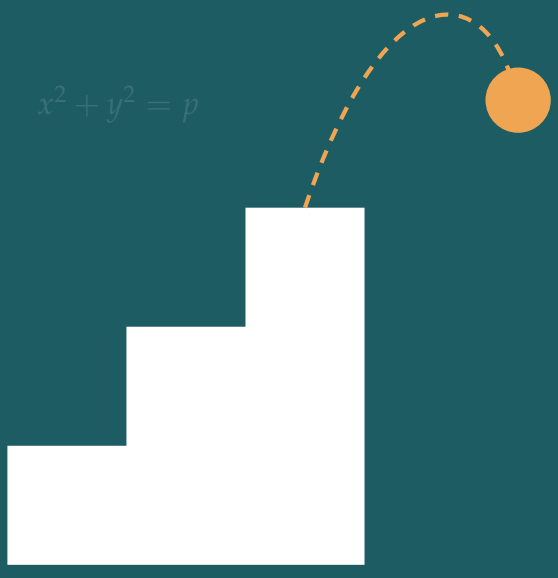
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

第 5 章

复数（Complex Numbers）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

第 5 章

复数（Complex Numbers）

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

第 5 章：复数（Complex Numbers）

本册是 *Beyond STEP* 全书 13 章中的第 5 章。全书、各章的单行本、每一节的可列印工作纸，以及每一道 STEP 试题的详细解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

5

复数

实数域中两个真理之间的最短路径，要取道复数域。

本章内容

5.1	梅钦公式	STEP III 1987
5.2	单位根筛选法	STEP I 1990
5.3	因式分解 $z^{2n}+1$	STEP III 2013
5.4	正多边形中的距离	STEP III 2016
5.5	名不副实的有理角	STEP III 2022
5.6	费马点	STEP III 2000
5.7	作为映射的复指数函数	STEP II 1997
5.8	圆盘中隐藏的距离	STEP III 2013
A	练习答案	第 59 页

虚数，实在的答案

实数域中两个眞理之间的最短路径，要取道复数域。

— 阿达马（Jacques Hadamard）

1545 年，卡尔达诺（Gerolamo Cardano）发表了一条解三次方程（cubic equation）的公式，却发现了一件令人不安的事。有些三次方程明明有三个不折不扣的实根，公式在计算途中却要求取负数的平方根。这些平方根到最后会互相抵消，留下实数答案，但在计算的中途，却出现了一些按当时任何标准都不存在的量。卡尔达诺形容这种运算“既精妙，又无用”。其后两个世纪，数学家用起这些“虚”数（imaginary number）时总是惴惴不安，只当它是一种碰巧行得通的窍门。

要到十九世纪初，Caspar Wessel、Jean-Robert Argand 和高斯（Gauss）把复数（complex number）看成平面上的点，复数才得到认可。自此之后，人们发现复数并非窍门，而是一种启示。复数解释了实数世界的现象为何如此表现，而且不断为有关实数的结果提供最短的路径，正如阿达马所言。

复数为何重要

每一条多项式方程在复数中都有解：这就是*代数基本定理*（fundamental theorem of algebra）。因此，在一个确切的意义下，代数到了复数才算完备。复数也是描述旋转和振荡的天然语言。乘以一个模（modulus）为 1 的复数，就是把平面旋转，所以凡是涉及角度、波动或周期现象的问题，用复数处理都会较为简单。电机工程师用复数分析交流电；物理学家没有复数就写不出量子力学；由手提电话到磁力共振（MRI）扫描器，信号处理全靠复数傅里叶变换（Fourier transform）运作。而在纯数学中，复变函数原来有着惊人的刚性和美感：只要知道一个复函数在一小片区域上的取值，它在各处的取值就全部确定了。

你在大学会遇到甚么

你从第一个星期起就会用到复数，但真正的一大步是*复分析*（complex analysis），通常在二年级修读。它的核心对象是*全纯*（holomorphic）函数，即可以求导的复函数，而这套理论处处是惊喜。每个全纯函数都自动地无限次可导，并且等于它的泰勒级数（Taylor series）。沿闭曲线的积分，只需察看函数趋向无穷的那些点便可求出（柯西留数定理，Cauchy's residue theorem），让你能够计算其他方法都束手无策的实积分。这套理论再

