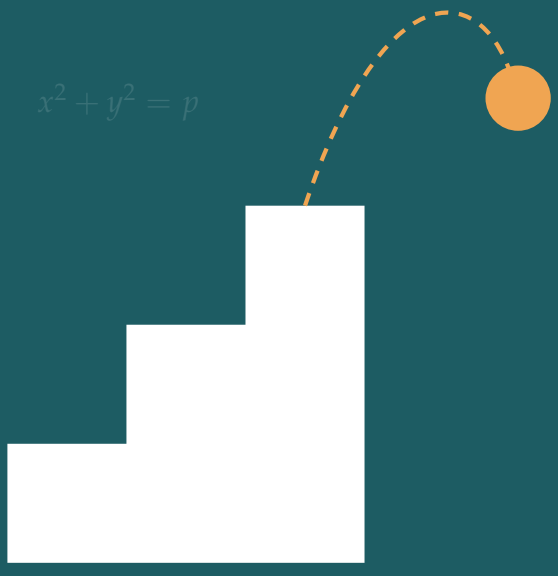
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

第 8 章

微分方程（Differential Equations）与动力系统（Dynamical Systems）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

第 8 章

微分方程（Differential Equations）与动力系统（Dynamical Systems）

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

第 8 章：微分方程（Differential Equations）与动力系统（Dynamical Systems）

本册是 *Beyond STEP* 全书 13 章中的第 8 章。全书、各章的单行本、每一节的可列印工作纸，以及每一道 STEP 试题的详细解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

8

微分方程与动力系统

绝大多数微分方程都解不出来。学问就在于：解不出来，也要读懂它。

本章内容

8.1	当解不唯一	STEP III 1994
8.2	不求解而估界	STEP III 2013
8.3	收获种群	STEP II 1995
8.4	盘旋趋向圆	STEP III 2015
8.5	格力犬追逐格力犬	STEP III 1988
8.6	量子振子	STEP III 1988
8.7	可以解出的混沌	STEP I 2014
8.8	周期三蕴含混沌	STEP III 2025
A	练习答案	第 63 页

变化的法则

大自然对积分的种种困难一笑置之。

— 相传为拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）所言

在中学，微分方程（differential equation）是拿来解的。你把变量分离，或者找一个积分因子（integrating factor），又或者猜一个形如 $e^{\lambda x}$ 的解，最后得到一条公式。课本里的方程都是特意挑选的，所以这些方法才行得通。可惜的是，来自现实世界的微分方程（三颗行星的运动、天气、捕食者与猎物的种群数量、大幅度摆动的单摆），几乎全都没有可以用我们熟悉的函数写出来的解。

本章要谈的，就是这时候该怎么办。我们不再问“公式是甚么?”，而是问一些不靠公式也能回答的问题。解到底存在吗？是否只有一个？它会保持有界（bounded）吗？它会趋于一个稳定状态，还是趋于一个周而复始的循环，抑或永远游移不定？长远来说它会怎样？这种由“求解”转为“理解”的观点，始于 1880 年代的庞加莱（Henri Poincaré），并由此开创了今天称为*动力系统*（dynamical systems）的学科。

微分方程为何重要

微分方程是科学的语言。牛顿（Newton）第二定律是一条微分方程；麦克斯韦（Maxwell）的电磁学方程组、量子力学的薛定谔（Schrödinger）方程，以及用来预测天气和设计飞机的流体流动方程，也都是微分方程。流行病学家用它们为疾病的传播建立模型，生态学家用来描述鱼类资源的数量，经济学家用来描述经济增长，工程师则用来描述各种控制系统的响应，由恒温器到自动驾驶仪无一例外。凡是一个量的变化率取决于它当前的状态，就有一条微分方程，而且通常是一条没有人能精确解出的方程。

与这些连续模型并列的还有离散模型，其中时间是一步一步推进的：今年的种群数量决定明年的种群数量。这些*迭代映射*（iterated maps）写起来比较简单，但最后两节会说明，它们的行为可以同样狂野。1970 年代的重大发现之一，就是非常简单的法则也能产生*混沌*（chaos）：这种行为完全是确定的，实际上却无法预测。

你在大学会遇到甚么

大学一年级的微分方程课程会讲授标准的求解方法，但也会引入本章的这些问题。你会遇到存在性与唯一性定理（existence and uniqueness theorems），它们告诉你解在甚么时候存在，又在甚么时候由初始值决定。你会学习绘画*相图*（phase portraits），即把所

有解一次过画出来的图，并学习通过线性化（linearising）把平衡点（equilibria）分类为稳定或不稳定。往后的课程会走得远得多：*非线性动力学*（nonlinear dynamics）研究极限环（limit cycles）、分歧（bifurcations）和混沌；*数学生物学*（mathematical biology）把这些概念应用于种群和流行病；而偏微分方程（partial differential equations）、傅里叶级数（Fourier series）和正交函数（orthogonal functions）的理论（在 Section 8.6 可以略窥一二）则是量子力学和大部分应用数学的基础。

贯穿本章的问题

三大问题

1. **现在能决定将来吗？**一条微分方程配上一个初始值，在甚么时候恰好只有一个解？
2. **不求解，我们能知道甚么？**在没有公式的情况下，怎样为解定出上下界、找出它最终停留在哪里，或者描述它的形状？
3. **长远来说会怎样？**解会趋于稳定状态、趋近一个循环，还是呈现混沌的行为？我们又怎样分辨？

本章首先讨论唯一性，以及唯一性不成立时会发生甚么事（Section 8.1），然后发展一些不必求解也能理解方程的工具：不会增加的类能量的量、平衡点及其稳定性，以及配合问题对称性的坐标。有两节把这些想法应用于物理问题：在正方形内互相追逐的几只狗，以及量子谐振子（quantum harmonic oscillator）。本章最后讨论离散映射：在那里，一条公式揭示了混沌，而单单一个长度为三的循环，就迫使任何长度的循环都必然存在。

本章的概念

§	课题	概念
8.1	唯一性	包络线（envelopes）与奇解（singular solutions）；黏合
8.2	能量方法	一个永不增加的量
8.3	种群模型	平衡点、稳定性与临界点（tipping point）
8.4	极限环	极坐标与伯努利代换（Bernoulli substitution）
8.5	追逐曲线（pursuit curves）	对称性把四个物体化约为一个
8.6	正交函数	朗斯基行列式（Wronskian）与正交性
8.7	混沌	变量代换：逻辑斯谛映射（logistic map）其实是乔装了的倍角映射
8.8	周期轨道（periodic orbits）	区间覆盖；沙可夫斯基定理（Sharkovskii's theorem）

如何阅读本章

在动手解任何东西之前，先画草图。对于微分方程 $y' = F(y)$，标出 F 在哪里为正、为负和为零，并在 y 轴上画上箭头；对于映射 $x \mapsto f(x)$，把它的图像连同直线 $y = x$ 一起画出来，再用蛛网图法（cobweb method）追踪几个数列。这些图只需一分钟就能画好，而且往往在代数运算开始之前，就已经告诉你答案应该是甚么模样。

8.1 当解不唯一

题目

STEP III 1994，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/94-s3-q4`

引子

微分方程（differential equation）是一条告诉你某个量如何变化的规则：牛顿（Newton）定律告诉行星，在知道自己目前位置的情况下该如何运动。古典物理学的图像是，这样就已足够：只要知道世界此刻的状态，定律便决定了它的整个未来。拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace）曾设想有这样一个智者，只要知道每一个位置和速度，便能预测一切。这幅图像建基于一个数学假设：一条微分方程加上一个初始条件（starting condition），恰好只有一个解。

这道题说明这个假设可以不成立。看似平平无奇的方程 $(y')^2 = 4y$，有些解会沿着 x 轴走，然后在自己选定的一刻离轴而去。经过某些点的解有无限多个。知道现在，并不能决定未来。找出唯一性（uniqueness）究竟在甚么时候成立，是大学微分方程课程中最先遇到的定理之一。

动笔之前

想一想 把两边开平方：$y' = \pm 2\sqrt{y}$。试试 $y = (x-c)^2$。它满足这条方程吗？有没有更简单的解？

若 $y = (x-c)^2$，则 $y' = 2(x-c)$，而 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$。所以对每一个 x，每一条抛物线（parabola）$y = (x-c)^2$ 都是解。而 $y = 0$ 也是解：$(0)^2 = 4 \times 0$。请记住最后这一个解；它是整道题的关键。

逐步解题

阶段 1　经过一点的解

想一想　哪些抛物线 $y=(x-c)^2$ 经过 (a,b^2)?

我们需要 $(a-c)^2=b^2$，所以 $a-c=\pm b$，即 $c=a-b$ 或 $c=a+b$。由于 $b\neq 0$，这两个值并不相同，于是得出两个解

$$y=(x-a+b)^2 \qquad 及 \qquad y=(x-a-b)^2. \qquad \blacksquare$$

（我们还应该检查有没有遗漏：在 $y>0$ 的区域上，$y'=\pm 2\sqrt{y}$ 而正负号固定，并且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{y}=\frac{y'}{2\sqrt{y}}=\pm 1$，所以 $\sqrt{y}=\pm(x-c)$，得出的正是这些抛物线。因此在给定的点附近，只要 y 保持为正，就只有这两个解。不过，解一旦到达 x 轴，便可以与零解黏合起来，我们将在第 3 阶段看到这一点，而这样会多出无限多个对所有 x 都有定义的解。题目所说的“两个解”，就是这两条抛物线。）

阶段 2　两个点与一个共同的解

经过原点的解必定是 $y=x^2$（即 $c=0$ 的那条抛物线）。它在 $x=1$ 和 $x=-1$ 处达到高度 1。所以取 $(a_1,1)=(1,1)$ 和 $(a_2,1)=(-1,1)$。

经过 $(1,1)$（即 $a=1$，$b=\pm 1$）的解是 $y=x^2$ 和 $y=(x-2)^2$。经过 $(-1,1)$ 的解是 $y=(x+2)^2$ 和 $y=x^2$。两种情况下，经过原点的解都是同一条曲线 $y=x^2$。 $\blacksquare$

阶段 3　整个曲线族与一条公切线

停一停，试一试　就不同的 c 值，画出几条抛物线 $y=(x-c)^2$ 的草图。哪一条直线与它们每一条都相切？这条直线本身是不是解？

每一条抛物线 $y=(x-c)^2$ 都在其顶点 $(c,0)$ 与 x 轴相切，所以 x 轴是整个曲线族的公切线（common tangent），亦即它们的*包络线*（envelope）（图 8.1.1）。而 x 轴，即 $y=0$，本身也是这条微分方程的解。它不是那些抛物线的其中一条；它是另外一个独立的解，称为*奇解*（singular solution）。

阶段 4　为何重要

想一想　从原点出发。哪些解经过原点？你能否构造一个解，先沿着 x 轴走一段，然后离开？

经过原点的有 $y=x^2$ 和 $y=0$。但事实远不止于此。由于每条抛物线都与 x 轴相切（两

者在该处的斜率都是 0），你可以把各段平滑地黏合起来：对任意 $c_1 \le 0 \le c_2$，

$$y = \begin{cases} (x-c_1)^2 & x < c_1, \\ 0 & c_1 \le x \le c_2, \\ (x-c_2)^2 & x > c_2 \end{cases}$$

是一个可微函数（differentiable function），处处满足 $(y')^2 = 4y$，并且经过原点。经过 x 轴上每一点的解都有无限多个：一个解可以随意在 $y = 0$ 上停留多久，然后才离开。这条公切线正正就是唯一性失效的地方。 ■

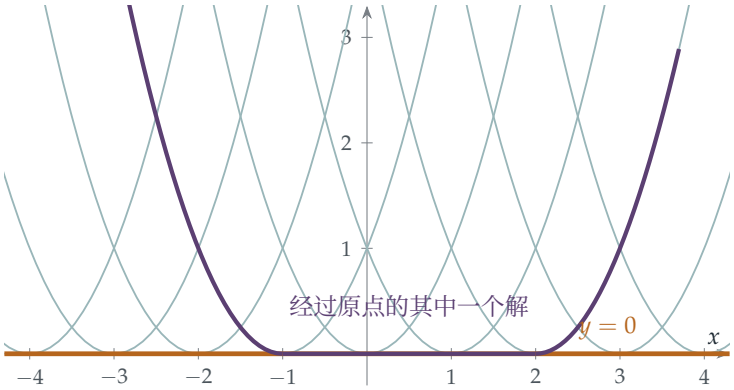


图 8.1.1 $(y')^2 = 4y$ 的解 $y = (x-c)^2$（蓝绿色）全都与 x 轴相切；这条轴是它们的包络线，本身也是解（琥珀色）。把各段黏合起来可得出更多的解，例如紫红色的那一个：它沿着一条抛物线落到轴上，沿轴而行，然后在自己选定的时刻再次离开。经过 x 轴上任何一点的解都有无限多个。

回顾

- **先找简单的解。**试一试 $y = (x-c)^2$ 和 $y = 0$，便看清了整个局面。
- **包络线给出奇解。**一族解的公切线，本身可以是一个不属于该族的解。
- **黏合。**两个解相切之处，可以把它们接合成一个新的可微解。非唯一性就是这样蔓延开去的。

背后的数学

解在甚么时候是唯一的？

皮卡—林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem，由皮卡（Émile Picard）和林德洛夫（Ernst Lindelöf）约于 1890–1894 年证明）指出，方程 $y' = F(x, y)$ 连同 $y(x_0) = y_0$ 在 x_0 附近恰好有一个解，条件是 F 对 y 满足利普希茨（Lipschitz）条件：存在常数 L 使得 $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$。粗略地说，当 y 变化时，F 不可以变化得无限快。我们的方程是 $y' = \pm 2\sqrt{y}$，而 $\sqrt{y}$ 在 $y = 0$ 处的斜率是无限大：它在该处不满足利普希茨条件，而那里正是唯一性失效的地方。（皮亚诺（Giuseppe Peano）在 1886 年证明了单凭 F 的连续性（continuity）已能保证解*存在*，但不能保证解唯一。）皮卡–林德洛夫定理的证明用到一个迭代（iteration），它凭借 Section 2.2 的压缩映射原理（contraction mapping principle）而收敛。

漏水的水桶

以下是一个物理例子。一个底部有孔的水桶按照托里拆利定律（Torricelli's law）流干：水的高度 h 满足 $h' = -k\sqrt{h}$。让时间向前走，一切都没有问题：水桶流干，然后一直是空的。但让时间倒流：假如你发现一个空桶，这条方程无法告诉你它是甚么时候流干的。在所有时间都有 $h = 0$ 的解，以及那些直到某一刻仍然盛满、然后才流干的解，全都与“现在是空的”相符。这种非唯一性，正是“关于过去的信息已经失去”这个事实在数学上的投影。

