿轴与 O 相距 $a\cos\phi$，因此与质点相距 $a\cos\phi - b$。圆环的宽度为 $a\,\delta\phi$，所以面积为 $2\pi a\sin\phi\cdot a\,\delta\phi$，占球壳面积 $4\pi a^2$ 的 $\frac{1}{2}\sin\phi\,\delta\phi$。它的质量是 $\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi$。根据第 1 阶段的结果，它沿着轴把质点拉向 $\phi = 0$ 的一端，力的大小为

$$\frac{G\cdot\frac{1}{2}M\sin\phi\,\delta\phi\,(a\cos\phi - b)}{\big((a\cos\phi-b)^2 + a^2\sin^2\phi\big)^{3/2}} = \frac{GM}{2}\cdot\frac{(a\cos\phi-b)\sin\phi\,\delta\phi}{(a^2-2ab\cos\phi+b^2)^{3/2}}.$$

（正负号会自动处理妥当：位于质点前方、满足 $a\cos\phi > b$ 的圆环把质点拉向一方，位于质点后方的圆环则把它拉向另一方。）

阶段 3　合适的变量

> **想一想**　分母含有 $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$。$s$ 在几何上代表甚么？$\mathrm{d}s$ 以 $\mathrm{d}\phi$ 表示是甚么？

根据余弦定理（cosine rule），s 是质点到圆环的距离。求导可得 $2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$，而由 $s^2 = a^2 - 2ab\cos\phi + b^2$ 解出 $a\cos\phi$，可得 $a\cos\phi - b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}$。所以合力为

$$\frac{GM}{2}\int\frac{a^2-b^2-s^2}{2b\,s^3}\cdot\frac{s\,\mathrm{d}s}{ab} = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\mathrm{d}s,$$

其中 s 由 $a-b$（最近的点，$\phi=0$）变到 $a+b$（最远的点，$\phi=\pi$）。

阶段 4　结果为零

$$\int_{a-b}^{a+b}\Big(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\Big)\,\mathrm{d}s=(a^2-b^2)\Big(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\Big)-2b=(a^2-b^2)\cdot\frac{2b}{a^2-b^2}-2b=0.$$

球壳对质点不施任何力。 ■

> **停一停，试一试** 如果质点在球壳之外，即 $b>a$，情况会有甚么不同？s 的上下限变成 $b-a$ 和 $b+a$。重做最后一行，并证明所受的力为 $\frac{GM}{b^2}$，指向球心，就如全部质量都集中在球心一样。

回顾

- **先看对称性（symmetry）。**把相对的小段配对，未经任何计算便已看出力的方向。
- **由较简单的形状逐步建构。**点组成圆环；圆环组成球壳。
- **选择切合物理情境的变量。**把变量由角 ϕ 换成距离 s，一个棘手的积分便变得轻而易举。

背后的数学

牛顿的圆锥论证

牛顿本人的证明（《自然哲学的数学原理》（*Principia*）第一卷命题 70）完全没有用到积分。以质点为顶点，画一个狭窄的对顶圆锥，它在球壳上截出两小块曲面（图 10.7.1）。这两小块的面积与它们到质点的距离的平方 r_1^2 和 r_2^2 成正比（两小块与圆锥所成的角相等，因为一条弦在两端与圆所成的角相等）。所以它们的质量与 r_1^2 和 r_2^2 成正比，而它们的引力与质量除以距离平方成正比，因此大小相等、方向相反。每一个通过质点的对顶圆锥都互相抵销，所以合力为零。这种抵销之所以成立，正是因为平方反比定律（inverse-square law）：若换成距离的任何其他次方，球壳便会对质点产生推力或拉力。

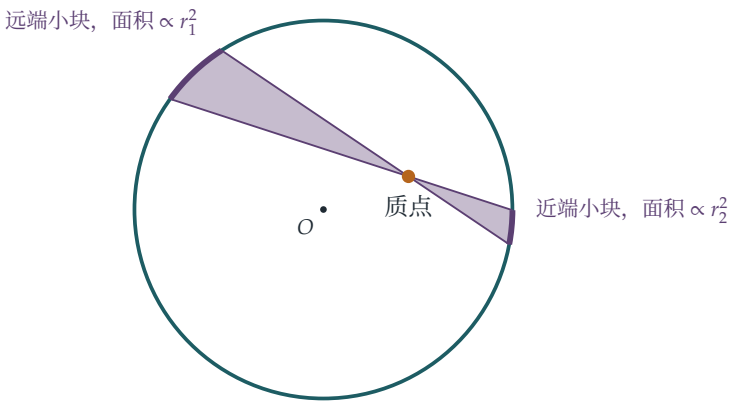


图 10.7.1　牛顿的论证。由质点出发的一个细窄对顶圆锥在球壳上截出两小块。远端的一块较大，面积之比等于距离平方之比，但它的引力也恰好按同一比例减弱。两个引力互相抵销，其余每一对亦然：在球壳之内，引力消失。