往前走，就通往保角映射（conformal map）（Section 5.7）、黎曼曲面（Riemann surface），以及支配质数的黎曼 zeta 函数（Riemann zeta function）（Section 1.2）。与此同时，单位根（roots of unity）的代数（Section 5.2、Section 5.3）通往伽罗瓦理论（Galois theory），而复几何则通往 Section 5.8 的非欧几何（non-Euclidean geometry）。

贯穿本章的问题

三个大问题

1. **复数怎样帮助解决实数问题？** 为甚么绕道复平面（complex plane），竟能得出关于 π、二项式系数（binomial coefficient）或余弦的事实？
2. **单位根有甚么特别之处？** 为甚么 $z^n = 1$ 的解不断在求和、乘积、多边形和角度之中出现？
3. **复函数是甚么模样的？** 输入和输出都是平面上的点的函数，我们怎样把它画出来？它们又揭示了怎样的几何？

本章由辐角（argument）与乘法出发（梅钦公式），经过单位根的代数（筛选、因式分解、多边形的距离和无理角），走到用复数处理的几何（费马点），最后到达作为映射的复函数（指数函数，以及单位圆盘中一个隐藏的距离）。

本章的主要想法

§	课题	想法
5.1	梅钦（Machin）公式	复数相乘时，辐角相加
5.2	每隔三项的二项式系数	对单位根取平均，可按余数（residue）筛选
5.3	余弦的乘积	按各根分解因式，然后代入
5.4	正多边形的弦	距离就是模；$z^n - 1 = \prod(z - \omega^k)$
5.5	$\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 是无理的	棣美弗（De Moivre）定理、奇偶性（parity）与最小反例（minimal counterexample）
5.6	费马点（Fermat point）	旋转就是乘法；选取好的坐标
5.7	把 e^w 看成映射	把复函数画出来；多对一映射（many-to-one map）
5.8	一个隐藏的距离	把不等式看成双曲几何（hyperbolic geometry）中的三角不等式（triangle inequality）

怎样阅读本章

动手画图。本章几乎每一个结果都有几何意义，随手画一幅复平面的草图（单位根在哪里、某个乘法把平面转向哪一边、网格线落在何处），往往在动用任何代数之前，就已经

告诉你该怎样做。然后要小心地做代数运算，因为在正负号和 2π 的倍数上，图形可能会误导你。

5.1 梅钦公式

题目

STEP III 1987，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/87-s3-q3`

引子

1706 年，伦敦数学家梅钦（John Machin）徒手把 π 计算到小数点后 100 位，在此之前从未有人接近过这个纪录。他的秘诀就是第 (ii) 部分的公式：这条公式把 $\frac{\pi}{4}$ 用几个角表示出来，而这些角的正切都是很小的分数。分数愈小，级数（series）$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 收敛（converge）得愈快。梅钦公式及其各种变体，在其后两个半世纪一直是计算 π 的标准方法，直到电脑和 Section 2.6 的方法出现才被取代。

这条公式看起来像是三角恒等式（identity）变出来的奇迹。这道题目却说明，它其实是关于复数（complex number）乘法的一个事实：复数相乘时，它们的辐角（argument）相加。只要把几个实部、虚部都是整数的复数乘一次，整条公式就得证。

动笔之前

? **想一想** $5 - \mathrm{i}$ 的辐角是甚么？$1 + \mathrm{i}$ 的呢？复数相乘时，辐角会怎样变化？

$\arg(5 - \mathrm{i}) = -\tan^{-1}\frac{1}{5}$，是一个很小的负角，而 $\arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}$。复数相乘时，模（modulus）相乘，辐角相加（可相差 2π 的倍数）。因此

$$\arg((5 - \mathrm{i})^4(1 + \mathrm{i})) = \frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} \quad \text{（可能再加上若干个}2\pi\text{）}.$$