Norton 圆顶

2003 年，哲学家 John Norton 描述了一个无摩擦的圆顶，其形状使得一个恰好放在顶端的球所遵从的牛顿定律，形式为 $r'' = \sqrt{r}$。其中一个解是球永远停在顶端。但还有其他的解：球在顶端停留任意长的时间，然后在没有任何原因的情况下，自发地朝任意方向滚下。这个例子至今仍有争论：古典力学到底是否决定论（deterministic）的？从数学上看，这正是本题所见的那种非唯一性。

思维技巧

不要假设唯一性

找到一个解，并不表示它是唯一的解。要问一问是否还有其他解，尤其是当方程涉及不光滑的函数时。

在大学里，存在性与唯一性定理（existence and uniqueness theorems）会确切地告诉你需要甚么条件。在这里，一个在零处斜率无限大的平方根，已足以破坏唯一性。

延伸练习

1 **两种增长率。**试做 STEP II 2018，第 8 题（`step.maths.org/questions/18-s2-q8`）。该题用代换法（substitution）解两条增长方程。然后想一想，为甚么 $y = 0$ 也是具有相同初始值的解，而这对唯一性又说明了甚么。

2 **漏水的水桶。**解 $h' = -k\sqrt{h}$，其中 $h(0) = h_0 > 0$。水桶在甚么时候变空？写出两个不同的解，使得对某个 T 有 $h(T) = 0$，并且对所有 $t \geq T$ 有 $h(t) = 0$。

3 **恢复唯一性。**证明 $y' = 2y$ 连同 $y(0) = 0$ 只有 $y = 0$ 这一个解。（提示：考虑 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^{-2x})$。）$2y$ 具有甚么性质，是 $2\sqrt{y}$ 所没有的？

4 **立方。**求 $y' = 3y^{2/3}$ 经过原点的所有解。

延伸阅读

- **Morris Hirsch, Stephen Smale & Robert Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos***（Academic Press）。讲述存在性与唯一性，以及本章其余的大部分内容。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***（CRC Press）。一本经典著作，富于历史掌故；书中讨论了奇解与包络线。
- **John Norton, “The dome: an unexpectedly simple failure of determinism”**, *Philosophy of Science* 75 (2008)。篇幅短小，容易阅读。

8.2 不求解而估界

题目

STEP III 2013，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/13-s3-q7`

引子

大多数微分方程（differential equation）都是解不出来的。$y'' + y^3 = 0$ 的解无法用我们熟悉的函数写成公式，第 (iii) 部分那头怪物就更不用说了。然而，我们仍然可以对这些解说出很多东西：它们保持有界（bounded）、它们会振荡、它们会渐趋平稳。诀窍在于找出一个由解及其导数（derivative）构成、而且永不增加的量。这样一来，解就被困住了。

在物理学中，这个量通常就是能量（energy）。在碗中滚动的球不可能爬到比起始高度更高的地方，因为能量守恒，而在有摩擦时能量更会减少。本题把同样的推理用于三条方程，其中最后一条是特意挑选的，要你自己发明那个“能量”。这个方法由李雅普诺夫（Aleksandr Lyapunov）于 1892 年提出，是研究微分方程最重要的工具之一。

动笔之前

想一想 在第 (i) 部分，把 y 看成质点的位置，把 x 看成时间。那么 $y'' = -y^3$ 就是牛顿定律，其中力为 $-y^3$。动能（kinetic energy）和势能（potential energy）分别是甚么？

动能是 $\frac{1}{2}(y')^2$（取质量为 1），而力 $-y^3$ 来自势函数 $V(y) = \frac{1}{4}y^4$，因为力等于 $-V'(y)$。总能量是 $\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{4}y^4$，即 E 的一半。能量守恒（conservation of energy）所说的，正正就是 E 为常数。

逐步解题

阶段 1　守恒

由链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2y'y'' + 2y^3y' = 2y'(y'' + y^3) = 0.$$

所以 E 是常数，等于它在 $x = 0$ 时的值：$\mathrm{E} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$。由于 $(y')^2 \geq 0$，我们得到 $\frac{1}{2}y^4 \leq \frac{1}{2}$，所以 $y^4 \leq 1$，即 $|y| \leq 1$。 ■

这个解在 -1 与 1 之间振荡，在 (y, y') 平面上描出闭曲线 $(y')^2 + \frac{1}{2}y^4 = \frac{1}{2}$（图 8.2.1）。

阶段 2　耗散

> **想一想**　对 $\mathrm{E} = (v')^2 + 2\cosh v$ 求导。利用微分方程把 v'' 换掉。结果的正负号是甚么？

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = 2v'v'' + 2\sinh v\, v' = 2v'(v'' + \sinh v) = 2v'(-xv') = -2x(v')^2 \leq 0 \quad \text{当} x \geq 0.$$

xv' 这一项的作用有如摩擦，会带走能量。所以当 $x \geq 0$ 时，$\mathrm{E}(x) \leq \mathrm{E}(0)$。在 $x = 0$ 处，$\cosh(\ln 3) = \frac{3+\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{3}$，所以 $\mathrm{E}(0) = \frac{10}{3}$。因此

$$2\cosh v \leq (v')^2 + 2\cosh v = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{10}{3}, \qquad \text{所以} \qquad \cosh v(x) \leq \tfrac{5}{3}.$$ ■

阶段 3　发明能量

第 (iii) 部分没有给任何提示。我们需要一个不会增加的函数 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$。

> **想一想**　若 $\mathrm{E} = (w')^2 + F(w)$，则 $\mathrm{E}' = 2w'w'' + F'(w)w'$。$F'(w)$ 应该是甚么，才可以利用方程把 w'' 换掉，最后只剩下 $(w')^2$ 的倍数？

我们希望 $\mathrm{E}' = 2w'\big(w'' + w\cosh w + 2\sinh w\big)$，所以需要 $F'(w) = 2(w\cosh w + 2\sinh w)$。由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}(w\sinh w) = \sinh w + w\cosh w$，我们可以取

$$F(w) = 2w\sinh w + 2\cosh w, \qquad \mathrm{E} = (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w.$$

于是，利用方程可得

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}x} = -2(5\cosh x - 4\sinh x - 3)(w')^2.$$

停一停，试一试 证明对所有 x 都有 $5\cosh x - 4\sinh x - 3 \geq 0$。（把它用 e^x 表示，然后找出一个完全平方。）然后完成整个论证。

$5\cosh x - 4\sinh x - 3 = \frac{5}{2}(e^x + e^{-x}) - 2(e^x - e^{-x}) - 3 = \frac{1}{2}e^x - 3 + \frac{9}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}\big(e^{x/2} - 3e^{-x/2}\big)^2 \geq 0$。所以 E 永不增加。在 $x = 0$ 处，$\mathrm{E}(0) = \frac{1}{2} + 0 + 2 = \frac{5}{2}$。由于对任何 w 都有 $w\sinh w \geq 0$（两个因子同号），

$$2\cosh w \leq (w')^2 + 2w\sinh w + 2\cosh w = \mathrm{E}(x) \leq \tfrac{5}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \cosh w(x) \leq \tfrac{5}{4}. \quad \blacksquare$$

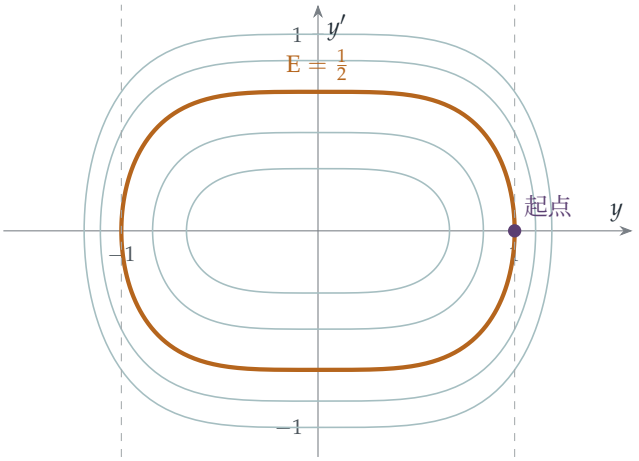


图 8.2.1 能量 $\mathrm{E} = (y')^2 + \frac{1}{2}y^4$ 在 (y, y') 平面上的等高线。由于 E 是常数，第 (i) 部分的解从 $y = 1$、$y' = 0$ 出发，永远留在曲线 $\mathrm{E} = \frac{1}{2}$（琥珀色）上，因而永不离开带状区域 $|y| \leq 1$（虚线）。我们根本不必找出 y 的公式，就已经知道这一点。

回顾

- **乘以 y'。**在每一部分，E' 都是 $2y'$ 乘以方程的左方，再加上余下的项。正是这个余下的项决定了 E 是守恒还是递减。
- **能量限制位置。**由于动能部分 $(y')^2$ 非负，E 的上界就是势能部分的上界，从而也给出 y 的界。
- **留意隐藏的平方。**第 (iii) 部分的阻尼系数看来可能会变号，但它其实是一个经过伪装的完全平方。

背后的数学

李雅普诺夫函数

李雅普诺夫在 1892 年的博士论文中研究运动的*稳定性*（stability）：如果一个系统受到轻微扰动而偏离平衡，它会回到平衡，还是愈走愈远？他的“第二方法”是找出一个函数，它在平衡点处取最小值，而且沿着解永不增加；这种函数现在称为*李雅普诺夫函数*（Lyapunov function）。这样，从平衡点附近出发的解就会一直留在平衡点附近。这个方法的美妙之处，在于它不需要解的公式，只需要微分方程本身，而这正是本题所展示的。现今，从飞机控制系统、电网以至生态系统，各种各样事物的稳定性都是用李雅普诺夫函数来证明的。

物理与工程中的能量

第 (i) 部分是一个非线性振子（nonlinear oscillator）：它像弹簧，但回复力与位移的立方成正比。与简谐振子不同，它的周期取决于振幅（振荡愈大，速度愈快），但能量守恒仍然把它困住。第 (ii) 部分加入了随时间增强的阻尼（damping），能量因而逐渐流失。在工程学中，人们用能量方法来证明结构不会把自己摇散，以及控制系统不会振荡至失控。在偏微分方程（partial differential equation）的理论中，这类“能量估计”是证明解存在而且性质良好的主要工具；有关流体流动方程的问题，包括千禧年大奖难题（Millennium Prize Problems）之一的纳维－斯托克斯（Navier–Stokes）问题，归根究底就是能否找到这样的界。

思维技巧

找出一个不能增加的量

如果你解不出一条方程，就找一个由解构成、而且导数有确定正负号的量。它会给出解的界。

这种寻找一方面由物理引导（“能量是甚么?”），另一方面由代数引导（“我要加上甚么，导数才会化简?”）。第 (iii) 部分示范了在没有物理直觉可以依靠时，如何走代数这条路。

延伸练习

1 **简谐运动。**对于 $y'' + y = 0$，其中 $y(0) = A$、$y'(0) = 0$，求守恒的能量，并由此推出 $|y| \le A$。用精确解核对。

2 **单摆。**单摆的角度 θ 满足 $\theta'' + \sin\theta = 0$（采用适当的单位）。证明 $(\theta')^2 - 2\cos\theta$ 是常数。若单摆在角度 θ_0 处由静止开始，其中 $|\theta_0| \le \pi$，证明 $|\theta|$ 永不超过 $|\theta_0|$。若 $|\theta_0| > \pi$，哪里会出问题？

3 **阻尼。**对于 $y'' + 2ky' + y = 0$，其中 $k > 0$，证明 $(y')^2 + y^2$ 递减。它是否必定趋向零？

4 **逃逸。**对于 $y'' - y^3 = 0$，其中 $y(0) = 1$、$y'(0) = 0$，求一个守恒量，并证明它不能给出 y 的界。哪里出了问题？

延伸阅读

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 6 章和第 7 章讲述相平面、保守系统和李雅普诺夫函数。
- **D. W. Jordan & P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations***（Oxford University Press）。一本标准的大学本科教科书，载有大量能量方法的例子。
- **Keith Devlin, *The Millennium Problems***（Basic Books）。书中有一篇关于纳维－斯托克斯问题的浅白介绍。

8.3 收获种群

题目

STEP II 1995，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/95-s2-q8`

引子

食物供应无限的种群会以指数增长（exponential growth）的方式扩张。现实中的种群却总会用尽空间：当种群数量接近环境所能维持的上限，即其*环境承载力*（carrying capacity）时，增长便会放缓。描述这个现象的最简单模型是*逻辑斯谛方程*（logistic equation），它出现在本题的前半部分，由培养皿中的细菌到新科技的普及，都可以用它来描述。

后半部分所问的，是一个在现实中关系重大的问题：假如我们以稳定的速率收获（harvest）这个种群，会发生甚么事？在某个阈值（threshold）以下，种群会调整到一个新的、较低的平衡点（equilibrium）。但只要收获率越过这个阈值，哪怕只是超出少许，平衡点便会消失，种群数量随即崩溃至零。这就是渔业崩溃背后的数学，也是设立捕鱼配额的原因。

动笔之前

想一想 在动手求解之前，先把增长率 $(2K - x)x$ 当作 x 的函数，画出它的略图。它在哪里为零？在哪里为正？这告诉你 x 会怎样变化？

增长率在 $x = 0$ 和 $x = 2K$ 处为零，在两者之间为正，超过 $2K$ 则为负。所以，由 0 与 $2K$ 之间出发的种群会向 $2K$ 增长，而由 $2K$ 以上出发的种群则会向它缩减。环境承载力是 $2K$，而增长在 $x = K$ 时最快，那时的增长率是 K^2。不必解方程，你也能预测长远的变化。

逐步解题

阶段 1　解逻辑斯谛方程

想一想　分离变量（separate the variables）：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2K-x)x} = \int \mathrm{d}t$。把左边拆成部分分式（partial fractions）。

$\dfrac{1}{(2K-x)x} = \dfrac{1}{2K}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2K-x}\right)$，所以

$$\frac{1}{2K}\ln\frac{x}{2K-x} = t + C.$$

当 $t=0$ 时，$x=K$，所以 $\ln 1 = 0$，而 $C=0$。于是 $\frac{x}{2K-x} = e^{2Kt}$，由此得

$$x = \frac{2Ke^{2Kt}}{1+e^{2Kt}} = \frac{2K}{1+e^{-2Kt}} = K + K\frac{1-e^{-2Kt}}{1+e^{-2Kt}}. \qquad \blacksquare$$