塌缩的云团

STEP III 1987 Q14 把这个定理反过来用。在均匀球体之外，位于球面的质点所受的引力为 GMm/r^2，就如全部质量都集中在球心一样。现在取一团静止的均匀球状尘埃云，半径为 R，质量为 M，让它在自身引力下塌缩。球面上的质点只感受到它以内的质量，而在所有物质向内坠落的过程中，这质量一直是 M，所以它向内的速率 $v = -\dot{r}$ 满足

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM}{r^2}, \qquad \text{所以} \qquad v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

代入 $r = R\cos^2\alpha$（其中一道练习），可得到达半径 r 所需的时间为 $\sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$。当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，整团云塌缩成一点，所需时间就是**自由落体时间**（*free-fall time*）

$$t_{\mathrm{ff}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}},$$

其中 ρ 是密度。值得注意的是，云团的每一层球壳都在同一刻到达中心，因为这个时间只取决于密度（图 10.7.2）。对于一团典型的星际云，每立方米约有 10^{-17} kg，t_{ff} 约为 700 000 年：这决定了恒星形成的时间尺度。

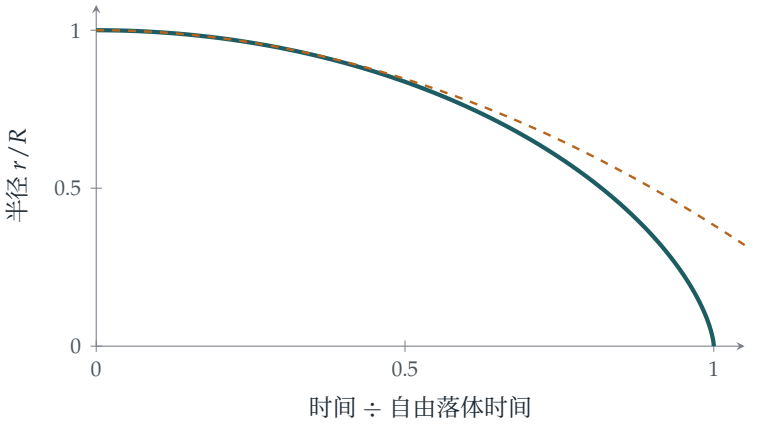


图 10.7.2 塌缩中的均匀尘埃云的半径随时间的变化（青绿色曲线）。它起初很慢，就像一块刚放手的石头（琥珀色虚线抛物线是恒定加速度的近似 $r = R - \frac{1}{2}\frac{GM}{R^2}t^2$），其后急剧加速，并在 $t = t_{\text{ff}}$ 时降至零。这条曲线是半条摆线（cycloid）。

牛顿的延迟与高斯定律

牛顿早在 1660 年代已掌握平方反比定律，但到 1687 年才发表他的引力理论。据一些历史学家所说，其中一个原因是他在证明球壳定理之前，无法说明为何可以把地球当作点质量（point mass）；一旦证明了，《自然哲学的数学原理》的其余部分便水到渠成。今天，这个定理只是高斯定律（*Gauss's law*）的一个简短推论。高斯定律指出，穿过任何闭合曲面向外流出的引力场总量，与曲面内的质量成正比。在球壳内取一个同心的球面。它没有包围任何质量，所以穿过它的总流量为零。单凭这一点并不足以令场为零（均匀场穿过任何闭合曲面的总流量都是零，从一边流入，从另一边流出），但这里对称性帮了忙：场必定笔直指向球心或背离球心，而且在球面上各处强度相同，所以总流量为零就意味着场为零。同一条定律也支配电场，这就是为甚么带电金属壳内没有电场，也是为甚么汽车能保护你免受雷击。

思维技巧

积分即求和

要求出一个连续物体的效应，可把它切成效应已知的小块，再把它们加起来。利用对称性来选择怎样切。

点组成圆环，圆环组成球壳，球壳组成实心球。在大学里，每一种场（引力场、电场、磁场）都是这样由场源计算出来的，由此更引出高斯（Gauss）定理和斯托克斯（Stokes）定理的向量微积分（vector calculus）。

延伸练习

1 **球壳之外。**完成“暂停思考”方框中的问题：证明在球壳之外，所受的力为 $\frac{GM}{b^2}$。由此推断，质量为 M 的均匀实心球对球外质点的引力，就如其质量集中在球心一样。

2 **塌缩时间。**试做 STEP III 1987，第 14 题（`step.maths.org/questions/87-s3-q14`）。这道题求一团尘埃云在自身引力下塌缩需要多少时间；用三角代换（trigonometric substitution）便可算出积分。

3 **穿越地球的隧道。**证明在均匀实心球之内，与球心相距 b 处所受的力为 $\frac{GMb}{a^3}$，与 b 成正比。由此推断，把一个球投进一条穿过地球中心的隧道，它会来回振荡，周期（period）为 $2\pi\sqrt{a^3/(GM)}$，约 84 分钟，与一颗贴着地面飞行的卫星的周期相同。

4 **另一种力的定律。**假如引力遵从立方反比定律，球壳内所受的力是否仍然为零？（重做第 3 阶段，以 $\frac{1}{s^3}$ 取代 $\frac{1}{s^2}$。）