如果我们能算出这个乘积，再用另一个方法求出它的辐角，就得到一条恒等式。

逐步解题

阶段 1　模的上下界

想一想　求上界（upper bound）时，把两边平方。求下界（lower bound）时，把 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 看成两个向量的点积（dot product）。

上界：$(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2 = |z|^2$，而且两边都非负，所以 $|z| \leq |x|+|y|$。

下界：$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 是长度为 $|z|$ 的向量 $(|x|,|y|)$ 与单位向量（unit vector）$(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的点积。点积不会超过两个向量长度之积，所以它不超过 $|z|$。（代数证法：$|z|^2 - (|x|\cos\alpha+|y|\sin\alpha)^2 = (|x|\sin\alpha - |y|\cos\alpha)^2 \geq 0$。） ■

阶段 2　关键的乘法

想一想　先计算 $(5-\mathrm{i})^2$，再把结果平方，然后乘以 $1+\mathrm{i}$。

$(5-\mathrm{i})^2 = 25-10\mathrm{i}-1 = 24-10\mathrm{i}$。于是 $(24-10\mathrm{i})^2 = 576-480\mathrm{i}-100 = 476-480\mathrm{i}$。最后

$$(476-480\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 476+476\mathrm{i}-480\mathrm{i}+480 = 956-4\mathrm{i}.$$

停一停，试一试　现在比较辐角。$956-4\mathrm{i}$ 的辐角是甚么？你凭甚么肯定没有多出 2π 的倍数？

$956-4\mathrm{i} = 4(239-\mathrm{i})$，其辐角为 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$。因此

$$\frac{\pi}{4} - 4\tan^{-1}\frac{1}{5} = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi$$

其中 k 是某个整数。但 $0 < \tan^{-1}\frac{1}{5} < \frac{1}{5}$，所以左边介乎 $\frac{\pi}{4}-\frac{4}{5}$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 之间，即大约介乎 -0.02 与 0.79 之间；而右边除去 $2k\pi$ 后介乎 -0.005 与 0 之间。由于 2π 远大于两者的差距，故 $k=0$。移项后得

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}. \qquad ■$$

图 5.1.1 显示了整个过程：由 45° 出发，每乘一次 $5-\mathrm{i}$ 就顺时针旋转约 11.3°，乘了四次之后，刚好越过实轴，只过了 0.24°。

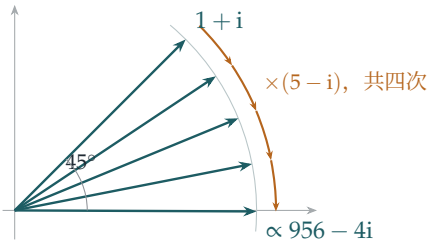


图 5.1.1 把 $1+\mathrm{i}$ 乘以 $5-\mathrm{i}$ 四次。每乘一次就顺时针旋转 $\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 11.31°$（同时也会拉长，这里略去不计）。四次旋转把 45° 带到 $-0.24°$，即 $956-4\mathrm{i}$ 的辐角，也就是 $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$。

阶段 3 第二条公式

想一想 依样画葫芦，这次应该计算哪一个乘积?

考虑 $(4+\mathrm{i})^3(20+\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})$，它的辐角是 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$。现在 $(4+\mathrm{i})^2=15+8\mathrm{i}$，所以 $(4+\mathrm{i})^3=(15+8\mathrm{i})(4+\mathrm{i})=52+47\mathrm{i}$。于是 $(52+47\mathrm{i})(20+\mathrm{i})=1040+52\mathrm{i}+940\mathrm{i}-47=993+992\mathrm{i}$，而

$$(993+992\mathrm{i})(1985+\mathrm{i})=(1971105-992)+(993+1969120)\mathrm{i}=1970113+1970113\mathrm{i}.$$

实部（real part）等于虚部（imaginary part），所以辐角是 $\frac{\pi}{4}$。三个角都是很小的正角（它们的和小于 $3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{1985}<1<2\pi$），所以毋须担心 2π 的倍数，公式由此得证。■