这个分式就是 $\tanh(Kt)$，所以 $x = K + K\tanh Kt$：这是一条由 K 上升并趋向 $2K$ 的 S 形曲线。当 $t\to\infty$ 时，$e^{-2Kt}\to 0$，而 $x\to 2K$。

阶段 2　收获

以速率 L 移走细菌，便得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K-x)x - L.$$

想一想　对 $(2K-x)x - L$ 进行配方（complete the square）。它的零点在哪里？

$(2K-x)x - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2 = \big(\alpha-(x-K)\big)\big(\alpha+(x-K)\big)$。平衡点是 $x = K \pm \alpha$。

停一停，试一试　现在作代换（substitution）$y = x - K + \alpha$。y 满足甚么方程？把它与原来的逻辑斯谛方程比较一下。

设 $y = x - K + \alpha$，则 $x - K = y - \alpha$，所以 $\alpha + (x-K) = y$，而 $\alpha - (x-K) = 2\alpha - y$。因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2\alpha - y)y,$$

这又是逻辑斯谛方程，只是 K 换成了 α。初始时 $y(0) = K - K + \alpha = \alpha$，正好对应第一部分的 $x(0)=K$。所以根据第 1 阶段的结果（以 α 代替 K），$y(t) = \alpha + \alpha\tanh\alpha t \to 2\alpha$，因此

$$x(t) = K + \alpha\tanh\alpha t \to K + \alpha. \qquad \blacksquare$$

回顾

- **先作定性分析。**还未动手求解，增长率的正负号已经预测了长远的变化。
- **配方揭示平衡点。**有收获的方程的平衡点在 $K \pm \alpha$。
- **代换把新问题化为旧问题。**把变量平移之后，有收获的方程便变成了早已解出的逻辑斯谛方程。

背后的数学

临界点

有收获的方程有两个平衡点，$K+\alpha$ 和 $K-\alpha$。上面的一个是*稳定*（stable）的：种群数量稍高于或稍低于它，都会回到它那里。下面的一个是*不稳定*（unstable）的：种群数量只要稍低于 $K-\alpha$，便会一直下跌，直至灭绝。随着收获率 L 增加，$\alpha = \sqrt{K^2 - L}$ 会缩小，两个平衡点互相靠近；到 $L = K^2$ 时两者合而为一，而当 $L > K^2$ 时则完全没有平衡点，任何种群都会崩溃（图 8.3.1）。这是一个*鞍结分岔*（saddle-node bifurcation），是最简单的一种*临界点*（tipping point）。它的可怕之处，在于事前没有任何明显的预兆：当 L 接近 K^2 时，平衡种群数量只是缓缓下降，然后平衡点突然不复存在。事后才减少收获未必有用，因为种群数量可能已经跌到不稳定的阈值以下。

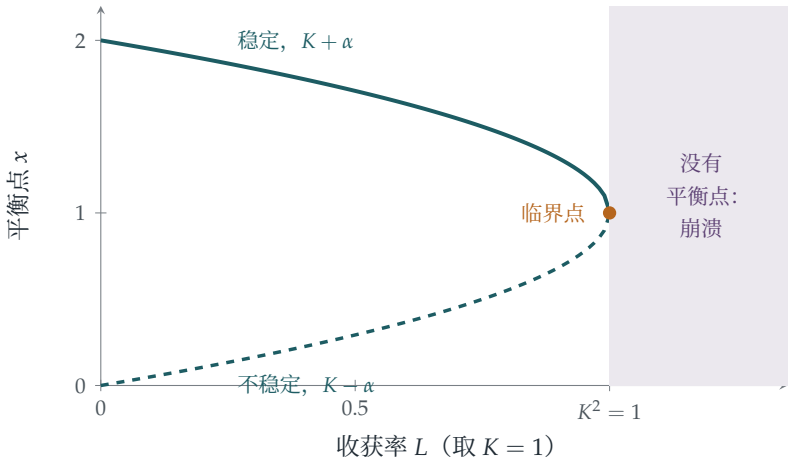


图 8.3.1 平衡种群数量与收获率 L 的关系，其中 $K=1$。随着 L 增加，稳定平衡点（实线）与不稳定阈值（虚线）互相靠近，并在 $L=K^2$ 处相遇。越过这一点之后，平衡点不再存在，无论种群有多大都会崩溃。

最大可持续产量

种群所能承受的最大收获量是多少？答案是 $L = K^2$，即增长率 $(2K - x)x$ 的峰值，在种群数量维持于 K（环境承载力的一半）时达到。二十世纪中叶，渔业科学采纳了这个“最大可持续产量”（maximum sustainable yield）作为管理目标。可是，恰好按最大值收获，就等于把系统恰好放在临界点上，只要稍为高估了 K，或者遇上一个坏年头，便会引致崩溃。纽芬兰对开的大浅滩（Grand Banks）鳕鱼渔场，五百年来一直是全世界最丰饶的渔场之一，却在 1990 年代初崩溃；1992 年，加拿大政府颁布禁捕令，令数以万计的人失去工作。鱼类资源至今仍未完全恢复。

其他地方的逻辑斯谛增长

逻辑斯谛方程由 Pierre-François Verhulst 于 1838 年提出，用来为人类人口建立模型。同一条 S 形曲线，也描述了疫症初期的传播、新科技的普及、自催化化学反应以及肿瘤的生长。它的离散时间版本，即逻辑斯谛映射（logistic map），表现却截然不同：它可以是混沌（chaotic）的，我们会在 Section 8.7 看到。

思维技巧

平衡点及其稳定性

对于方程 $x' = f(x)$，平衡点就是 f 的零点，而 f 在各零点之间的正负号，告诉你解会向哪个方向移动。

若 f 在某个平衡点由正变负，该平衡点是稳定的；若由负变正，则是不稳定的。画出 f 的图像，往往不必求解任何东西，便能回答最重要的问题。

延伸练习

1. **由低处出发。**在有收获且 $K^2 > L$ 的情况下，证明若 $x(0) < K - \alpha$，则种群数量会在有限时间内降至零。（提示：当 $y(0) < 0$ 时，y 会怎样变化？）

2. **过度收获。**若 $L > K^2$，设 $\beta = \sqrt{L - K^2}$。在 $x(0) = 2K$ 的条件下解 $x' = -(x - K)^2 - \beta^2$，并求种群数量何时降至零。

3. **按比例收获。**假设改为移走种群中某个固定的比例：$x' = (2K - x)x - hx$。求平衡点，并证明对所有 $h < 2K$，种群都能存活。为甚么这个方案较为安全？

4. **半程时间。**在没有收获的情况下，求种群数量达到 $\frac{3}{2}K$ 的时间。

延伸阅读

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 3 章讨论分岔，并以这个收获模型作为习题。
- **Nicholas Britton, *Essential Mathematical Biology***（Springer）。为大学本科生而写的种群模型。
- **Mark Kurlansky, *Cod: A Biography of the Fish That Changed the World***（Penguin）。鳕鱼渔业及其崩溃的历史。

8.4 盘旋趋向圆

题目

STEP III 2015，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/15-s3-q8`

引子

自然界中有许多系统，无论起始状态如何，最终都会进入同一种规律的节奏：心脏的跳动、蟋蟀的鸣叫、稳定拉奏的小提琴弦、捕食者与猎物的种群数量周期。稍加扰动，它们又会回到原来的节奏。用微分方程（differential equation）的语言来说，它们的解会趋近一条闭合曲线，称为**极限环**（limit cycle）。

这道题目正是要构造一个极限环。方程以 x 和 y 表示时看似无从入手，但换成极坐标（polar coordinates）后，就化简成可以求解的形式，而且各个解原来都会从内侧和外侧盘旋着贴近单位圆。当中的关键一步，是选取与问题的对称性（symmetry）相配的坐标，这也是本书一直沿用的手法。

动笔之前

想一想 两条方程其实都暗藏 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 和 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$ 这两个组合。它们在极坐标中是甚么？

由于 $r^2 = x^2 + y^2$，求导后得 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r$。另外 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r^2\,\mathrm{d}\theta$（这就是 Section 4.9 中的面积公式）。有了这两条恒等式（identity），变量代换（change of variables）几乎毫不费力：只要把方程改写成只含这两个组合的形式即可。

逐步解题

阶段 1　以极坐标处理第 (i) 部分

把方程写成 $(y+x)\,\mathrm{d}y-(y-x)\,\mathrm{d}x=0$，再重新整理：

$$(x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y)+(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=0.$$

> **想一想**　展开算式，验证以上的整理无误。然后运用上面两条恒等式。

$(y+x)\,\mathrm{d}y-(y-x)\,\mathrm{d}x=y\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}x$，正是上面的算式。化成极坐标形式就是 $r\,\mathrm{d}r+r^2\,\mathrm{d}\theta=0$，两边除以 $r^2\,\mathrm{d}\theta$（其中 $r>0$），得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}+r=0. \qquad \blacksquare$$

方程的解是 $r=Ce^{-\theta}$：这些是对数螺线（logarithmic spiral），随着 θ 增加而向原点卷入，随着 θ 减少而向无穷远处卷出。

阶段 2　第 (ii) 部分

> **停一停，试一试**　新方程是在旧方程之上，加入含有 $x^2+y^2=r^2$ 的额外项。用同样的方法改写，并求出 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$。

方程是 $\bigl(y+x-xr^2\bigr)\,\mathrm{d}y-\bigl(y-x-yr^2\bigr)\,\mathrm{d}x=0$，即

$$\bigl[(y+x)\,\mathrm{d}y-(y-x)\,\mathrm{d}x\bigr]-r^2\bigl(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x\bigr)=0.$$

第一个括号和之前一样，等于 $r\,\mathrm{d}r+r^2\,\mathrm{d}\theta$，第二个括号则是 $r^2\,\mathrm{d}\theta$。因此 $r\,\mathrm{d}r+r^2(1-r^2)\,\mathrm{d}\theta=0$，由此得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=r^3-r.$$

> **想一想**　这条方程对 r 而言并非线性（linear），但换成 $u=r^{-2}$ 后就变成线性。u 满足甚么方程？

设 $u=r^{-2}$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-2r^{-3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-2r^{-3}(r^3-r)=-2+2u$。所以 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}-2u=-2$，其解为 $u=1+Ae^{2\theta}$。因此

$$r^2=\frac{1}{1+Ae^{2\theta}}. \qquad \blacksquare$$

阶段 3　三类解

- $A = 0$：$r = 1$。单位圆是一个解。
- $A > 0$：恒有 $r < 1$。当 $\theta \to -\infty$ 时，$r \to 1$；当 $\theta \to +\infty$ 时，$r \to 0$。曲线在圆与原点之间盘旋。
- $A < 0$：$r > 1$，而且公式只在 $1 + Ae^{2\theta} > 0$ 时才有意义，即 $\theta < \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1}{A}\right)$。当 $\theta \to -\infty$ 时，$r \to 1$；当 θ 趋近该上界时，$r \to \infty$。曲线在圆与无穷远之间盘旋。

所以当 $\theta \to -\infty$ 时，每条解曲线都会从内侧或外侧趋近单位圆（图 8.4.1）。

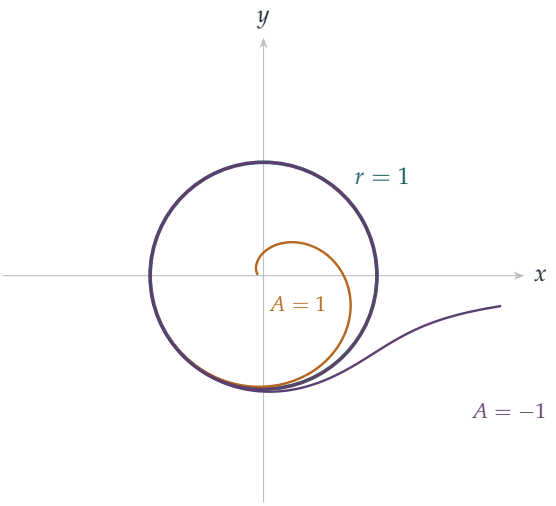


图 8.4.1 第 (ii) 部分的解。单位圆（蓝绿色）是一个解。$A = 1$ 的解（琥珀色）位于圆内，从圆出发（当 $\theta \to -\infty$ 时）盘旋着走向原点；$A = -1$ 的解（紫红色）位于圆外，从圆出发盘旋着走向无穷远。反方向来看（θ 递减），每个解都会缠绕到圆上：这就是极限环。

回顾

- **善用对称性。**这些方程对所有方向一视同仁，而极坐标令这一点显露出来。
- **认出标准组合。**$x\,dx + y\,dy = r\,dr$ 和 $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$ 完成了大部分工作。
- **代换可使方程线性化。**非线性方程 $r' = r^3 - r$ 换成 $u = r^{-2}$ 后变成线性（这是一条*伯努利方程*（Bernoulli equation））。

背后的数学

极限环

庞加莱（Henri Poincaré）在 1880 年代研究平面上微分方程的定性行为时，引入了极限环。不妨把题目中的方程理解为描述一个点在平面上运动的路径。单位圆是一条孤立的闭轨道（closed orbit），附近的每条轨道都会缠绕着向它靠近（或远离它，视乎时间的方向而定）。1926 年，荷兰工程师 Balthasar van der Pol 在一个装有真空管的电路中发现了极限环，并提出类似的方程可以描述心脏的跳动。凡是具有自持而稳定节奏的系统，都可以用极限环作为模型：生理时钟、神经脉冲、捕食者与猎物种群数量的周期。

平面上没有混沌

庞加莱—本迪克松定理（Poincaré–Bendixson theorem）指出，对于平面上的光滑系统，如果一条轨道一直留在某个有界区域内，又不趋近任何平衡点（equilibrium），它就必定趋近一条闭轨道。所以在二维的情况下，长期行为只限于平衡点和环：混沌（chaos）没有容身之处，因为轨道不能相交。混沌至少需要三维，正如洛伦兹（Edward Lorenz）在 1963 年以他那著名的三变量对流模型（“蝴蝶”）所发现的那样。至于离散时间的情况，我们会在 Section 8.7 看到，即使只有一维，混沌也可能出现。

一个未解决的问题

1900 年，希尔伯特（David Hilbert）在他的第十六问题中问道：当 P 和 Q 是 n 次多项式时，系统 $x' = P(x, y)$，$y' = Q(x, y)$ 最多可以有多少个极限环？即使是 $n = 2$ 的情况，答案至今仍然未知：已知有些系统具有四个极限环，但是否可能有更多，则无人知晓。在希尔伯特的问题之中，这是极少数至今仍然完全悬而未决的一个。