延伸阅读

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（Cambridge University Press），关于万有引力的章节，当中包括球壳定理。
- **Subrahmanyan Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader***（Oxford University Press）。由一位诺贝尔奖得主讲解牛顿的证明，包括命题 70 和 71。
- **Andrew Pontzen, *The Universe in a Box***（Riverhead）。讲述引力、塌缩和模拟如何解释宇宙的结构。

10.8 排成三角形的三颗恒星

题目

STEP I 1999，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/99-s1-q11`

引子

两个以引力互相吸引的天体，其运动可以完全解出，这是牛顿（Newton）证明了的，Section 10.6 亦已解释过：两者各自沿一条圆锥曲线（conic）绕共同的质心（centre of mass）运动，若两者互相束缚，轨道是椭圆；若能量足以互相逃逸，则是抛物线或双曲线。再加入第三个天体，一切就不同了。*三体问题*（three-body problem）没有能用常见函数表示的通解，而在 1890 年，庞加莱（Henri Poincaré）更发现它的解可以是混沌的，这是混沌（chaos）在数学中首次出现。

然而，有些特殊解却十分简单。1772 年，拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）发现，位于等边三角形（equilateral triangle）三个顶点的三个天体可以作刚性旋转，整个三角形像车轮一样转动。本题要找的，就是质量相等时的这个解。拉格朗日的三角形并非只是趣闻：太阳、木星和数以千计的“特洛伊”（Trojan）小行星正好构成这种位形，今天的太空望远镜亦停泊在类似的点上。

动笔之前

想一想 一颗星要以角速度（angular velocity）ω 沿半径为 R 的圆运动，它所受的总力必须是甚么？

总力的大小必须是 $m\omega^2 R$，方向指向圆心。因此我们要检查每颗星所受的总引力是否指向三角形的中心，并求出使其大小恰好相符的 ω。

逐步解题

阶段 1　几何

想一想　边长为 a 的等边三角形，每个顶点与中心相距多远？

中心位于每条中线（median）上，与顶点的距离是中线长度的三分之二。中线的长度为 $a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以每个顶点到中心的距离是

$$R = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

由对称性（symmetry）可知，三角形的中心就是三颗相同的星的质心。

阶段 2　一颗星所受的力

想一想　另外两颗星各以大小为 $\frac{\gamma m^2}{a^2}$ 的力拉它。这两个拉力之间的夹角是多少？它们的合力（resultant）是多少，又指向哪个方向？

两个拉力分别沿着三角形在该星处相交的两条边，所以它们之间的夹角是 60°。由对称性可知，合力沿着这个角的角平分线（bisector），而角平分线通过中心。每个拉力与角平分线成 30°，所以合力的大小是

$$2\cdot\frac{\gamma m^2}{a^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2},$$

方向指向中心（图 10.8.1）。

阶段 3　角速度

令合力等于 $m\omega^2 R$：

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\gamma m^2}{a^2}, \qquad \text{所以} \qquad \omega^2 = \frac{3\gamma m}{a^3}.$$

取这个角速度时，同样的计算（由对称性）适用于每一颗星，所以三颗星都绕中心作圆周运动，三角形保持刚性不变。 ■

阶段 4　中心的第四颗星

想一想　一颗质量为 λm 的星位于中心，与每个顶点的距离是 $\frac{a}{\sqrt{3}}$。它对每颗顶点上的星额外施加多大的力？质心会移动吗？中心的星有没有受到净力？

中心的星不会改变质心的位置，而由对称性可知，它所受的三个拉力互相抵消，所以它保持静止。它把每颗顶点上的星拉向中心，力的大小是 $\frac{\gamma\lambda m^2}{(a/\sqrt{3})^2} = \frac{3\gamma\lambda m^2}{a^2}$。现在顶点上的星所受指向中心的总力是 $(\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}$，所以

$$m\omega^2\frac{a}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3}+3\lambda)\frac{\gamma m^2}{a^2}, \qquad \omega^2 = \frac{(3+3\sqrt{3}\,\lambda)\gamma m}{a^3} = \frac{3\gamma m}{a^3}(1+\sqrt{3}\,\lambda). \qquad \blacksquare$$

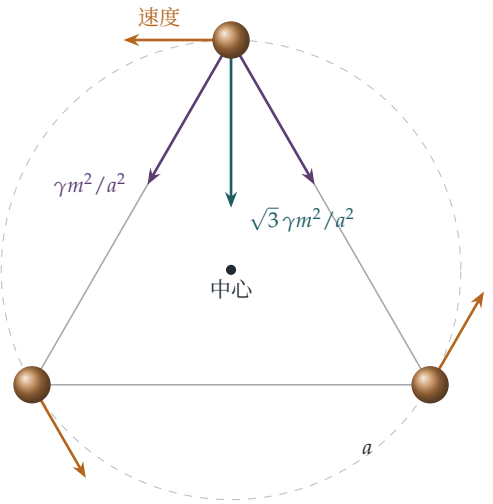


图 10.8.1 三颗相同的星位于等边三角形的三个顶点。顶部那颗星所受的两个拉力（紫色）合成一个指向中心的力（蓝绿色）。若每颗星以适当的速率（琥珀色）沿虚线圆运动，整个三角形便作刚性旋转。这就是拉格朗日对三体问题的等边三角形解。