回顾

- **相乘时辐角相加。**单凭这一个事实，高斯整数（Gaussian integers）的乘积就变成了角与角之间的恒等式。
- **留意 2π 的倍数。**辐角只能确定到相差 2π 的倍数，所以每条恒等式都要靠估计大小来确定那个倍数。
- **整数包办一切。**所有运算都只涉及整数；关于 π 的恒等式是精确地得出的，没有用到任何近似。

背后的数学

徒手计算 π

为甚么梅钦公式这样适合用来计算？级数 $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 在 $|x| \le 1$ 时收敛，但在 $x = 1$ 时慢得令人难受：要用 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ 求得 $\frac{\pi}{4}$ 的三位小数，大约需要一千项。取 $x = \frac{1}{5}$ 时，每一项约为前一项的 25 分之一，即每项大约带来 1.4 位小数；取 $x = \frac{1}{239}$ 时，每项约 4.8 位。梅钦的 100 位小数，只需要第一个级数约 70 项和第二个级数约 20 项。1873 年，William Shanks 用一条梅钦型公式算出 707 位，单是运算就花了多年时间；到了 1944 年，人们发现他在第 528 位出了错，其后的数字全部不对。

再谈高斯整数

形如 $a + b\mathrm{i}$ 而 a、b 为整数的数，就是 Section 1.6 的高斯整数。$5 - \mathrm{i}$ 之所以这样好用，原因在于一个因数分解（factorisation）：$239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$，在高斯整数中写成 $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4(3 - 2\mathrm{i})^4$，而 $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$ 正是由同一批高斯质数（Gaussian primes）组成的。寻找梅钦型公式，其实就是把形如 $n^2 + 1$ 的数作因数分解的问题。1899 年，Carl Størmer 正是用这个想法证明了：形如 $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ 而 a、b、m、n 为整数的公式只有四条，即梅钦的一条，以及欧拉（Euler）、Hermann 和 Hutton 分别发现的三条。

旋转

乘以一个模为 1 的复数，就是把平面旋转（rotation）。正因如此，凡是涉及旋转和角的事情，复数都是最自然的语言：由本章稍后的几何，到电机工程中的交流电，以至量子力学中的波函数，莫不如此。在 Section 4.2 中，$\tan^{-1}$ 的加法公式（addition formula）来自一个巧妙的代换（substitution）；在这里，它来自复数的乘法。两者其实是同一个事实，只是从不同的角度去看。

思维技巧

把角转化为复数乘法

角的和之间的恒等式，就是乘积的辐角之间的恒等式。把乘积精确地算出来，再读出它的辐角。

复数的运算机械而精确，而处理反三角函数（inverse trigonometric functions）则容易出错。把后者转化为前者，往往是最快捷的证明途径。

延伸练习

1 **一个近亲。**试做 STEP II 2000，第 4 题（`step.maths.org/questions/00-s2-q4`）。这道题用与本节相同的方法，证明另一条关于 $\frac{\pi}{4}$ 的反正切公式：把复数相乘，然后读出辐角。

2 **欧拉公式。**考虑 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$，证明 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$。

3 **Hutton 公式。**证明 $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$。

4 **要多少项？**估计一下，要把 π 计算到小数点后 20 位，梅钦公式中的两个级数各需要多少项。然后用计算机实际算出最初几位。

延伸阅读

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。书中载有梅钦型公式的历史。
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed***（Springer）。生动地介绍古今各种计算 π 的方法。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。要从几何角度理解复数，这是最好的一本书。第 1 章讲的就是乘法即旋转加缩放。

5.2 单位根筛选法

题目

STEP I 1990，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/90-s1-q2`

引子

帕斯卡三角形（Pascal's triangle）同一行的二项式系数（binomial coefficients）加起来等于 2^n：只要在 $(1+x)^n$ 中代入 $x=1$ 即可。若改为代入 $x=-1$，便得到交错和，其值为 0；把两式相加，可知位于偶数位置的系数之和为 2^{n-1}，刚好是一半。所以偶数位置和奇数位置的项把总和平分。