思维技巧

转换坐标以配合对称性

如果问题具有旋转对称性，就用极坐标；如果具有其他对称性，就找出与之相配的坐标。

合适的坐标把一条难以处理的方程变成可分离变量（separable）的方程，并令解的几何形状（圆和螺线）一目了然。

延伸练习

1 **螺线。**对于第 (i) 部分的解 $r = e^{-\theta}$，证明曲线与每条由原点出发的射线都以相同的角度 45° 相交。（这就是对数螺线又称为等角螺线（equiangular spiral）的原因。）

2 **极坐标恒等式。**证明 $x\,dx + y\,dy = r\,dr$ 和 $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$。

3 **随时间变化的系统。**考虑系统 $\dot{r} = r(1 - r^2)$，$\dot{\theta} = 1$。证明当 $t \to \infty$ 时，每个满足 $r(0) > 0$ 的解都趋近单位圆。把这个系统以 x 和 y 表示。

4 **两个环。**找出一个形如 $\dot{r} = f(r)$，$\dot{\theta} = 1$ 的系统，使它有两个极限环，分别位于 $r = 1$ 和 $r = 2$，其中一个是吸引的（attracting），另一个是排斥的（repelling）。

延伸阅读

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。第 7 章讲述极限环和庞加莱–本迪克松定理。
- **Steven Strogatz, *Sync***（Hyperion）。一本讲述自然界中的节奏与同步现象的科普读物。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***（Penguin）。讲述洛伦兹与发现混沌的故事。

8.5 格力犬追逐格力犬

题目

STEP III 1988，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/88-s3-q10`

引子

四只狗分别站在一块正方形田地的四个角上，每只狗都追赶牠左边的那一只。牠们会在哪里相遇？要花多少时间？所走的路径又是怎样的？这些路径是优美的螺线，绕着中心转无穷多圈，然而每只狗只跑了有限的距离，恰好等于正方形的边长。

这是一个*追逐问题*（pursuit problem），这类问题最早由 Pierre Bouguer 于 1732 年研究，当时考虑的是一艘船追赶海盗船的情形。令问题得以解决的诀窍是对称性（symmetry）：发生在一只狗身上的事，同样发生在其余各只身上，所以四只狗始终构成一个正方形。一旦看出这一点，微分方程（differential equation）几乎就自然而然地写出来了。

动笔之前

? **想一想** 根据对称性，四只狗在每一刻构成甚么形状？它的中心在哪里？

把整个情形绕正方形的中心旋转四分之一圈（即 $A \to B \to C \to D \to A$），情形保持不变，所以四只狗始终构成一个正方形，而且中心始终是同一点 O。这个正方形一边旋转一边缩小，但始终是正方形。特别地，A 和 B 与 O 的距离始终同为 r，而 OB 始终比 OA 超前四分之一圈。

逐步解题

阶段 1　运动的方向

想一想　A 朝着 B 跑。在三角形 OAB 中，AB 与 AO（指向中心的方向）所成的角是多少？

三角形 OAB 中 $OA = OB$，且在 O 处是直角，所以其余两个角都是 45°。因此 A 的速度（velocity）大小为 v，方向与向内的径向（radial）方向成 45°，并且偏向 B 的一方，即 θ 增加的方向（假设我们标记角度时，令 B 位于 A 的逆时针方向）。

阶段 2　微分方程

想一想　把 A 的速度分解为径向和横向（transverse）两部分。在极坐标（polar coordinates）中，径向速度是 $\dot{r}$，横向速度是 $r\dot{\theta}$。

径向分量（向内）是 $v\cos 45°$，横向分量是 $v\sin 45°$，所以

$$\dot{r} = -\frac{v}{\sqrt{2}}, \qquad r\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

两式相除，得 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -r$，所以 $r = \lambda e^{-\theta}$，其中若最初 $\theta = 0$，则 λ 是最初与中心的距离。 ■

阶段 3　n 只狗

停一停，试一试　对于正 n 边形，三角形 OAB 中在 O 处的角是多少？AB 与 AO 所成的角是多少？重复第 2 阶段的做法。

在 O 处的角是 $\frac{2\pi}{n}$，所以两个相等的底角是 $\frac{1}{2}(\pi - \frac{2\pi}{n}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$。速度与向内的半径所成的角就是这个角，所以

$$\dot{r} = -v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = -v\sin\frac{\pi}{n}, \qquad r\dot{\theta} = v\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = v\cos\frac{\pi}{n}.$$

因此 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r\tan\dfrac{\pi}{n}$，于是

$$r = \lambda e^{-\theta\tan(\pi/n)}.$$ ■

当 $n = 4$ 时，$\tan\frac{\pi}{4} = 1$，这就回到正方形的情形。

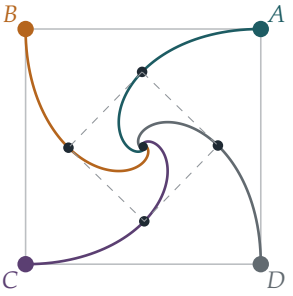


图 8.5.1 四只狗从正方形的四个角出发互相追逐。每只狗都沿着一条对数螺线 $r = \lambda e^{-\theta}$（相对于牠自己的起始方向）前进，绕着中心转无穷多圈。在每一刻，四只狗都构成一个正方形（虚线所示为其中一个中间时刻），这个正方形一边旋转一边缩小，直至牠们在中心相遇。

回顾

- **对称性把多个物体化为一个。**四只互相影响的狗，变成了一个遵从简单法则的质点（particle），因为整个布局始终是正方形。
- **绕中心的运动宜用极坐标。**速度的径向和横向分量 $\dot{r}$ 和 $r\dot{\theta}$ 直接给出了方程。
- **相除以消去时间。**比值 $\dot{r}/\dot{\theta}$ 给出了路径的形状，而毋须知道何时到达每一点。

背后的数学

无穷多圈，有限距离

径向速率 $\dot{r} = -v\sin\frac{\pi}{n}$ 是常数，所以各只狗在时间 $T = \frac{r_0}{v\sin(\pi/n)}$ 之后到达中心，每只狗跑过的距离是 $vT = \frac{r_0}{\sin(\pi/n)}$。对于边长为 s 的正 n 边形，$r_0 = \frac{s}{2\sin(\pi/n)}$，所以每只狗跑过的距离是

$$\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}.$$

对于四只狗，这恰好是 s：每只狗跑过的距离正好是一条边的长度。（这里有一个巧妙的看法：B 的速度始终与 AB 垂直，所以它不会改变距离 AB；只有 A 以速率 v 沿着 AB 笔直前进的运动才会缩短两者的距离，而这个距离最初是 s。）对于三只狗，距离是 $\frac{2}{3}s$；对于六只狗，距离是 $2s$。然而在每一种情形下，螺线都绕着中心转无穷多圈，因为当 $r \to 0$ 时 $\theta \to \infty$。一条长度有限却转了无穷多圈的曲线并不是悖论：那些圈缩小得足够快。

对数螺线

曲线 $r = \lambda e^{-k\theta}$ 称为对数螺线（logarithmic spiral）或等角螺线（equiangular spiral）：它与每一条从中心出发的射线相交的角度都相同。它出现在大自然之中，例如鹦鹉螺的壳和某些星系的旋臂，因为保持形状不变的生长就会产生这种曲线。雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli）对它极为着迷，甚至要求把它刻在自己的墓碑上，并附上格言 *Eadem mutata resurgo*（“纵然改变，我仍将依旧复起”），指的是它在任何尺度下看起来都一样。结果石匠刻的却是一条阿基米德螺线（Archimedean spiral）。

实际中的追逐

“纯追逐”（pure pursuit），即始终笔直朝着目标前进，是导弹或捕食者最简单的导引法则。但它并不是最好的：朝着目标将会到达的位置前进（“比例导引”，proportional navigation）更有效率，而现代导弹以及某些捕食者（例如蜻蜓和隼）实际上正是这样做的。追逐与逃避的数学在二十世纪自成一门学科，名为微分博弈（differential games）。

思维技巧

利用对称性简化多体问题

如果一个系统具有对称性，而其法则又不破坏这种对称性，那么对称性就会一直保持下去，你只需追踪其中一部分。

这个想法能解决力学和动力学中的许多问题；它是对称与守恒（conservation）之间深刻联系的一个简单例子。

延伸练习

1. **巧妙的论证。**仔细解释为何在四只狗的问题中，距离 AB 恰好以速率 v 减少，并由此推出四只狗在时间 s/v 之后相遇。

2. **三只狗。**三只狗从边长为 s 的等边三角形的三个角出发。求每条路径的方程、牠们相遇所需的时间，以及每只狗跑过的距离。

3. **转了多少圈？**设四只狗出发时距离中心 100 m，牠们转了完整一圈之后距离中心多近？转了多少个完整的圈之后，牠们与中心的距离在 1 mm 以内？

4. **两只狗。**当 $n = 2$（两只狗面对面）时会怎样？公式是否仍然有意义？

延伸阅读

- **Paul Nahin, *Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion***（Princeton University Press）。关于追逐曲线的一切，从 Bouguer 到导弹。
- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。内容包括对数螺线和伯努利的墓碑。
- **D'Arcy Thompson, *On Growth and Form***（Cambridge University Press）。讲述大自然中的数学的经典著作，包括螺线式的生长。

8.6 量子振子

题目

STEP III 1988，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/88-s3-q7`

引子

系在弹簧上的质点，振动的能量可以随你喜欢：把它拉开少许也好，拉开很远也好。但在 1900 年，普朗克（Max Planck）发现，要解释高温物体所发出的光的颜色，唯一的办法是假定振动中的原子只能具有某些特定的能量，每级相差一个固定的大小。在原子的尺度上，能量是一份一份的，称为量子（quanta）。二十五年后，量子力学（quantum mechanics）解释了个中原因。

这道题目正包含了这个解释。题中的微分方程（differential equation）经过单位转换后，就是一个量子粒子处于弹簧式势能中的薛定谔方程（Schrödinger equation），亦即量子谐振子（quantum harmonic oscillator）。只有当能量取某些特殊的值时，它才有性质良好的解，即在无穷远处衰减至零的解；这些能量值以 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 标记，彼此等距排列。而且不同的 n 所对应的解是正交（orthogonal）的：它们乘积的积分为零，就像傅里叶级数（Fourier series）中的 $\sin mx$ 与 $\sin nx$ 一样。量子谐振子是研究分子、固体和光的物理学的起点。

动笔之前

想一想 为甚么像 $e^{-\lambda x^2}$ 这样的函数会是一个合理的猜测？当 $x \to \pm\infty$ 时，$e^{-\lambda x^2}$ 及其导数会怎样？

当 $|x|$ 很大时，方程主要由 $y'' \approx \omega^2 x^2 y$ 支配，而高斯函数（Gaussian）$e^{-\lambda x^2}$ 在 x 很大时满足 $y'' \approx 4\lambda^2 x^2 y$，只要 $4\lambda^2 = \omega^2$，两者便吻合。若 $\lambda > 0$，高斯函数及其所有导数衰减至 0 的速度比 x 的任何次幂都要快。因此边界条件（boundary conditions）会自动

成立；真正要下工夫的，是令函数符合方程。

逐步解题

阶段 1　基态

> **想一想**　把 $y_0 = e^{-\lambda x^2}$ 求导两次，代入 $n=0$ 时的方程，然后比较 x^2 的系数和常数项。

$y_0' = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$，而 $y_0'' = (4\lambda^2 x^2 - 2\lambda)e^{-\lambda x^2}$。$n=0$ 时的方程要求

$$4\lambda^2 x^2 - 2\lambda - \omega^2 x^2 = -\omega$$

对所有 x 成立。比较系数（match coefficients）：$4\lambda^2 = \omega^2$ 及 $2\lambda = \omega$。取 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ 时两式同时成立（取 $\lambda > 0$，使得 $y_0 \to 0$）。而且当 $x \to \pm\infty$ 时，y_0、$y_0' \to 0$。 ■

阶段 2　第一激发态

$y_1 = x e^{-\lambda x^2}$ 满足 $y_1' = (1 - 2\lambda x^2)e^{-\lambda x^2}$ 及 $y_1'' = (4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x)e^{-\lambda x^2}$。$n=1$ 时的方程要求

$$4\lambda^2 x^3 - 6\lambda x - \omega^2 x^3 = -3\omega x,$$

而同样取 $\lambda = \tfrac{\omega}{2}$ 时此式成立。y_1 与 y_1' 同样在 $\pm\infty$ 处衰减至零。 ■

阶段 3　一个恒等式

> **想一想**　用积法则（product rule）对 $y_m y_n' - y_n y_m'$ 求导。四项之中有两项互相抵销。然后利用微分方程代换 y_n'' 和 y_m''。

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_m y_n' - y_n y_m') = y_m' y_n' + y_m y_n'' - y_n' y_m' - y_n y_m'' = y_m y_n'' - y_n y_m''$。由方程可得 $y_n'' = (\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega) y_n$，对 m 亦有类似的式子。所以

$$y_m y_n'' - y_n y_m'' = y_m y_n [\omega^2 x^2 - (2n+1)\omega - \omega^2 x^2 + (2m+1)\omega] = 2(m-n)\omega y_m y_n.$$ ■

阶段 4　正交性

> **停一停，试一试**　把恒等式由 $-\infty$ 积分至 ∞。左方是甚么？

左方积分后得 $\big[y_m y_n' - y_n y_m'\big]_{-\infty}^{\infty} = 0 - 0 = 0$，因为每个 y 和 y' 在两端都趋向 0。所以

$2(m-n)\omega\int_{-\infty}^{\infty} y_m y_n\,\mathrm{d}x = 0$，而由于 $m \neq n$ 及 $\omega > 0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \blacksquare$$

对于 y_0 和 y_1，这一点很容易直接看出：$y_0 y_1 = xe^{-\omega x^2}$ 是奇函数（odd function）。但这个恒等式毋须知道函数本身是甚么，便一举证明了每一对解都正交。

回顾

- **比较系数。**代入猜测的形式，并要求方程对所有 x 成立，便确定了 λ。
- **朗斯基行列式（Wronskian）的技巧。**$y_m y_n' - y_n y_m'$ 这个组合求导后，其中的二阶导数可以用方程代换，余下的式子十分简单。
- **边界条件消去边界项。**解在无穷远处衰减，令左方积分后为零，从而得出正交性。

背后的数学

薛定谔方程

1926 年，薛定谔（Erwin Schrödinger）提出，量子粒子可用*波函数*（wave function）$\psi(x)$ 来描述；若粒子的能量为 E，并处于势能 $V(x)$ 之中，则波函数满足