回顾

- **猜一个对称的解。**我们并没有解出三体问题；我们只是猜了一种高度对称的运动，再检查牛顿定律是否容许它。
- **对称性决定方向。**合力必定沿着角平分线，所以只需计算它的大小。
- **检查每一个天体。**由对称性可知，验证了一颗星就等于验证了全部三颗；中心的星则需要另作（容易的）检查。

背后的数学

乔装的开普勒定律

把答案写成 $\omega^2 a^3 = \gamma(3m)$。对于相距 a、沿圆形轨道运行的两个天体，开普勒（Kepler）第三定律（Section 10.6 的一道练习）指出 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2)$，右边出现的是总质量。三颗星遵从同一条定律，总质量为 $3m$。事实上，拉格朗日证明了等边三角形解对*任意*三个质量都存在，而不限于相等的质量：三角形绕质心旋转，并且 $\omega^2 a^3 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)$。欧拉（Euler）在几年前已找到第二族解，其中三个天体位于一条旋转的直线上。这五种位形（三种共线、两种三角形，不计标号的差别）是三个天体能保持形状不变的仅有情况。

拉格朗日点

取 m_1 为太阳，m_2 为一颗行星，m_3 为一颗微小的小行星。等边三角形解告诉我们，小行星可以停留在与太阳和行星构成等边三角形的第三个顶点上，在行星轨道上位于行星的前方或后方。这就是*拉格朗日点*（Lagrange points）L_4 和 L_5；欧拉的共线解则给出 L_1、L_2 和 L_3。木星有超过一万颗已知的“特洛伊”小行星，聚集在它的 L_4 和 L_5 点附近。詹姆斯·韦伯太空望远镜（James Webb Space Telescope）在日地系统的 L_2 点附近运行，位于地球以外 1.5 百万公里处，在那里它可以把太阳、地球和月球全部挡在遮阳罩之后。

稳定性

造星者的三角形能维持下去吗？对于相等的质量，答案是不能：最轻微的扰动也会不断增长，几颗星最终不是四散飞离，就是互相碰撞。Edward Routh 在 1875 年证明，拉格朗日的三角形只有在其中一个质量占绝对优势时才是稳定（stable）的，确切的条件是

$$27(m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) < (m_1 + m_2 + m_3)^2.$$

对于太阳和木星，这个条件绰绰有余地成立，这就是特洛伊小行星得以长存的原因。对于三个相等的质量，$27 \times 3m^2 > 9m^2$，所以这个位形并不稳定。

庞加莱的错误与 8 字形轨道

1887 年，瑞典国王奥斯卡二世（Oscar II）悬赏征求多体问题的解。庞加莱在 1889 年凭一篇关于三体问题的长篇论文获奖，但论文付印期间，一位编辑发现了其中一处漏洞。在修正的过程中，庞加莱发现有些解的表现“复杂得惊人，我甚至无法尝试把它画出来”：这是人类对混沌的第一瞥。已印好的论文全数收回销毁，费用由庞加莱承担。新的特殊解至今仍不断被发现：1993 年 Cristopher Moore 以数值方法发现，而 2000 年 Alain Chenciner 与 Richard Montgomery 证明，三个相等的质量可以沿一条 8 字形曲线互相追逐。此后，人们借助电脑又找到了数以千计的周期轨道。

思维技巧

猜一个对称的解，然后验证

当一个问题难以在一般情况下解出时，不妨寻找对称性尽可能高的解。对称的猜想能把许多未知量减少到一两个，而验证它往往很容易。

这是数学和物理中一个强而有力的策略：对称的平衡态、稳态、行波和刚性旋转的位形，往往是最先找到的解，也是研究其余各种解的起点。接下来要问的，永远是这个对称解是否稳定。

延伸练习

1 **正方形上的四颗星。**四颗质量为 m 的星位于边长为 a 的正方形的四个顶点。证明它们可以绕中心作刚性旋转，其中 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$。

2 **两颗相同的星和一颗行星。**两颗质量为 M 的星相距 a，绕它们的质心运行。一颗质量可忽略的行星位于中心。它是否处于平衡？对于沿两星连线方向的微小位移，它是否稳定？垂直于连线的方向又如何？

3 **不相等的质量。**质量分别为 m_1、m_2、m_3 的三颗星位于边长为 a 的等边三角形的三个顶点，并绕它们的质心 G 旋转。证明 m_1 所受的引力为 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}\overrightarrow{P_1G}$，其中 P_1 是它的位置。（提示：把各力写成向量，并利用质心的定义。）由此推导出拉格朗日的结果。

4 n **颗星。**n 颗相同的星位于一个正 n 边形的各个顶点，该正多边形内接于半径为 R 的圆。求刚性旋转的 ω^2，并把它表示成 $\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$ 对 k 求和的形式。