那么每隔两项取一个、即每第三个系数又如何？没有任何实数 x 能够挑出位置 $0, 3, 6, \ldots$。但有一个复数可以。三次单位根（cube roots of unity）就像一个滤波器：对 1、ω 和 ω^2 取平均，幂 ω^k 在 k 是 3 的倍数时给出 1，否则给出 0。这个想法称为*单位根滤波器*（roots-of-unity filter），是*离散傅里叶变换*（discrete Fourier transform）的小型版本，而后者是有史以来最重要的算法之一。

动笔之前

想一想 ω 是 $z^3-1=0$ 的一个根。试把 z^3-1 因式分解。为甚么由此可得 $1+\omega+\omega^2=0$？

$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$。由于 $\omega^3=1$ 但 $\omega\neq 1$，ω 必定是第二个因式的根：$\omega^2+\omega+1=0$。从几何上看，1、ω 和 ω^2 是一个以原点为中心的等边三角形的顶点，它们的和就是该三角形的质心，即 0。

逐步解题

阶段 1　模与辐角

由 $1+\omega+\omega^2=0$，得 $1+\omega^2=-\omega$。因为 $\omega=e^{2\pi\mathrm{i}/3}$，所以 $-\omega=e^{\mathrm{i}\pi}e^{2\pi\mathrm{i}/3}=e^{5\pi\mathrm{i}/3}=e^{-\pi\mathrm{i}/3}$。故 $1+\omega^2$ 的模（modulus）为 1，辐角（argument）为 $-\frac{\pi}{3}$。同理，$1+\omega=-\omega^2=e^{\pi\mathrm{i}/3}$，其模为 1，辐角为 $\frac{\pi}{3}$。

阶段 2　滤波器

> **想一想**　当 k 是 3 的倍数时，$1+\omega^k+\omega^{2k}$ 等于甚么？不是倍数时又如何？

若 $3\mid k$，则 $\omega^k=1$，和为 3。若否，ω^k 是 ω 或 ω^2，而无论哪一种情况，都有 $1+\omega^k+\omega^{2k}=1+\omega+\omega^2=0$。因此，表达式 $\frac{1}{3}(1+\omega^k+\omega^{2k})$ 在 $3\mid k$ 时等于 1，否则等于 0：它是一个侦测 3 的倍数的探测器。

> **停一停，试一试**　把 $(1+\omega^r)^n$ 对 $r=1,2,3$ 相加，每一项都用二项式定理（binomial theorem）展开。你得到甚么？

由于 $\omega^3=1$，

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\omega^k+\omega^{2k}+1)=3\sum_{3\mid k}\binom{n}{k}.$$

另一方面，由阶段 1，

$$(1+\omega)^n+(1+\omega^2)^n+2^n=e^{n\pi\mathrm{i}/3}+e^{-n\pi\mathrm{i}/3}+2^n=2\cos\frac{n\pi}{3}+2^n.$$

两边除以 3 便得到所求公式。 ∎

阶段 3　两个计算

对于 $n=25$：$\frac{25\pi}{3}=8\pi+\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos\frac{25\pi}{3}=\frac{1}{2}$，于是

$$\binom{25}{0}+\binom{25}{3}+\cdots+\binom{25}{24}=\frac{33554432+1}{3}=11184811.$$

> **想一想**　第二个和需要的是满足 $k\equiv 2\pmod 3$ 的位置。怎样修改滤波器，使它侦测的是 $k\equiv 2$ 而不是 $k\equiv 0$？

把探测器平移：$\frac{1}{3}(1+\omega^{k-2}+\omega^{2(k-2)})$ 恰好在 $k\equiv 2\pmod 3$ 时等于 1。由于 $\omega^{-2}=\omega$

及 $\omega^{-4}=\omega^2$，由此可得

$$\sum_{k\equiv 2}\binom{n}{k}=\frac{1}{3}\Big(2^n+\omega(1+\omega)^n+\omega^2(1+\omega^2)^n\Big).$$

取 $n=24$，则 $(1+\omega)^{24}=e^{8\pi\mathrm{i}}=1$，同样 $(1+\omega^2)^{24}=1$，所以括号内的值为 $2^{24}+\omega+\omega^2=2^{24}-1$。由 $2^{24}=16777216$，

$$\binom{24}{2}+\binom{24}{5}+\cdots+\binom{24}{23}=\frac{16777215}{3}=5592405.$$ ■