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

对于弹簧，$V(x) = \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2$，把 x 重新标度后，这正是题目中的方程，其中 $E = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\Omega$。物理上要求 ψ 在无穷远处衰减至零（这样粒子才确实身处某处），而只有这些能量才能满足这个要求：这就是*量子化*（quantisation），是由数学自然推导出来的结果。留意最低的能量并不是零，而是 $\frac{1}{2}\hbar\Omega$：量子谐振子永远不可能完全静止。这种*零点能*（zero-point energy）真实存在，而且可以量度；正因如此，液态氦在常压下即使到了绝对零度也不会凝固。

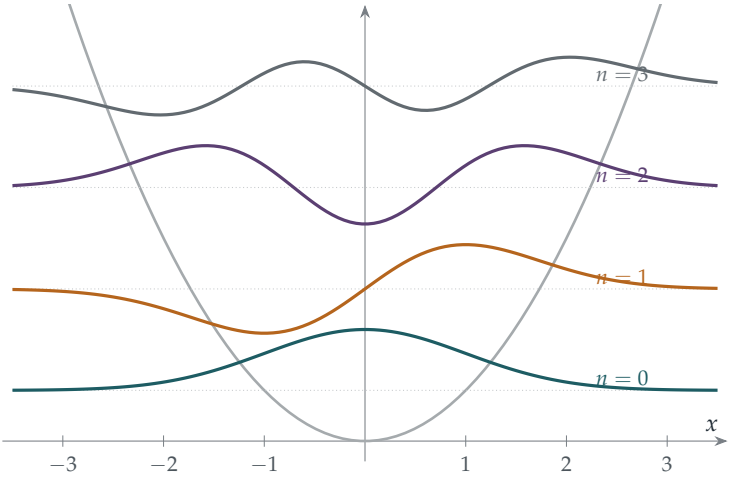


图 8.6.1　量子谐振子（取 $\omega = 1$）。抛物线是势能。每个波函数 y_n 都画在其能级 $n + \frac{1}{2}$ 的高度上；各能级等距排列，而最低的能级高于零。函数 y_n 穿过零 n 次，而且其中任意两个都正交。

埃尔米特函数与施图姆－刘维尔理论

通解为 $y_n = H_n(\sqrt{\omega}x)e^{-\omega x^2/2}$，其中 H_n 是一个 n 次多项式，称为*埃尔米特多项式*（Hermite polynomial）（图 8.6.1）。正交性并非这条方程独有。只要一条方程可以写成 $(py')' + qy = -\lambda wy$ 并配上适当的边界条件，属于不同 λ 值的解便互相正交，所用的论证与第 4 阶段完全相同。这就是*施图姆－刘维尔理论*（Sturm–Liouville theory，1830 年代），它涵盖了傅里叶级数中的正弦函数（Section 3.7）、鼓面的振动、静电学中的勒让德多项式（Legendre polynomials），以及氢原子的波函数。Section 4.7 的特征值问题（eigenvalue problem）是另一个例子：在那里求得的临界值就是特征值 λ，而那些正交函数就是系统固有的“模态”（modes）。

思维技巧

由恒等式得出正交性

要证明相关方程的两个解正交，可找出一个恰当导数（exact derivative），使它的积分因边界条件而为零，而它本身又等于两个解的乘积的某个倍数。

这比直接计算积分有力得多：它一次过适用于每一对解，即使你无法把解写出来也行。

延伸练习

1 **下一个态。**证明 $y_2 = (4\lambda x^2 - 1)e^{-\lambda x^2}$（其中 $\lambda = \frac{\omega}{2}$）满足 $n = 2$ 时的方程。利用 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/\omega}$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\pi/\omega}$，直接验证 $\int_{-\infty}^{\infty} y_0 y_2\,\mathrm{d}x = 0$。

2 **没有其他能量。**把 n 换成一般的数 ν，并尝试 $y = e^{-\lambda x^2}$。证明只有当 $\nu = 0$ 时它才是解。（事实上，只有当 ν 是非负整数时，才存在衰减的解。）

3 **正弦波。**由 $y'' = -n^2 y$ 及 $y(0) = y(\pi) = 0$ 出发，用同样的方法证明当 $m \neq n$ 时 $\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$。

4 **阶梯。**证明若 y_n 是方程的解，则 $y_{n+1} = \omega x y_n - y_n'$ 是把 n 换成 $n+1$ 后的方程的解。利用这个结果，由 y_0 生成 y_1 和 y_2。（这就是量子力学中的“升算符”（raising operator）。）

延伸阅读

- **David Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics***（Cambridge University Press）。大学本科物理的标准教科书；第 2 章讨论谐振子。
- **费曼（Richard Feynman）, *QED: The Strange Theory of Light and Matter***（Princeton University Press）。由量子力学的一位大师撰写的科普读物。
- **Mary Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences***（Wiley）。为数学和物理学生讲解埃尔米特多项式和施图姆－刘维尔理论。

8.7 可以解出的混沌

题目

STEP I 2014，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/14-s1-q6`

引子

规则 $u_{n+1} = ku_n(1-u_n)$ 称为*逻辑斯谛映射*（logistic map），是描述资源有限的种群的最简单模型：u_n 是第 n 年的种群数量占环境所能承载的最大数量的比例，k 是繁殖率，而因子 $1-u_n$ 则代表过度拥挤的影响。1976 年，生物学家罗伯特·梅（Robert May）在《自然》（*Nature*）上发表了一篇短文，题为“Simple mathematical models with very complicated dynamics”（动力学行为非常复杂的简单数学模型）。他指出，当 k 逐渐增大至 4 时，这条只有一行的规则会由趋于稳定，变为来回振荡，再变为看似完全随机。它成为了混沌（chaos）理论的奠基例子之一。

混沌系统通常无法求解：u_n 没有公式，要求出 u_{100}，唯一的方法就是把它之前的各项逐一算出来。本题找到的正是那个例外。在 $k=4$ 这个最混沌的取值上，公式确实存在，而且它恰好解释了这个数列为何无法预测。

动笔之前

想一想 你以前在哪里见过 $4s(1-s)$ 这个式子，其中 $s=\sin^2\theta$？哪一条恒等式把 $\sin^2\theta$、$\cos^2\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 联系起来？

若 $s=\sin^2\theta$，则 $1-s=\cos^2\theta$，所以 $4s(1-s) = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta$。映射 $s \mapsto 4s(1-s)$ 其实就是乔装了的倍角公式（double-angle formula）。

逐步解题

阶段 1　猜出规律

设 $u_0 = \sin^2\theta$，由上面的恒等式可得

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2 2\theta, \qquad u_2 = 4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

> **想一想**　每一步之后，角度有甚么变化？你对 u_n 有甚么猜想？

角度每次都加倍，所以我们猜想（conjecture）$u_n = \sin^2(2^n\theta)$。

阶段 2　证明猜想

> **想一想**　一个数列由“从一项到下一项”的规则定义，而我们要证明的命题涉及数列的每一项。哪一种证明方法最合适？

归纳法（induction）。命题在 $n = 0$ 时成立，因为 $u_0 = \sin^2\theta = \sin^2(2^0\theta)$。假设对某个 n 有 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，则

$$u_{n+1} = 4\sin^2(2^n\theta)\bigl(1 - \sin^2(2^n\theta)\bigr) = \bigl(2\sin(2^n\theta)\cos(2^n\theta)\bigr)^2 = \sin^2(2^{n+1}\theta),$$

这正是 $n+1$ 时的命题。所以对所有 $n \geq 0$，都有 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$。 ■

留意 $[0,1]$ 内的每一个初始值 u 都可以写成 $\sin^2\theta$（取 $\theta = \arcsin\sqrt{u}$），所以对于 $[0,1]$ 内的任何初始值，这个公式都解出了 $k = 4$ 的逻辑斯谛映射。

阶段 3　变量代换

> **想一想**　把 $v_n = \alpha u_n + \beta$ 代入 v_{n+1} 的规则。你需要结果是 $u_{n+1} = 4u_n - 4u_n^2$。这会给出多少个条件？你又有多少个未知数？

代入后得

$$\alpha u_{n+1} + \beta = -p(\alpha u_n + \beta)^2 + q(\alpha u_n + \beta) + r,$$

所以

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q - 2p\beta)\, u_n + \frac{-p\beta^2 + q\beta + r - \beta}{\alpha}.$$

要使它等于 $4u_n - 4u_n^2$，需要满足三个条件：

$$p\alpha = 4, \qquad q - 2p\beta = 4, \qquad -p\beta^2 + (q-1)\beta + r = 0.$$

头两个条件确定了 $\alpha = 4/p$ 和 $\beta = (q-4)/(2p)$。这时已经没有未知数剩下，所以第三条方程是对 p、q 和 r 的一个真正的条件。代入 β 并乘以 $4p$，得

$$-(q-4)^2 + 2(q-1)(q-4) + 4pr = 0,$$

展开后得 $-(q^2-8q+16) + (2q^2-10q+8) + 4pr = 0$，即 $q^2 - 2q - 8 + 4pr = 0$，亦即

$$4pr = 8 + 2q - q^2. \qquad \blacksquare$$

> **停一停，试一试** 三条方程，却只有两个未知数：这就是出现条件的原因。你能否在未计算之前，就看出为甚么一般的二次映射不应该总是与 $(*)$ 等价？（想想线性的变量代换能改变甚么，又不能改变甚么。）

阶段 4 例子

对于 $v_{n+1} = -v_n^2 + 2v_n + 2$，我们有 $p = 1$、$q = 2$、$r = 2$，而 $4pr = 8 = 8 + 4 - 4$，所以条件成立。于是 $\alpha = 4$ 及 $\beta = -1$，所以 $v_n = 4u_n - 1$，其中 u_n 满足 $(*)$。由于 $v_0 = 1$，故 $u_0 = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$，所以

$$u_n = \sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right), \qquad v_n = 4\sin^2\!\left(\frac{2^n\pi}{4}\right) - 1 = 1 - 2\cos\!\left(\frac{2^n\pi}{2}\right).$$

由此得 $v_0 = 1$、$v_1 = 3$，而对所有 $n \geq 2$ 都有 $v_n = -1$。（直接验算：$-1+2+2 = 3$，然后 $-9+6+2 = -1$，再然后 $-1-2+2 = -1$。） $\blacksquare$

这个初始值是特意选定的，好让角度落在 π 的倍数上，数列从此不再变化。这样一来，有趣的部分就被掩盖了，而那正是接下来要谈的。

回顾

- **识破乔装。**一旦写成 $s = \sin^2\theta$，映射 $s \mapsto 4s(1-s)$ 就变成了角度加倍。
- **先猜想，再用归纳法证明。**头两项提示了规律，归纳法则证明了它。
- **数一数方程和未知数。**线性代换有两个自由参数，二次式有三个系数，所以必定剩下一个条件。

背后的数学

数列为何无法预测

公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ 看来已是故事的结局：任何一项都可以直接算出。但请细看它说了甚么。由于 $\sin^2$ 的周期（period）是 π，所以只有 $2^n\theta$ 模（modulo）π 的值才有影响。设

$\theta = \pi x$，其中 $0 \le x < 1$，并把 x 写成二进制（binary）：

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots \quad (\text{底为}2).$$

乘以 2 会把二进制小数点向右移一位，而把结果取模 1，就是丢掉越过小数点的那个数位。所以 u_n 只取决于 x 由 b_{n+1} 起的二进制数位。逻辑斯谛映射每走一步，就多读取初始值的一个数位，同时丢掉最前面的一个。

这就是*对初始条件的敏感依赖*（sensitive dependence on initial conditions），也是混沌的决定性特征。两个初始值若在首 20 个二进制位上相同（约六个小数位），它们产生的数列一般会在大约 20 步之内吻合，其后便毫无关系（图 8.7.1）。要预测 u_{100}，你需要知道 u_0 准确至 100 个二进制位。初始角度的任何误差，无论多小，每一步都会加倍。（种群数量 u 本身的误差并非每次都以完全相同的倍数增长，因为这个映射对 $[0,1]$ 某些部分的拉伸比其他部分大，但平均而言，它的增长率是一样的。）公式帮不上忙：它只是令这个机制显现出来。

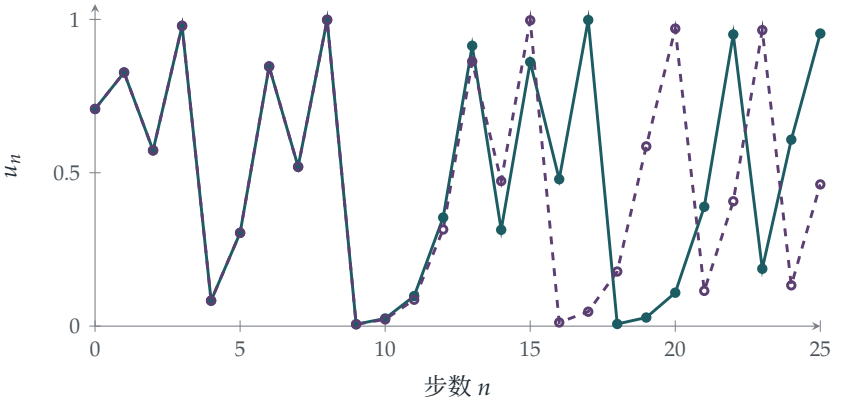


图 8.7.1　$k = 4$ 的逻辑斯谛映射的两个数列，分别由 $\sin^2(1)$（蓝绿色）和 $\sin^2(1.00001)$（紫红色虚线）开始。在大约头十步内两者无法分辨，到第 12 步已有明显差别，其后便毫无关系：到第 12 步，角度之差 10^{-5} 已经加倍了十二次，变成约 $2^{12} \times 10^{-5} \approx 0.04$。

周期点无处不在

这个公式还能找出映射的每一个循环（cycle）。数列在 N 步之后回到初始值，当且仅当 $\sin^2(2^N\theta) = \sin^2\theta$，即 $2^N\theta \equiv \pm\theta \pmod{\pi}$。所以 $\theta = m\pi/(2^N - 1)$ 或 $\theta = m\pi/(2^N + 1)$ 给出一个周期整除 N 的点。例如 $\theta = \pi/5$ 满足 $4\theta \equiv -\theta$，所以 $\sin^2\frac{\pi}{5} \to \sin^2\frac{2\pi}{5} \to \sin^2\frac{4\pi}{5} = \sin^2\frac{\pi}{5}$ 是一个 2-循环。每一个周期都有对应的周期点（periodic point），而且它们在 $[0,1]$ 中稠密（dense）：在每一个区间内，无论多小，都有一个初始值使数列重复出现。然而每一个周期点都是不稳定的，因为任何误差都会加倍。稠密的周期点，却把附近的一切都推开，这是混沌的第二个标志。