延伸阅读

- **June Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem***（American Mathematical Society）。讲述那次悬赏以及庞加莱发现混沌的故事。
- **Richard Montgomery, "A new solution to the three-body problem"**, *Notices of the American Mathematical Society* 48 (2001)。由 8 字形轨道的其中一位发现者亲自讲解；可于网上免费阅读。
- **Florin Diacu & Philip Holmes, *Celestial Encounters***（Princeton University Press）。一部关于三体问题与混沌的通俗历史。

我们学到了甚么

本章开首说过，有些东西永远不变，而知道哪些东西不变，就已经掌握了半门物理学。我们提出了三个问题：守恒定律（conservation laws）单凭自身能决定甚么、细小的步骤如何累积起来，以及怎样驯服多个物体组成的系统。以下是本章八道题目给出的答案。

1. 守恒定律单凭自身能决定甚么？

两个物体沿直线作弹性碰撞（elastic collision）时，动量（momentum）和能量（energy）完全决定了碰撞的结果，而这一个结论在本章一再派上用场。物体再多一些，情况就不同了。在 Section 10.1 中，一排弹珠有许多种结果都同时符合这两条定律，要再加上一项物理事实（弹珠不能互相穿过），才能排除其中一些。把动量的平方减去能量，得出一个由交叉项组成的和，而这个和必须等于零；这个不等式（inequality）论证证明了某些运动根本不可能发生。至于牛顿摆（Newton's cradle）那种人所熟知的表现，原来取决于守恒定律以外的细节：冲击如何在球与球之间传递。

守恒定律也揭露了隐藏的假设。在 Section 10.3 中，所有炮同时发射所得的速率，比逐一发射为高，但这只是因为同时发射用了更多能量；一旦把该固定的量固定下来，结论就反过来了。

2. 细小的步骤如何累积起来？

有好几节都是把一个简单的步骤重复又重复。在 Section 10.2 中，一次碰撞最多只能令速率加倍，但经过一串愈来愈轻的球，增幅就变得没有上限：这正是篮球叠网球背后的原理，也是引力弹弓（gravitational slingshot）背后的原理。在 Section 10.3 中，许多次细小的发射化成了一个积分（integral），并得出齐奥尔科夫斯基（Tsiolkovsky）的对数（logarithm），由此解释了为何火箭的大部分都是燃料，以及为何火箭要分级。在 Section 10.4 中，分子每次从移动中的活塞反弹，速率都增加 $2u$，而一个精确的递推关系（recurrence）显示，速率与长度的乘积几乎保持不变：这是一个绝热不变量（adiabatic invariant），也是气体受压缩时升温的原因。而在 Section 10.5 中，无穷多次反弹只花了有限的时间，因为各段时间构成一个收敛（convergent）的等比级数（geometric series）。

3. 怎样驯服多个物体组成的系统?

方法是选取合适的坐标，并善用对称性（symmetry）。在 Section 10.6 中，质心（centre of mass）作匀速运动，而两物体的间距则表现得像一个带有约化质量（reduced mass）的单一质点；一个隐藏的平面甚至解释了为何间距的平方是时间的二次式。在 Section 10.7 中，对称性加上积分，证明了球壳（spherical shell）对内部不施加引力，对外部则有如一个质点；于是一团正在坍缩的尘埃云可以用单独一条方程来处理，而当中的自由下落时间（free-fall time）决定了恒星形成的步伐。而在 Section 10.8 中，一个对称的猜想解决了无法求解的三体问题（three-body problem）的一个特殊情况：拉格朗日（Lagrange）的旋转三角形，它在特洛伊小行星（Trojan asteroids）身上得到了体现。

4. 力学工具箱

方法	你在哪里用过
以守恒定律作为约束条件	牛顿摆（10.1）
转换参考系（frame）	碰撞（10.2）；活塞（10.4）
反复运用同一结果	叠球（10.2）
质量可变时的动量	火箭（10.3）
由求和到积分	火箭方程（10.3）；球壳（10.7）
递推关系与裂项相消（telescoping）	活塞（10.4）
等比级数	楔（10.5）
质心与约化质量	二体（10.6）
能量积分 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$	二体（10.6）；坍缩（10.7）
对称的猜想	三星（10.8）

下一步

- 第 11 章由守恒转到振荡（oscillation）与转动（rotation）：共振（resonance）、简正模式（normal modes）、真实的摆，以及在加速参考系和旋转参考系中的运动。
- Section 8.2 的能量方法和 Section 8.4 的极限环（limit cycles），是同一批思想在微分方程（differential equation）方面的体现。
- 庞加莱（Poincaré）在三体问题中发现的混沌（chaos），是 Section 8.7 的主题。

如果你想在入读大学之前再走远一点

- **Daniel Kleppner & Robert Kolenkow, *An Introduction to Mechanics***（力学导论）：经典的大学一年级教科书；要求很高，但收获甚丰。

- **David Morin, *Introduction to Classical Mechanics***（古典力学导论）：收录数以百计的题目，当中不少与本章的题目一样出人意表。
- **Richard Feynman, *The Character of Physical Law***（物理定律的本性）：为一般听众而设的讲座，内容涵盖守恒定律、对称性和引力。
- **Dwight Neuenschwander, *Emmy Noether's Wonderful Theorem***（诺特的奇妙定理）：为何有对称性就有守恒。