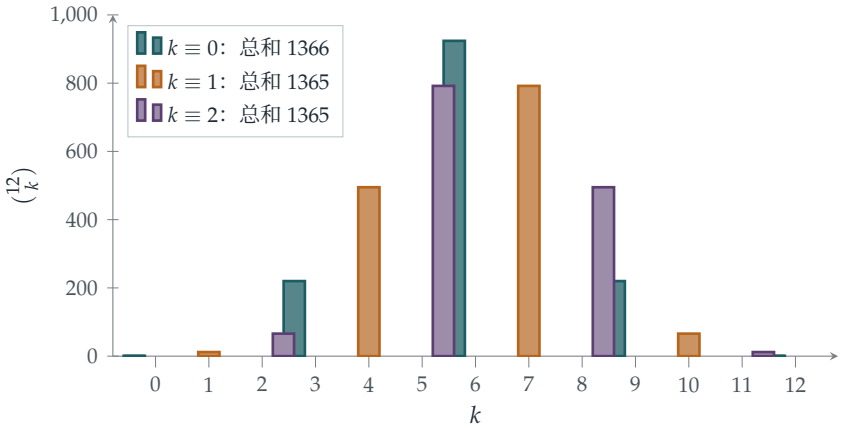


图 5.2.1 帕斯卡三角形的第 12 行，按 k 除以 3 的余数着色。三个类别的总和分别是 1366、1365 和 1365：各自几乎刚好是 $2^{12}=4096$ 的三分之一。单位根滤波器准确地预测了它们与 $\frac{4096}{3}$ 之间的微小差异：$+\frac{2}{3}$、$-\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$。

回顾

- **对单位根取平均，可按余数筛选。**$\frac{1}{3}\sum_r \omega^{rk}$ 等于 1 还是 0，视乎 3 是否整除 k。把多项式在各单位根处的值相加，便能挑出每第三个系数。
- **平移滤波器。**取平均之前先乘以 ω^{-rj}，便能挑出满足 $k\equiv j$ 的系数。
- **用复数求实数答案。**答案是整数，题目问的也是整数，但解题的路径却穿过了复平面。

背后的数学

离散傅里叶变换

把 3 换成任意的 N，并把 ω 换成 $e^{2\pi i/N}$。对于一列数 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$，以下各数

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

构成它的*离散傅里叶变换*，而正是滤波恒等式 $\sum_r \omega^{rk} = N$ 或 0，让你可以从 $\hat{a}_r$ 还原出 a_k。这个变换把一个信号分解成它的各个频率成分。1965 年，James Cooley 和 John Tukey 发表了一种方法，只需大约 $N \log_2 N$ 步而非 N^2 步便能把它算出，这就是*快速傅里叶变换*（fast Fourier transform，简称 FFT）；高斯（Gauss）早在 1805 年已发现本质上相同的想法，但从未发表。FFT 应用于音讯和图像压缩（MP3 和 JPEG）、流动电话信号、医学扫描仪，以及极大数字的乘法，并且经常获列为二十世纪最重要的算法之一。

生成函数

这个滤波器只是一个更宏大想法的其中一例：数列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 可以包装成一个多项式或幂级数（power series）$A(x) = \sum a_k x^k$，称为它的*生成函数*（generating function），而对数列进行的运算就变成对函数进行的运算。在 1 处求值，就是把数列求和；在单位根处求值，就是挑出各个剩余类（residue classes）；求导则是把各项以 k 加权。这样一来，许多计数问题都化为代数问题，而这正是第 9 章的核心技巧。同一个滤波器，配合五次单位根应用于 $(1+x)^n$，便会与正五边形和黄金比（golden ratio）扯上关系；我们会在 Section 6.1 继续探讨单位根的代数。

思维技巧

利用对称性来筛选

要从一个和之中挑出满足某个条件的项，可找一个函数，使它在你想要的项上取值 1、在其余的项上取值 0，而这个函数是由对称平均构造出来的。

对单位根取平均就是经典的例子。同一个原理——“对一个对称群取平均，以分离出你想要的部分”——在代数中随处可见，由单位根滤波器以至群表示论（representation theory of groups）皆然。