通往混沌之路

对于较小的 k，并没有公式可用，而数列的行为会随 k 剧烈变化（图 8.7.2）。当 $1 < k < 3$ 时，每一个由 $(0,1)$ 内出发的数列都会趋于不动点（fixed point）$1 - 1/k$。在 $k = 3$ 时，不动点变得不稳定，由一个 2-循环取而代之（这是 STEP II 2002 Q5 的主题；见延伸练习）。在 $k = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ 时，2-循环让位予 4-循环，然后是 8-循环，周期加倍来得愈来愈快，直至 $k \approx 3.5699$ 时，循环的长度变成无限，混沌由此开始。在混沌区域之内还有一些有序的窗口：最明显的一个在 $k = 3.83$ 附近，其中有一个 3-循环，那是 Section 8.8 的主题。

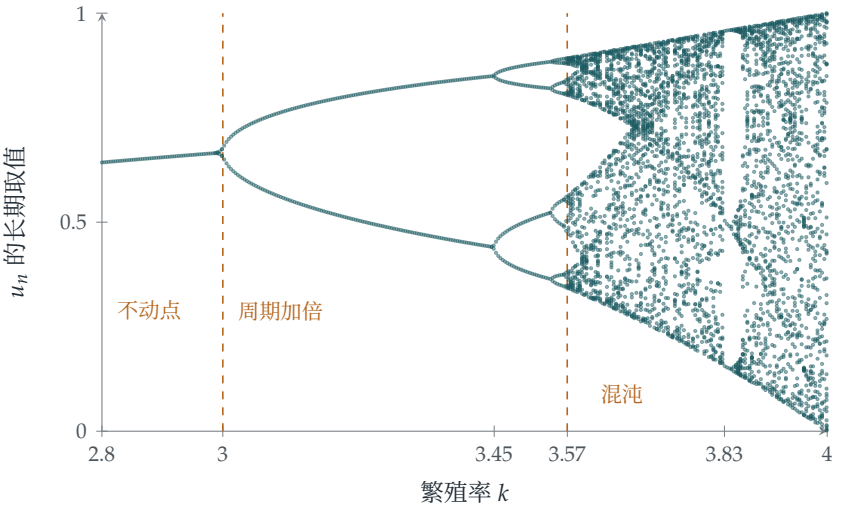


图 8.7.2 逻辑斯谛映射的分岔图（bifurcation diagram）。对每一个 k，由 $u_0 = 0.31416$ 开始把映射迭代 300 次，然后画出其后的 40 个值。单一个不动点在 $k = 3$ 时分裂成一个 2-循环，然后是 4、8、...，直至在 $k = 3.57$ 附近进入混沌。$k = 3.83$ 附近那道浅色的垂直空隙，就是含有稳定 3-循环的窗口。在 $k = 4$ 时，这些值填满了整个 $[0,1]$。

费根鲍姆常数

1975 年，费根鲍姆（Mitchell Feigenbaum）在洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）工作时，用一部可编程的袖珍计算机，量度了周期加倍时的各个 k 值：$k_1 = 3$、$k_2 \approx 3.4495$、$k_3 \approx 3.5441$、$k_4 \approx 3.5644$、...。他留意到这些间距以一个固定的倍数缩小，

$$\frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} \to 4.6692\ldots,$$

然后更令人惊讶地发现，同一个数 4.6692... 也出现在 $x \mapsto k\sin(\pi x)$ 之中，以及其他所有只有单一个峰、而峰顶像抛物线般圆滑（即二次极大值，quadratic maximum）的光

滑映射之中。这个常数对这一整类映射是*普适*（universal）的；至于峰顶较平坦的映射，例如形状像 $-x^4$ 的那种，则各有自己的普适常数。其后，人们在滴水的水龙头、受热的流体和电子电路的实验中都量度到这个常数。要解释个中原因，需要借用相变（phase transition）物理学的想法，而严格的证明要到 1982 年才由 Oscar Lanford 借助电脑完成。

同一招，用三次

第 (ii) 部分的代换是*共轭*（conjugacy）的一个例子：若一个变量代换能把一个映射变成另一个，这两个映射便称为共轭，而它们的动力学行为完全相同。本题证明了每一个满足该条件的二次映射，都与 $k = 4$ 的逻辑斯谛映射共轭，而后者又通过 $u = \sin^2\theta$，成为乔装了的角度加倍。（严格来说，最后这一环是*半共轭*（semiconjugacy）：θ 和 $\pi - \theta$ 给出相同的 u，所以这个变量代换并非一对一（one-to-one）。逻辑斯谛映射真正共轭的对象是*帐篷映射*（tent map），即当 $t \le \frac{1}{2}$ 时 $t \mapsto 2t$、当 $t \ge \frac{1}{2}$ 时 $t \mapsto 2 - 2t$，所用的代换是 $u = \sin^2\frac{\pi t}{2}$，它在 $[0,1]$ 上是一对一的。）在 Section 2.8 中，你遇过 $x \mapsto x^2 - 2$，它由 $x = 2\cos\theta$ 解出，角度每一步加倍；它同样满足该条件（不妨试试）。所以这些全都是同一个映射的不同乔装。在 Section 8.8 中，这个家族的第三位成员将会登场：一个由直线构成的映射，即*帐篷映射*。

思维技巧

> **变量代换，看清结构**
>
> *一个好的代换可以把复杂的规则变成简单的规则。设法找出一个变量代换，把问题变成你已经明白的问题。*
>
> 在这里，$u = \sin^2\theta$ 把一个二次映射变成了角度加倍，而一个线性代换则把一整族二次式归结为一个。在大学里，共轭是一件核心工具：在动力系统（dynamical systems）中，在线性代数中（把矩阵对角化，就是选取一组令它变得简单的坐标），以及在群论中，都是如此。

延伸练习

1 **逻辑斯谛映射的循环。**试做 STEP II 2002，第 5 题（`step.maths.org/questions/02-s2-q5`）。然后证明只有当 $k > 3$ 时才存在 2-循环。

2 **平方减二。**证明 $v_{n+1} = v_n^2 - 2$ 满足第 (ii) 部分的条件（把它写成 $-pv_n^2 + qv_n + r$，其中 $p = -1$）。求 α 和 β，并验证你的答案与 $v_n = 2\cos(2^n\phi)$ 一致。

3 **一个 3-循环。**利用公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，求 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ 的一个 3-循环。（提示：试试 $\theta = \pi/7$，或 $\theta = \pi/9$。）周期恰好为 3 的点有多少个?

4 **丢失数位。**电脑储存数字时，大约准确至 53 个二进制位。如果你在电脑上迭代 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$，大约多少步之后，计算出来的值便与真正的数列毫无关系？到那时，计算出来的数列是否就没有用处?

延伸阅读

- **Robert May，“Simple mathematical models with very complicated dynamics”**，*Nature* 261 (1976)。经典之作，至今仍然十分易读。
- **James Gleick，*Chaos: Making a New Science***（Penguin）。讲述梅、费根鲍姆以及混沌被发现的故事。
- **Steven Strogatz，*Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press），第 10 章。一维映射、逻辑斯谛映射和费根鲍姆常数，程度相当于大学一年级。
- **Ian Stewart，*Does God Play Dice?***（Penguin）。一本介绍混沌的科普读物，其中有一章对逻辑斯谛映射讲解得很好。

8.8 周期三蕴含混沌

题目

STEP III 2025，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip`

引子

1975 年，李天岩（Tien-Yien Li）与约克（James Yorke）在《美国数学月刊》（*American Mathematical Monthly*）发表了一篇论文，题目是数学史上最著名的标题之一：“Period three implies chaos”（周期三蕴涵混沌）。他们证明了：如果一个由区间映到自身的连续函数（continuous function）有一个周期（period）为 3 的点（即一个恰好经过三步后返回原处的起始值），那么它就有*任何*周期的点：1、2、4、5、17、1000，无一例外。这篇论文亦把“混沌”（chaos）一词带进了数学。

这道 2025 年的题目，正是让你亲手走一遍这个定理。函数 $\mathrm{f}(x) = 7 - 2|x|$ 由两条直线组成，所以一切都可以精确计算。你会找出它的 2-循环（cycle）和 3-循环，并在过程中看到为甚么其中一种循环存在，就迫使其余的循环也必然存在。

动笔之前

想一想 $y = 7 - 2|x|$ 的图像是甚么样子的？它在哪里与直线 $y = x$ 相交？它把区间 $[-7, 7]$ 送到哪里？

图像是一个倒转的 V 形，顶点在 $(0, 7)$，斜率（gradient）为 ± 2。它与 $y = x$ 相交于 $x = 7 - 2x$（其中 $x \geq 0$）之处，得 $x = \frac{7}{3}$；以及 $x = 7 + 2x$（其中 $x < 0$）之处，得 $x = -7$。这些就是*不动点*（fixed point）：从这里出发，数列永远不会移动。此外 $\mathrm{f}(-7) = \mathrm{f}(7) = -7$ 而 $\mathrm{f}(0) = 7$，所以 f 把 $[-7, 7]$ 映满自身：先把它拉长至两倍，再对折起来。

逐步解题

阶段 1　$\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ 的图像

想一想　当 x 由 -7 走到 7 时，$\mathrm{f}(x)$ 由 -7 升至 7，再降回 -7。那么 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 会怎样变化？

当 x 由 -7 走到 0 时，$\mathrm{f}(x)$ 走遍整个 $[-7,7]$，所以 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 描出一个完整的 V 形：由 -7 升至 7，然后再降下来。当 x 由 0 走到 7 时，情况相同。因此在 $[-7,7]$ 上，$\mathrm{f}\circ\mathrm{f}$ 的图像是一个倒转的 W 形：四段斜率为 ± 4 的直线段，每段都在高度 -7 与 7 之间来回，顶点在 $x=\pm\frac{7}{2}$（该处 $\mathrm{f}(x)=0$），并在 $x=0$ 处下降至 -7（图 8.8.1）。在 $[-7,7]$ 之外，两个图像都急速下降。

阶段 2　解 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=x$

想一想　四段直线段每一段都与对角线 $y=x$ 恰好相交一次。其中两个交点你早已知道，为甚么？怎样才能不必展开多重绝对值而找出另外两个？

不动点 $\frac{7}{3}$ 和 -7 当然满足 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=x$。任何其他的解 p 都属于一个 2-循环 $p\to q\to p$，其中 $q=\mathrm{f}(p)\neq p$。试试各种正负号的组合。如果 p 和 q 都是正数，则 $q=7-2p$ 及 $p=7-2q$，这迫使 $p=q=\frac{7}{3}$；如果两者都是负数，同样的论证给出 -7。所以必定一正一负，设 $p>0>q$：

$$q=7-2p,\qquad p=7+2q.$$

于是 $p=7+14-4p$，所以 $p=\frac{21}{5}$ 及 $q=-\frac{7}{5}$，而这确实满足 $q<0$。

在 $[-7,7]$ 之外并没有解：当 $x>7$ 时，有 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=21-4x<x$；当 $x<-7$ 时，有 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))=21+4x<x$。所以四个解是

$$x=-7,\quad -\frac{7}{5},\quad \frac{7}{3},\quad \frac{21}{5}.\qquad\blacksquare$$

数列的周期为 2，当且仅当 $a=\frac{21}{5}$ 或 $a=-\frac{7}{5}$。（在不动点处，数列是常数数列，周期为 1。）

阶段 3　迟了才进入循环

取 $a=\frac{28}{5}$：$u_1=7-\frac{56}{5}=-\frac{21}{5}$，$u_2=7-\frac{42}{5}=-\frac{7}{5}$，$u_3=7-\frac{14}{5}=\frac{21}{5}$，$u_4=-\frac{7}{5}$，如此类推。由 u_2 开始，数列就是那个 2-循环，但 $u_0=\frac{28}{5}$ 和 $u_1=-\frac{21}{5}$ 并不在循环之内。 ■

想一想　你自己可以怎样找到 $\frac{28}{5}$？试从后倒推：f 把哪些数送到 $-\frac{7}{5}$？

$f(x) = -\frac{7}{5}$ 即是 $|x| = \frac{21}{5}$，所以 $x = \pm\frac{21}{5}$。其中一个在循环之内；另一个，即 $-\frac{21}{5}$，就是一个入口。然后 $f(x) = -\frac{21}{5}$ 即是 $|x| = \frac{28}{5}$。由于 f 是二对一的，$(-7,7)$ 内每一点都有两个原像（preimage），所以每个循环都有一整棵由起始值组成的树，最终汇入这个循环。

阶段 4 三循环

> **停一停，试一试** 计算由 $a = 1$ 和 $a = -\frac{7}{9}$ 出发的数列。

由 $a = 1$ 出发：$1 \to 5 \to -3 \to 1$。由 $a = -\frac{7}{9}$ 出发：$-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$。两者都是 3-循环。

> **想一想** $f(f(f(x))) = x$ 可以有多少个解？像第 1 阶段那样，想想它的图像的形状。

重复第 1 阶段的论证，每多施行一次 f，直线段的数目就增加一倍。所以在 $[-7,7]$ 上，$f \circ f \circ f$ 的图像是由八段组成的锯齿形，斜率为 ± 8，每段都走遍由 -7 到 7 的整个高度（图 8.8.2）。每一段都与对角线恰好相交一次，所以在 $[-7,7]$ 内恰好有八个解，而（一如之前）区间之外则没有解。我们已经找到八个：两个不动点，以及两个 3-循环的六个点。所以解是

$$x = -7,\ \frac{7}{3},\ 1,\ 5,\ -3,\ -\frac{7}{9},\ \frac{49}{9},\ -\frac{35}{9}. \qquad \blacksquare$$