费曼（Feynman）说过，能量守恒至今未见任何例外。本章尝试展示守恒定律的威力有多大：排除不可能的结果、揭示隐藏的不变量，并把复杂得令人绝望的系统化为我们能够理解的系统。但本章也展示了它们的局限。守恒定律能够约束，却不一定能够决定；在它们止步之处，就要由力、对称性和参考系的细节接手。

延伸练习答案

以下只是简短的答案和提示，并非完整解答：只列出结果和关键步骤，方便你核对自己的做法。每道练习请先认真做过，然后才看答案。

10.1 牛顿摆

1. 所有碰撞（collision）结束后，运动中的质点后面不可能跟着一个较慢的质点。因此，若恰好只有一个质点在动，它必定是 A_n，而 $\lambda m v = m u$、$\lambda m v^2 = m u^2$ 在 $\lambda \neq 1$ 时互相矛盾。若只有 A_{n-1} 和 A_n 在动，则方程与质量为 m 和 λm 的两个质点相碰时的方程相同，得出 A_{n-1} 的速度为 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u < 0$；但这样它便会撞上 A_{n-2}。有三个质点在动的情况，可完全仿照第 (ii) 部分排除。在动的两个质点是 A_0（以 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ 向后运动）和 A_n（以 $\frac{2u}{\lambda+1}$ 向前运动）。

2. 质量相等的弹珠相碰时会交换速度，所以速率 u 一直传到 A_n。之后 A_n 撞上 A_{n+1}：A_{n+1} 以 $\frac{2u}{1+\lambda}$ 离开，而 A_n 则以 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}u$ 反弹。这个向后的速度沿着整列弹珠传回 A_0，使它以该速率向后离开。

3. “两球以 u 弹出”所带的动量（momentum）是 $2mu$，能量是 mu^2，与碰撞前相同。另一个解（之后不再有碰撞）是：最后三个球分别以 $\frac{u}{3}$、$\frac{u}{3}$ 和 $\frac{4u}{3}$ 离开（验算：总和为 $2u$，平方和为 $2u^2$）。真实的牛顿摆选择第一个解，是因为各球之间并非完全贴紧，所以碰撞是一对一对地先后发生的。

4. 速率一直传到 A_n，它再撞上较轻的 A_{n+1}：A_{n+1} 以 $\frac{2u}{1+\lambda}$ 离开，而 A_n 则以较慢的 $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u$ 跟在后面。其余质点全都不动。

10.2 叠球效应

1. 球以 $U = \sqrt{2gH}$ 到达地面，再以 eU 反弹，上升 e^2H。把小球放在上面时：大球以 eU 向上运动，遇上以 U 向下运动的小球。由动量守恒和恢复系数（restitution）的关系，可得小球向上的速率为 $w = U\frac{Me(2+e)-m}{M+m}$。小球球心由 $2R + r = 0.45$ 出发，升至 4.5，所以 $\frac{w^2}{2g} = 4.05$，而 $\frac{w}{U} = \sqrt{\frac{4.05}{1.8}} = 1.5$。代入 $e = \frac{2}{3}$，得 $\frac{16}{9}M - m = 1.5(M + m)$，于是 $M = 9m$。

2. 由动量守恒和恢复系数的关系，P_1 的速率为 $\frac{1+e}{1+\lambda}u$；每次碰撞的质量比都相同，情况重复出现，所以 P_n 以 $\left(\frac{1+e}{1+\lambda}\right)^n u$ 运动。速率为 s 的质点撞上下一个质点后，余下的

速率为 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}s$，而下一个质点经过自己的下一次碰撞后，速率减至 $\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}s$。当 $\lambda e<1$ 时，前者只有在 $\frac{1-\lambda e}{1+\lambda}>\frac{(1+e)(1-\lambda e)}{(1+\lambda)^2}$ 时才会再次追上后者，即 $\lambda>e$；所以若 $e>\lambda$，每个质点只会被撞一次，也只会撞别的质点一次。若 $\lambda e=1$，每个质点撞上下一个之后便立即停下。

3. 最底的球以 U 反弹，遇上中间的球（正以 U 向下运动）：相对速率为 $2U$，所以中间的球以 $3U$ 离开。最上面的球与它相遇时相对速率为 $4U$，于是以 $7U$ 离开，上升 $49H$。一般而言 $u_{j+1}=2u_j+U$，所以 $u_j+U=2^jU$。

4. 弹性碰撞（elastic collision）中动能（kinetic energy）守恒。A 的能量是 $\frac12 m\big(\frac{2\lambda}{1+\lambda}\big)^{2n}u^2$，而最初的能量是 $\frac12\lambda^n mu^2$，又因 $\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}<1$，所以 A 得到的能量永远不会多于原有的总能量。较重的质点继续向前运动，各自保留原来速率的 $\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$ 倍，余下的能量便留在它们身上。

10.3 火箭与枪炮

1. 一次过全部发射：$Mu=nm(v-u)$，所以 $u=\frac{nmv}{M+nm}$。逐个发射：第 r 次发射给出 $\big(M+(n-r+1)m\big)(u_r-u_{r-1})=mv$，所以 $u_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{mv}{M+jm}$，而除最后一项外，每一项都大于 $\frac{mv}{M+nm}$。因此 $u_n>u$。