延伸练习

1 **偶数位置。**利用二次单位根（1 和 -1）的滤波器，证明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$。

2 **另一个余数。**求 $\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots$ 的公式，并验证三条公式加起来等于 2^n。

3 **每第四个。**利用 i，证明 $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots=\frac{1}{4}\left(2^n+2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$。

4 **整除性。**$\{1,2,\ldots,12\}$ 有多少个子集的元素个数可被 3 整除？有多少个子集的元素之和可被 3 整除？（第二问的提示：考虑 $\prod_{j=1}^{12}(1+x^j)$ 在三次单位根处的值。）

延伸阅读

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A. K. Peters；可于网上免费阅览）。一本引人入胜的生成函数入门书；单位根滤波器在书中很早便出现。
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count***（Mathematical Association of America）。以计数方法证明二项式恒等式。
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。内容包括离散傅里叶变换和 FFT。

5.3 因式分解 $z^{2n}+1$

题目

STEP III 2013，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/13-s3-q4`

引子

$\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8}$ 等于多少？每个因子都是涉及多重根号的难看数字，但它们的乘积却恰好是 $\frac{1}{8}$。等间隔角度的余弦之积，总是这样化简成简洁的数，而这道题正好解释了个中原因。窍门在于看出这些角度是某个多项式（polynomial）的根（roots）的辐角（argument），把该多项式因式分解（factorise），然后代入（substitute）一个巧妙选取的值。

在复数（complex numbers）范围内，每个多项式都可以完全分解成线性因式（linear factors）。在实数范围内，非实根以共轭对（conjugate pairs）的形式出现，每一对合并成一个实二次因式（real quadratic factor）。这两项事实在本题中都展现出来，而 $z^{2n}+1$ 明明完全没有实根，却可以写成实二次式之积，靠的正是第二项事实。

动笔之前

? **想一想** $z^{2n}=-1$ 的解在复数平面（complex plane）上的甚么位置？试就 $n=2$ 和 $n=4$ 把它们画出来。

它们的模（modulus）全都是 1，而辐角 θ 满足 $2n\theta=\pi+2m\pi$，所以 θ 是 $\frac{\pi}{2n}$ 的奇数倍。它们在单位圆（unit circle）上构成一个正 $2n$ 边形，并且旋转到没有任何顶点落在实轴上（图 5.3.1）。它们两两配成共轭对 $e^{\pm i\theta}$，即关于实轴互为镜像。

逐步解题

阶段 1　共轭对给出实二次式

$(z-e^{\mathrm{i}\theta})(z-e^{-\mathrm{i}\theta}) = z^2-(e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta})z+1 = z^2-2z\cos\theta+1.$ ■

阶段 2　因式分解

满足 $-\pi<\theta\le\pi$ 的 -1 的 $2n$ 次方根是 $e^{\pm\mathrm{i}\theta_k}$，其中

$$\theta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2n},\qquad k=1,2,\dots,n.$$

这是 $2n$ 个互不相同的数，全都是 $2n$ 次多项式 $z^{2n}+1$ 的根，所以它们就是该多项式的全部根，于是

$$z^{2n}+1=\prod_{k=1}^{n}(z-e^{\mathrm{i}\theta_k})(z-e^{-\mathrm{i}\theta_k})=\prod_{k=1}^{n}(z^2-2z\cos\theta_k+1).$$ ■

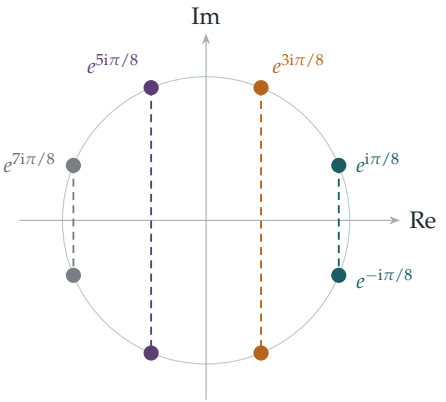


图 5.3.1　$z^8=-1$ 的八个解（即 $n=4$ 的情况）。它们配成四个共轭对，以虚线相连；每一对给出 z^8+1 的一个实二次因式 $z^2-2z\cos\theta_k+1$。