阶段 5 迟了才进入 3-循环

由循环 $1 \to 5 \to -3$ 从后倒推。我们想要 u_3 在循环之内，但 u_2 不在。1 的原像满足 $|x| = 3$，所以 $x = \pm 3$；-3 在循环之内，故取 $u_2 = 3$。3 的原像满足 $|x| = 2$；取 $u_1 = 2$。2 的原像满足 $|x| = \frac{5}{2}$；取 $u_0 = \frac{5}{2}$。于是

$$\tfrac{5}{2} \to 2 \to 3 \to 1 \to 5 \to -3 \to 1 \to \cdots,$$

而 $\frac{5}{2}$、2、3 全都不在循环之内。所以 $a = \frac{5}{2}$ 符合要求。 $\blacksquare$

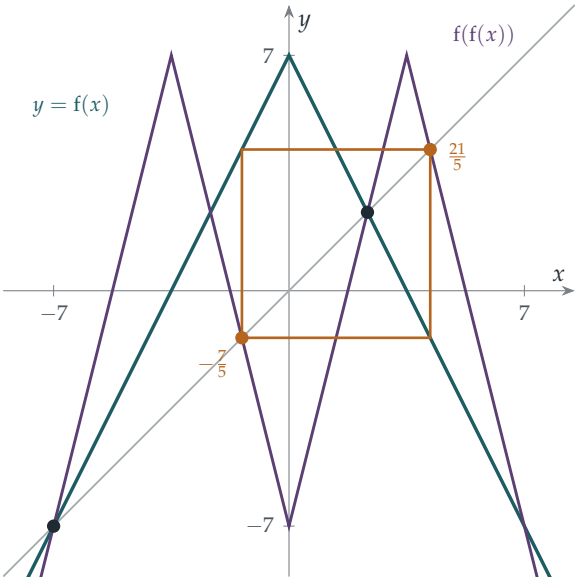


图 8.8.1　$y = \mathrm{f}(x)$（蓝绿色）、$y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$（紫红色）和 $y = x$（灰色）的图像。紫红色的图像与对角线相交四次：在不动点 -7 和 $\frac{7}{3}$（黑色），以及在 2-循环 $\frac{21}{5} \leftrightarrow -\frac{7}{5}$（琥珀色）。琥珀色的正方形是这个 2-循环的蛛网图（cobweb）：向上走到 f 的图像，横向走到对角线，然后重复。

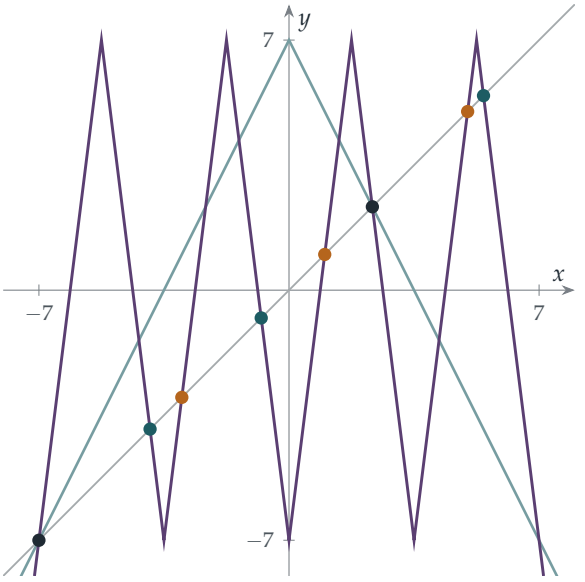


图 8.8.2　$y = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$ 的图像（紫红色）在 $[-7, 7]$ 上是由八段组成的锯齿形，斜率为 ± 8，每段与对角线相交一次。八个交点分别是两个不动点（黑色）、3-循环 $1 \to 5 \to -3$（琥珀色）和 3-循环 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9}$（蓝绿色）。

回顾

- **凭形状计数。**我们没有展开多重绝对值，而是计数图像中直线段的数目。这告诉我们要找多少个解，也就知道甚么时候已经全部找齐。
- **利用循环的结构。**$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 的解若非不动点，就是成对出现；$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$ 的解若非不动点，就是三个一组出现。
- **从后倒推。**第 (i)(d) 和 (ii)(c) 部分中那些“迟来者”，都是靠原像构造出来的。

背后的数学

任何长度的循环

第 4 阶段的计数方法适用于任何步数。把 f^n 记作施行 f 共 n 次。在 $[-7,7]$ 上，f^n 的图像有 2^n 段直线段，每段都走遍整个高度，所以 $\mathrm{f}^n(x) = x$ 恰好有 2^n 个解。其中有些解的周期较短，是某个整除 n 的 d，但对每个 d 而言，这样的解最多只有 2^d 个，而且

$$2^n > 2^{n/2} + 2^{n/3} + \cdots + 2^1 \quad \text{（对所有满足 } d < n \text{ 的 } n \text{ 的因数求和）}$$

因为所有小于 n 的因数都不超过 $n/2$，而 $2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{\lfloor n/2 \rfloor} < 2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \le 2^n$。所以对每个 n，都存在周期恰好为 n 的点。这个函数有任何长度的循环。

为甚么周期三迫使一切出现

李天岩与约克的定理指出，这并非我们这个函数独有的性质：任何由区间映到自身的连续函数 g，只要有一个 3-循环，就有任何长度的循环。证明所用的不外乎介值定理（intermediate value theorem），而我们的 3-循环正好展示了证明的思路。

> **想一想** 设 $I_1 = [-3,1]$ 及 $I_2 = [1,5]$，即循环 $1 \to 5 \to -3$ 各点之间的两个区间。f 把它们分别送到哪里？

在 I_2 上，f 由 $\mathrm{f}(1) = 5$ 递减至 $\mathrm{f}(5) = -3$，所以 $\mathrm{f}(I_2) = [-3,5] = I_1 \cup I_2$。在 I_1 上，f 由 $\mathrm{f}(-3) = 1$ 升至 $\mathrm{f}(0) = 7$，再降至 $\mathrm{f}(1) = 5$，所以 $\mathrm{f}(I_1) = [1,7]$，它包含 I_2。留意我们只用到循环的三个点：任何具有 3-循环 $a \to b \to c$、$a < b < c$ 的连续函数，都以同样的方式覆盖它的区间。我们可以用一幅图来概括哪个区间覆盖哪个区间（图 8.8.3）：

$$I_1 \to I_2, \qquad I_2 \to I_1, \qquad I_2 \to I_2.$$

定理于是由以下两个事实推出，两者都是介值定理的推论。

- 如果 $\mathrm{g}(I) \supseteq I$，则 g 在 I 内有一个不动点。（对 $\mathrm{g}(x) - x$ 应用介值定理。）

▶ 如果 $g(I) \supseteq J$，则存在一个较小的闭区间 $I' \subseteq I$，使得 $g(I') = J$ 恰好成立。

要找一个周期为 n 的点，可沿着图中的回路 $I_2 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_2$ 走：$n-1$ 步留在 I_2 之内，另有一步走出去到 I_1 再回来。反复运用第二个事实，我们可以把 I_2 收窄成一个由起始点组成的区间，这些起始点的轨道（orbit）都依循这条路线，而 g^n 把这个区间映满整个 I_2。第一个事实给出一点 x，满足 $g^n(x) = x$，并且只在第 $n-1$ 步到访 I_1。它的周期不可能小于 n，否则对 I_1 的到访便会在更早的时候重复出现。（这里有一个微妙之处，因为 I_1 和 I_2 共有一点 1；验证这不会造成问题，留作习题。）

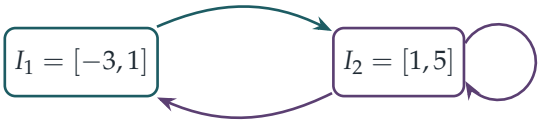


图 8.8.3　3-循环的覆盖图（covering diagram）。由一个区间指向另一个区间的箭嘴，表示前者的像包含后者。图中每一条回路都给出函数的一个循环：回路 $I_2 \to I_2$ 给出一个不动点，$I_1 \to I_2 \to I_1$ 给出一个 2-循环，而先绕 I_2 处的回路 $n-1$ 次再到访 I_1，则给出一个长度为 n 的循环。

沙可夫斯基定理

李天岩与约克并不是最先发现的人。早在 1964 年，乌克兰数学家沙可夫斯基（Oleksandr Sharkovskii）已经证明了一个完备得多的结果，以俄文发表于《乌克兰数学杂志》（*Ukrainian Mathematical Journal*），其后十年间西方对此一无所知。把正整数排列成

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ \ldots,\ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ \ldots,\ \ldots,\ 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1:$$

先是由 3 开始的奇数，然后是奇数的两倍，再然后是奇数的四倍，如此类推，最后以 2 的幂按递减次序作结。沙可夫斯基定理指出：如果区间上的一个连续函数有一个长度为 m 的循环，那么凡是在这个列表中排在 m 之后的长度，它都有相应的循环。由于 3 排在最前，周期 3 便蕴涵所有周期。而且这个定理是最佳的：对每个 m，都存在一个函数，它有长度为 m 的循环，却没有列表中排在更前的长度的循环。列表末端 2 的幂，正正就是 Section 8.7 中逻辑斯蒂映射（logistic map）的倍周期级联（period-doubling cascade），而 3-循环在那里出现于 $k = 1 + \sqrt{8}$。

帐篷映射与逻辑斯蒂映射

作代换 $x = 14y - 7$，它把 $[0,1]$ 映满 $[-7,7]$。简单计算可见，f 变成了帐篷映射（tent map）

$$T(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le \frac{1}{2}, \\ 2 - 2y & \frac{1}{2} \le y \le 1, \end{cases}$$

而再作代换 $u = \sin^2(\pi y/2)$，就把帐篷映射变成逻辑斯蒂映射 $u \mapsto 4u(1-u)$。所以这道题目中的函数，其实就是 Section 8.7 中那个混沌的逻辑斯蒂映射，只是被拉直了。它的 $\mathrm{f}^3(x) = x$ 的八个解，对应于 $\sin^2(8\theta) = \sin^2\theta$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内的八个解。

思维技巧

以介值定理证明存在性

要证明解存在，不一定要把它找出来。只需证明一个连续函数变号，或者一个区间被映射后盖过自身。

在这道题目中，每一个解都可以算出来。但李天岩与约克的定理适用于我们根本无从计算的函数，而且它只用介值定理和一幅显示哪个区间覆盖哪个区间的图，就证明了无穷多个循环的存在。在大学里，这种论证方式，即不作构造而证明存在，会出现在分析（analysis）（介值定理本身）、拓扑学（topology）（不动点定理）以及动力系统（dynamical systems）的各个角落。

延伸练习

1 **一个 4-循环。**利用覆盖图预测 f 的一个 4-循环应该在哪里（三步在 I_2，一步在 I_1）。然后把它精确地求出来。（提示：这个循环有三个正的点和一个负的点；写下四条线性方程。）

2 **微妙之处。**在“周期 3 蕴涵周期 n”的证明中，解释为甚么当 $n \geq 4$ 时，所找到的点 x 不可能是点 1（或原来那个 3-循环的任何一点）。

3 **有周期 5 而没有周期 3。**草绘一个在 $[1,5]$ 上的连续函数的图像，它满足 $g(1) = 3$、$g(3) = 4$、$g(4) = 2$、$g(2) = 5$、$g(5) = 1$，并以直线连接这些点。就区间 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$、$[4,5]$ 画出它的覆盖图。你能找到一条长度为 3 的回路吗？（沙可夫斯基定理说它没有 3-循环。）

4 **帐篷映射。**验证 $x = 14y - 7$ 把 f 变成帐篷映射。然后证明帐篷映射把以二进制写成的 y 加倍，并且每当首位数字是 1 时就把所有数字反转；再利用这一点找出它的 3-循环。

延伸阅读

► **Tien-Yien Li & James Yorke, “Period three implies chaos”**, *American Mathematical*

Monthly 82 (1975)。篇幅短小，懂得介值定理便可读懂。

- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*** (CRC Press)。为大学本科生而写；涵盖帐篷映射、逻辑斯蒂映射和沙可夫斯基定理，并附完整证明。
- **Keith Burns & Boris Hasselblatt, "The Sharkovsky theorem: a natural direct proof"**, *American Mathematical Monthly* 118 (2011)。一个运用覆盖图的现代证明。

我们学到了甚么

本章开首我们说过，大多数微分方程（differential equation）都无法求解，而真正的功夫在于即使解不出来，也能理解它们。我们提出了三个问题：现在是否决定未来？不求解的话，我们能知道些甚么？长远而言会发生甚么事？以下是本章八道题目所揭示的答案。

1. 现在是否决定未来？

通常是，但并非必然。在 Section 8.1 中，方程 $(y')^2 = 4y$ 经过 x 轴上每一点都有无穷多个解：一个解可以随意在 $y = 0$ 停留任意长的时间，然后才离开。罪魁祸首是平方根：它在零处的斜率为无穷大，破坏了皮卡–林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）中的利普希茨条件（Lipschitz condition）。同一机制也解释了为何一个漏水的水桶无法告诉你它是何时漏空的，而它亦是诺顿圆顶（Norton's dome）背后的原理——那是古典力学中一个关于决定论（determinism）的难题。

即使未来已被决定，它也未必可以预测。Section 8.7 的逻辑斯谛映射（logistic map）有一条精确的公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，然而每走一步，起始角 θ 的任何误差都会加倍，而起始值的误差平均而言也增长得同样快。原则上的决定论，并不等于实际上的可预测性。

2. 不求解的话，我们能知道些甚么？

能知道的非常多。

- **能量。**在 Section 8.2 中，把方程乘以 y' 便得出一个不可能增加的量，从而为一条无人能解的方程的解定出了界限。这类量称为*李雅普诺夫函数*（Lyapunov function），是证明稳定性（stability）的主要工具。
- **平衡点与稳定性。**在 Section 8.3 中，增长率的正负号预示了鱼群的命运，并显示捕捞量一旦超过某个临界值，鱼群便会突然崩溃。
- **合适的坐标。**在 Section 8.4 中，极坐标（polar coordinates）把一个耦合方程组化为只含 r 的单一方程，显示每个解都盘旋着趋向一个圆。在 Section 8.5 中，对称性把四只互相追逐的狗简化为一只，再以相除消去时间，便得出牠们路径的形状。
- **由恒等式看出结构。**在 Section 8.6 中，朗斯基行列式（Wronskian）证明了某方程的解互相正交（orthogonal），而无须对其中任何一个解进行积分。

- **计数与覆盖。**在 Section 8.8 中，计数图像的段数便找出了所有循环（cycle），而介值定理（intermediate value theorem）则证明了任意长度的循环都存在。

3. 长远而言会发生甚么事？

本章遇到了各种各样的长期行为。解或会趋于稳定的平衡点（Section 8.3）、趋近一个不断重复的循环（Section 8.4）、在有限时间内盘旋收于一点（Section 8.5），又或者表现出混沌（chaos）行为（Section 8.7）。就逻辑斯谛映射而言，单单一个参数便可令系统经历以上各种情况：先是一个不动点（fixed point），然后是一连串由费根鲍姆（Feigenbaum）普适常数支配的倍周期（period doubling），最后是混沌，其间夹杂着一些有序的窗口，例如 3-循环。而 Section 8.8 则证明了，一旦出现 3-循环，任意长度的循环都必定存在——这是沙可夫斯基（Sharkovskii）整数排序的第一步。

4. 微分方程与动力学的工具箱

方法	你在哪里用过
寻找奇解（singular solution）	非唯一性（8.1）
一个不可能增加的量	定界（8.2）
增长率的正负号	捕捞（8.3）
配合对称性的坐标	极限环（limit cycle）（8.4）；追逐（8.5）
以代换法线性化	伯努利方程（Bernoulli equation）（8.4）
朗斯基行列式	正交性（8.6）
共轭（conjugacy）	逻辑斯谛映射（8.7）
归纳法（induction）	$u_n = \sin^2(2^n\theta)$（8.7）
计数图像的段数	f^n 的循环（8.8）
介值定理	周期三（8.8）