2. 动量：$M(1+bx)v=MV$。于是 $(1+bx)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V$，所以 $x+\frac12 bx^2=Vt$，而 $x=\frac{\sqrt{1+2bVt}-1}{b}$。有外力时，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(M(1+bx)v\big)=Mf$ 给出 $(1+bx)v=ft+V$。若速率为常数 c，则须有 $x=ct$ 及 $(1+bct)c=ft+V$，所以 $c=V$ 且 $bV^2=f$。否则 $x+\frac12 bx^2=\frac12 ft^2+Vt$，所以 $x\sim t\sqrt{f/b}$，而 $v\to\sqrt{f/b}$。

3. 单级：$v\ln 10\approx 2.30v$。两级：$v\ln\frac{10}{5.5}+v\ln\frac{5}{0.5}\approx 0.60v+2.30v=2.90v$。

4. 当 $0\le s\le x$ 时，$\frac{1}{1+x}\le\frac{1}{1+s}\le 1$；在 $[0,x]$ 上积分即可。

10.4 一个分子与一个活塞

1. 这个递推关系（recurrence）逐项相消后得 $d_n=\frac{(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，所以 $v_nd_n=\frac{(v+2nu)(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}$，它比 $(v+u)d_1$ 大 $\frac{u(v+u)d_1}{v+(2n-1)u}\to 0$。

2. 把 u 换成 $-u$：每次从后退中的活塞反弹，速率都减少 $2u$，所以 $v_n=v-2nu$（只要质点仍能追上活塞），$d_n=\frac{(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$，而 $v_nd_n=\frac{(v-2nu)(v-u)d_1}{v-(2n-1)u}$，同样接近 $(v-u)d_1$。

3. 当 $v=u$ 时，$v_n=(2n+1)u$。第 n 次碰撞时动量的改变量为 $m(v_{n-1}+v_n)=4nmu$，而 $t_n=\frac{d_1}{un(n+1)}$，所以平均力为 $\frac{4mu^2n^2(n+1)}{d_1}$，量级为 n^3。每个循环所作的功约为力 $\times\, ut_n$，大约是 $4nmu^2$，这些功加起来是无穷大：要把活塞完全推到底，需要无穷多的功，正如分子的能量 $\frac12 m(2n+1)^2u^2$ 会无止境地增长一样。

4. 不变量（invariant）是 $\oint p\,\mathrm{d}q=2\int_0^h m\sqrt{2g(h-z)}\,\mathrm{d}z\propto h^{3/2}$，其中 h 是弹跳离地

板的高度。所以当地板缓慢上升时，$h^{3/2}$（等价地说，即 v^3，或能量乘以周期）几乎保持不变。

10.5 有限时间内的无限次反弹

1. 由正弦定理(sine rule),$M_1N_1 = \frac{OM_1\sin 30^\circ}{\sin\theta}$,而相继各段路程按比率 $\rho = \frac{\sin(\theta-30^\circ)}{\sin\theta} < 1$ 缩短。总和为 $\frac{M_1N_1}{1-\rho} = \frac{OM_1}{2\big(\sin\theta-\sin(\theta-30^\circ)\big)} = \frac{OM_1}{4\sin 15^\circ\cos(\theta-15^\circ)}$。

2. 由三角形 OM_1N_1 的各角可得 $\varphi = \theta-\alpha$。时间之比为 $\frac{\rho}{k} = \frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(2\theta-2\alpha)}{\sin 2\theta}$，它小于 1 当且仅当 $\alpha < \theta < 45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$。

3. 把楔形沿它的壁反射，可将路径展开成一条直线。围绕 O 刚好可放十二个楔形，而一条不通过 O 的直线最多穿过其中六个。所以质点只会反弹有限次，然后逃离，除非它正对着 O 射去。

4. 它首先下落 $t_0 = \sqrt{2/9.8} \approx 0.452\,\mathrm{s}$。每次弹跳历时 $2e^k t_0$，所以总时间为 $t_0\big(1+\frac{2e}{1-e}\big) = 9t_0 \approx 4.07\,\mathrm{s}$。总路程为 $1+2\sum_{k\ge1}e^{2k} = 1+\frac{2(0.64)}{0.36} \approx 4.56\,\mathrm{m}$。

10.6 二体化为一体

1. 绳子保持拉紧，相对速度与绳子垂直，大小恒为 u，所以 $\theta = \frac{ut}{r}$。由动量可得 $my + MY = mut$。利用 $A = G - \frac{M}{m+M}\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AB} = r(\cos\theta, -\sin\theta)$，得 $y = \frac{1}{m+M}\big(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\big)$。于是 $\dot y = \frac{u}{m+M}\big(m + M\cos\frac{ut}{r}\big)$，它在 $\cos\frac{ut}{r} < -\frac{m}{M}$ 时为负，而这在 $M > m$ 时才有可能。