下一步

- 能量与守恒定律会在力学中再次出现，由 Section 10.1 开始。
- 含多个未知函数的线性微分方程可用特征向量（eigenvector）求解，它们支配着 Section 11.2 中的振动系统；至于无法以初等函数求解的非线性单摆，则见于 Section 11.3。
- 在 Section 12.15 中，反复迭代一个映射以找出其不动点，可判定一个姓氏会否消亡；而随机数列的长期行为则是 Section 12.16 的主题。

如果你想在上大学之前再进一步

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***：动力系统（dynamical systems）最好的入门书，应用和图解十分丰富。Strogatz 根据此书讲授的课堂录影可在网上免费观看。
- **James Gleick, *Chaos: Making a New Science***：讲述混沌是如何被发现的故事。
- **George Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes***：经典的入门课本，历史材料丰富。
- **Robert Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems***：迭代映射，附有证明，程度相当于大学一年级。

拉普拉斯（Laplace）曾经设想，只要准确知道现在，便可以算出整个未来。本章显示了这个梦想在何处止步。唯一性可以失效；而即使唯一性成立，混沌也可以把最微小的不确定性不断放大，直至无法预测。但本章同时显示，没有公式也能理解很多东西：界限、平衡点、循环及其稳定性，以至混沌本身的结构。由“解方程”转为“理解方程的解”，是大学数学课程要求你作出的最重要的思维转变之一。

延伸练习答案

以下只是简短的答案和提示，并非完整解答：只列出结果和关键步骤，方便你核对自己的做法。请先认真做过每道练习，然后才翻看。

8.1 当解不唯一

1. 设 $y = v^2$：$2vv' = \alpha v - \beta v^2$，所以 $v' = \frac{1}{2}(\alpha - \beta v)$，而 $y_1 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/2}\right)^2$。设 $y = v^3$：$v' = \frac{1}{3}(\alpha - \beta v)$，而 $y_1 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta t/3}\right)^3$。常数函数 $y = 0$ 令等式两边都等于零；推导时除以 v，就把这个解丢掉了。

2. $2\sqrt{h} = 2\sqrt{h_0} - kt$，所以 $h = \left(\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}kt\right)^2$，水桶在 $T = \frac{2\sqrt{h_0}}{k}$ 时流干。$h \equiv 0$，以及当 $t \le T$ 时 $h = \frac{k^2}{4}(T - t)^2$、当 $t \ge T$ 时 $h = 0$ 的函数，两者都满足方程，而且由 T 起都等于零：看着一个空桶，你无法知道它是何时流干的。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-2x}) = (y' - 2y)\mathrm{e}^{-2x} = 0$，所以 $y = C\mathrm{e}^{2x}$，而 $y(0) = 0$ 迫使 $C = 0$。函数 $2y$ 满足利普希茨（Lipschitz）条件（它的变化至多为 $2|y_1 - y_2|$），而 $2\sqrt{y}$ 在 0 处的斜率为无穷大。

4. 对任意 $b \le 0 \le a$（容许 $b = -\infty$ 或 $a = \infty$）：当 $x < b$ 时 $y = (x - b)^3$，当 $b \le x \le a$ 时 $y = 0$，当 $x > a$ 时 $y = (x - a)^3$。$a = b = 0$ 的情况就是 $y = x^3$。

8.2 不求解而估界

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = 0$，所以 $(y')^2 + y^2 = A^2$，因而 $|y| \le A$。精确解是 $A\cos x$。

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\theta')^2 - 2\cos\theta\right) = 2\theta'(\theta'' + \sin\theta) = 0$。由静止开始，$(\theta')^2 = 2(\cos\theta - \cos\theta_0) \ge 0$，所以 $\cos\theta \ge \cos\theta_0$；当 $|\theta_0| < \pi$ 时，连续性（continuity）令 θ 留在 $[-|\theta_0|, |\theta_0|]$ 之内，而当 $|\theta_0| = \pi$ 时，摆倒立平衡，并一直停在那里。若 $|\theta_0| > \pi$，例如 $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$，则 $\theta''(0) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1 > 0$，所以 θ 起初递增：摆其实位于角度 $\theta_0 - 2\pi = -\frac{\pi}{2}$，并在由该处量起的 $\pm\frac{\pi}{2}$ 之间摆动。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((y')^2 + y^2\right) = 2y'(y'' + y) = -4k(y')^2 \le 0$。它确实趋向零，但单凭单调性（monotonicity）并不足以证明这一点：你还需要其他工具，例如显式解，其指数 $-k \pm \sqrt{k^2 - 1}$ 的实部为负。

4. $(y')^2 - \frac{1}{2}y^4$ 是常数，等于 $-\frac{1}{2}$。由此得 $(y')^2 = \frac{1}{2}(y^4 - 1)$，但这给不出任何界：“位

能” $-\frac{1}{2}y^4$ 没有可以困住 y 的位阱，而事实上 y 会在有限时间内趋向无穷（blow up）。

8.3 收获种群

1. 方程是 $x' = \alpha^2 - (x-K)^2$，可化为 $y' = y(2\alpha - y)$。设 $w = \frac{1}{y}$，则 $w' = 1 - 2\alpha w$，所以 $w = \frac{1}{2\alpha} + Ce^{-2\alpha t}$。若 $y(0) < 0$，则 $w(0) < 0 < \frac{1}{2\alpha}$，所以 w 在有限时间内经过 0，而 $y \to -\infty$；x 在此之前已到达 0。

2. 设 $z = x - K$，则 $z' = -(z^2 + \beta^2)$，所以 $\tan^{-1}\frac{z}{\beta} = \tan^{-1}\frac{K}{\beta} - \beta t$。种群数量在 $t = \frac{2}{\beta}\tan^{-1}\frac{K}{\beta}$ 时降至零（$z = -K$）。

3. $x' = x(2K - h - x)$ 的平衡点（equilibria）是 0 和 $2K - h$。当 $h < 2K$ 时，这是一条环境承载量（carrying capacity）为正的逻辑斯谛方程（logistic equation），每个正数解都趋向 $2K - h$。捕获量随种群数量下降而减少，所以永远不会把种群数量逼至零。

4. $x = K + K\tanh Kt$，而 $\tanh Kt = \frac{1}{2}$ 给出 $t = \frac{1}{K}\tanh^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\ln 3}{2K}$。

8.4 盘旋趋向圆

1. 曲线与半径之间的夹角 ψ 满足 $\tan\psi = \frac{r}{\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta} = -1$，在每一点都相同：曲线与每条射线都以 45° 相交。

2. $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2 + y^2) = r\,\mathrm{d}r$。另外 $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = r\cos\theta(\sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta) - r\sin\theta(\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta) = r^2\,\mathrm{d}\theta$。

3. 设 $s = r^2$，则 $\dot{s} = 2s(1-s)$，是一条逻辑斯谛方程，所以对任意 $s(0) > 0$ 都有 $s \to 1$。写成笛卡儿（Cartesian）形式：$\dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y$，$\dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x$。

4. $\dot{r} = r(r-1)(r-2)$，$\dot{\theta} = 1$。在 0 与 1 之间，$\dot{r} > 0$；在 1 与 2 之间，$\dot{r} < 0$；超过 2 之后，$\dot{r} > 0$。所以 $r = 1$ 是吸引的，而 $r = 2$ 是排斥的。

8.5 格力犬追逐格力犬

1. 由对称性可知，几只狗始终构成一个正方形。A 沿 AB 以速率 v 奔跑，令距离以速率 v 缩短；B 沿 BC 奔跑，而这个方向垂直于 AB，所以在一阶近似下不会改变距离。因此 AB 恰好以速率 v 缩短，由 s 减至 0，需时 $\frac{s}{v}$。

2. $r = \lambda e^{-\sqrt{3}\theta}$。距离以速率 $v - v\cos 120° = \frac{3}{2}v$ 缩短，所以牠们在时间 $\frac{2s}{3v}$ 后相遇，每只各跑了 $\frac{2s}{3}$（这与 $\frac{s}{2\sin^2(\pi/n)}$ 在 $n = 3$ 时的值吻合）。

3. 每转一圈，r 就乘以 $e^{-2\pi} \approx \frac{1}{535}$：转一圈后约为 19 cm。转两圈后约为 0.35 mm，所以转足两圈便已足够。

4. 两只狗笔直地向对方奔跑，在时间 $\frac{s}{2v}$ 后于中点相遇。公式在此失效：$\tan\frac{\pi}{2}$ 为无穷大，正好对应完全没有转弯这个事实。

8.6 量子振子

1. 这只需直接求导（虽然颇为繁琐）；另一个做法是由第 4 题推出。取 $2\lambda=\omega$，则 $\int y_0y_2=\int(2\omega x^2-1)\mathrm{e}^{-\omega x^2}\,\mathrm{d}x=2\omega\cdot\frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}-\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}=0$。

2. $y''=(4\lambda^2x^2-2\lambda)y$，所以方程要求 $4\lambda^2=\omega^2$ 及 $2\lambda=(2\nu+1)\omega$。取 $\lambda=\frac{\omega}{2}>0$（使解衰减），得 $\nu=0$。

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y_my_n'-y_ny_m')=y_my_n''-y_ny_m''=(m^2-n^2)y_my_n$。由 0 积分至 π：因为 y_m 和 y_n 在两端都等于零，左边得 0，而 $m^2\neq n^2$。

4. 记 $c=(2n+1)\omega$，于是 $y_n''=(\omega^2x^2-c)y_n$。把 $z=\omega xy_n-y_n'$ 求导两次，并运用上式（及其导数），得 $z''-\omega^2x^2z=-(c+2\omega)z$，而 $c+2\omega=(2n+3)\omega$。由 $y_0=\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$ 出发：先得 $2\omega x\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$，再得 $2\omega(2\omega x^2-1)\mathrm{e}^{-\omega x^2/2}$，它们分别是 y_1 和 y_2 的倍数。

8.7 可以解出的混沌

1. (i) 用归纳法（induction）：若 $0<x<1$，则 $0<x(1-x)\leq\frac{1}{4}$，所以 $0<kx(1-x)<1$。(ii) $a=ka(1-a)$ 给出 $k=\frac{1}{1-a}$。(iii) 由于 $x_1=ka(1-a)=ab$，条件 $x_2=a$ 即 $kab(1-ab)=a$；代入 $k=\frac{b}{1-a}$ 后，化为 $ab^3-b^2+1-a=0$。根 $b=1$ 对应不动点（fixed point）（$x_1=a$），所以把它提出来：$ab^2+(a-1)b+(a-1)=0$；解出 b，便得 $k=\frac{b}{1-a}$。等价的说法是：2-循环（cycle）的两点是 $k^2x^2-k(k+1)x+(k+1)=0$ 的两个根，其判别式（discriminant）$k^2(k+1)(k-3)$ 只在 $k>3$ 时为正。

2. $p=-1$，$q=0$，$r=-2$：$4pr=8=8+2q-q^2$。比较系数得 $\alpha=\frac{4}{p}=-4$ 及 $\beta=\frac{q-4}{2p}=2$，所以 $v_n=2-4\sin^2(2^n\theta)=2\cos(2^{n+1}\theta)$，即 $2\cos(2^n\phi)$，其中 $\phi=2\theta$。

3. $u_3=u_0$ 要求 $\sin^2 8\theta=\sin^2\theta$，所以 $8\theta=\pm\theta+k\pi$。取 $\theta=\frac{\pi}{7}$：得循环 $\sin^2\frac{\pi}{7}\to\sin^2\frac{2\pi}{7}\to\sin^2\frac{4\pi}{7}\to\sin^2\frac{8\pi}{7}=\sin^2\frac{\pi}{7}$。取 $\theta=\frac{\pi}{9}$：$\sin^2\frac{\pi}{9}$，$\sin^2\frac{2\pi}{9}$，$\sin^2\frac{4\pi}{9}$。映射（map）$u\mapsto u_3$ 有 $2^3=8$ 个不动点；其中两个（0 和 $\frac{3}{4}$）是原映射本身的不动点，余下 6 个点的周期恰好是 3：即两个 3-循环。

4. 每一步都把 θ 加倍，因而损失一个二进制数位的准确度，所以大约 50 步之后，计算所得的数值与真实数值已毫无关系。但这些数值并非没有用处：计算所得的数列始终贴近一条由稍为不同的起点出发的真实轨道（orbit）（这就是影随（shadowing）性质），所以它的统计特性仍然正确。

8.8 周期三蕴含混沌

1. 设 a、b、$c > 0$ 而 $d < 0$：$b = 7 - 2a$，$c = 7 - 2b$，$d = 7 - 2c$，$a = 7 + 2d$。解得 $17a = 49$，所以循环是 $\frac{49}{17} \to \frac{21}{17} \to \frac{77}{17} \to -\frac{35}{17} \to \frac{49}{17}$，其中三点在 $I_2 = [1, 5]$ 内，一点在 $I_1 = [-3, 1]$ 内。

2. 所找到的点的行程（itinerary）是 $I_2, I_2, \ldots, I_2, I_1$（其中有 $n - 1 \geq 3$ 步在 I_2 内）。循环 $1 \to 5 \to -3$ 不可能依循这个行程：-3 不在 I_2 内，所以 1（它的第二个像是 -3）、5（它的第一个像是 -3）以及 -3 本身，都不可能是该点。

3. 覆盖图(covering diagram)是 $[1, 2] \to [3, 4], [4, 5]; [2, 3] \to [4, 5]; [3, 4] \to [2, 3], [3, 4]; [4, 5] \to [1, 2]$。长度为 3 的回路只有 $[3, 4] \to [3, 4] \to [3, 4]$，它给出的是不动点，而不是 3-循环。

4. 设 $x = 14y - 7$，则 $\frac{f(x)+7}{14} = 1 - |2y - 1|$，即帐篷映射（tent map）。加倍会把二进制数位向左移一位；若移出的数位是 1，结果便是 $2 - 2y$，即把余下的数位逐一反转。3-循环有 $\frac{2}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{6}{7}$ 和 $\frac{2}{9} \to \frac{4}{9} \to \frac{8}{9}$（即 $x = -3, 1, 5$ 和 $x = -\frac{35}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}$）；以二进制表示，$\frac{2}{7} = 0.\overline{010}$ 而 $\frac{2}{9} = 0.\overline{001110}$。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

全书共 13 章，本册为第 8 章。 全书各章及所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为

beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。