2. 现在 $\ddot z = -\frac{3}{z^3}$，所以 $\dot z^2 = \frac{3}{z^2} - 2$（利用 $z=1$、$\dot z = -1$）。设 $w = z^2$，则 $\ddot w = 2\dot z^2 + 2z\ddot z = -4$，所以 $z^2 = 1 - 2t - 2t^2$。两者在 $t = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0.366$ 时相撞。

3. $z^2 = 4t^2 - 2t + 1 = |\mathbf{p} + \mathbf{q}t|^2$，其中 $\mathbf{p} = (1,0)$，$\mathbf{q} = (-1,\sqrt{3})$：这是通过 $(1,0)$、方向为 $(-1,\sqrt{3})$ 的直线，而 $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}t}{1-t}$。于是 $z^2\dot\theta = |\mathbf{p}\times\mathbf{q}| = \sqrt{3}$。这个斥力正好就是平面上自由运动的“离心”项 $\frac{h^2}{z^3}$，其角动量（angular momentum）为 $h = \sqrt{3}$。

4. 两颗星与质心(centre of mass)的距离分别为 $\frac{m_2a}{m_1+m_2}$ 和 $\frac{m_1a}{m_1+m_2}$。对第一颗星,$\frac{Gm_1m_2}{a^2} = m_1\omega^2\frac{m_2a}{m_1+m_2}$，所以 $\omega^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a^3}$，而 $T = \frac{2\pi}{\omega}$。

10.7 球壳内的引力

1. 在球壳外（$b > a$），与第 3 阶段相同的积分改为对 s 由 $b-a$ 积至 $b+a$，结果是 $\frac{GM}{b^2}$。实心球是多个同心球壳的并集，每个球壳的作用都如同其质量集中于球心。

2. 设 $r = R\cos^2\alpha$，则 $\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{\tan^2\alpha}{R}$，所以速率为 $\sqrt{2GM/R}\tan\alpha$。于是 $\mathrm{d}t = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{2GM/R}\tan\alpha} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}\,2\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$；再积分即可。

3. 根据球壳定理（shell theorem），只有半径 b 以内的质量（即 $M\frac{b^3}{a^3}$）产生引力，结果是 $\frac{GMb}{a^3}$。这是简谐运动（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$，周期为 $2\pi\sqrt{a^3/GM} \approx 84$ 分钟，这里取 $a = 6.37\times10^6\,\mathrm{m}$ 及 $GM = 3.99\times10^{14}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}}$。在半径 a 处运行的卫星满足 $\omega^2 a = \frac{GM}{a^2}$：$\omega$ 相同。

4. 不会。换成 $\frac{1}{s^3}$ 后，被积函数不再化简为常数，球壳较近的一侧占了上风：质点会被拉向球壳最近的部分。只有平方反比定律（inverse-square law）才会完全抵消（球壳上一小块的面积按 s^2 增长，刚好抵消引力的减弱）。

10.8 排成三角形的三颗恒星

1. 每颗星与中心的距离为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$。相邻两颗星的引力指向中心的分量合共为 $\frac{2\gamma m^2}{a^2}\cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}\gamma m^2}{a^2}$，而对面那颗星的引力为 $\frac{\gamma m^2}{2a^2}$。令 $\frac{\gamma m^2}{a^2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right) = m\omega^2\frac{a}{\sqrt{2}}$，得 $\omega^2 = \frac{(4+\sqrt{2})\gamma m}{2a^3}$。

2. 在中心处各引力互相抵消，所以行星处于平衡（equilibrium）。沿着两颗星的连线方向，平衡是不稳定的：向其中一颗星移动距离 x，便会受到约为 $\frac{32\gamma Mx}{a^3}$ 的向外净力。在垂直于轨道平面的方向，平衡是稳定的，回复力约为 $\frac{16\gamma Mz}{a^3}$。（在轨道平面内垂直于连线的方向，引力有回复作用，但旋转会把这个方向的运动与不稳定的方向耦合起来。）

3. 作用于 m_1 的力为 $\frac{\gamma m_1}{a^3}\big(m_2(P_2-P_1)+m_3(P_3-P_1)\big)$。由于 $m_1P_1+m_2P_2+m_3P_3 = (m_1+m_2+m_3)G$，这个力等于 $\frac{\gamma m_1(m_1+m_2+m_3)}{a^3}(G-P_1)$。每颗星都被拉向 G，引力与它跟 G 的距离成正比，而且比例常数相同，所以三颗星可以像刚体一样一起旋转，其中 $\omega^2 = \frac{\gamma(m_1+m_2+m_3)}{a^3}$。

4. 相隔 k 个位置的那颗星，距离为 $2R\sin\frac{k\pi}{n}$，其引力指向中心的分量占 $\sin\frac{k\pi}{n}$。所以 $m\omega^2R = \frac{\gamma m^2}{4R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$，得 $\omega^2 = \frac{\gamma m}{4R^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin(k\pi/n)}$。当 $n=3$、$R=\frac{a}{\sqrt{3}}$ 时，结果是 $\frac{3\gamma m}{a^3}$。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

全书共 13 章，本册为第 10 章。 全书各章及所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为

beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。