阶段 3　代入 $z=\mathrm{i}$

想一想　$\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta+1$ 等于甚么？当 n 是偶数时，$\mathrm{i}^{2n}+1$ 又等于甚么？

每个因式变成

$$\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}\cos\theta_k+1=-2\mathrm{i}\cos\theta_k,$$

所以右边是 $(-2\mathrm{i})^n\prod_k\cos\theta_k$。左边是 $\mathrm{i}^{2n}+1=(-1)^n+1$，当 n 是偶数时等于 2。而对于偶数 n，

$$(-2\mathrm{i})^n=2^n(-\mathrm{i})^n=2^n\big((-\mathrm{i})^2\big)^{n/2}=2^n(-1)^{n/2}.$$

因此

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\theta_k=\frac{2}{2^n(-1)^{n/2}}=(-1)^{\frac{1}{2}n}2^{1-n}. \qquad \blacksquare$$

当 $n=4$ 时，这正是引子中的乘积：$(-1)^2 2^{-3}=\frac{1}{8}$。

阶段 4 当 n 是奇数时

想一想 对于奇数 n，其中一个角 θ_k 等于 $\frac{\pi}{2}$。是哪一个？为甚么这会令代入 $z=\mathrm{i}$ 这一步在现有形式下毫无用处？

当 $k=\frac{n+1}{2}$ 时，$\theta_k=\frac{n\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}$，所以该因式是 z^2+1，它在 $z=\mathrm{i}$ 时等于零；两边都是 0，我们甚么也得不到。解决办法是先把这个因式除去，而题目给出的恒等式正是这样做的。

停一停，试一试 把因式分解式的两边除以 $1+z^2$，代入 $z=\mathrm{i}$，然后化简。你需要把余下的余弦两两配对。

除以因式 z^2+1（即 $k=\frac{n+1}{2}$ 的那一项），得

$$1-z^2+z^4-\cdots+z^{2n-2}=\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\left(z^2-2z\cos\theta_k+1\right).$$

当 $z=\mathrm{i}$ 时，左边每一项都是 $(-z^2)^j=1^j=1$，而共有 n 项，所以左边等于 n。右边是 $(-2\mathrm{i})^{n-1}\prod_{k\neq\frac{n+1}{2}}\cos\theta_k$。由于 $n-1$ 是偶数，$(-2\mathrm{i})^{n-1}=2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$。

现在把各角配对：$\theta_{n+1-k}=\pi-\theta_k$，所以 $\cos\theta_{n+1-k}=-\cos\theta_k$。余下的 $n-1$ 个因子组成 $\frac{n-1}{2}$ 个这样的对，其中 $k=1,\dots,\frac{n-1}{2}$，而每一对贡献 $-\cos^2\theta_k$。因此

$$n=2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}\cdot(-1)^{(n-1)/2}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k=2^{n-1}\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\cos^2\theta_k,$$

从而得到 $\prod\cos^2\theta_k=n2^{1-n}$。最后一个因子，即 $k=\frac{n-1}{2}$ 的那个，是 $\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n}$，与题目所写的一致。 $\blacksquare$

以 $n=3$ 验算：$\cos^2\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}=3\cdot 2^{-2}$。

回顾

- **知道根，就知道多项式。**一个多项式由它的根决定（只差一个常数倍），所以列出 $z^{2n}+1$ 的根，就得到它的因式分解。
- **代入一个巧妙的值。**取 $z=\mathrm{i}$，每个二次因式都变成余弦的倍数。
- **当代入后得到 $0=0$，就先做除法。**对于奇数 n，有一个因式在 $z=\mathrm{i}$ 时等于零，所以我们在代入之前先把它除去。

背后的数学

代数基本定理

$z^{2n}+1$ 可以在 $\mathbb{C}$ 上完全分解成线性因式，这是*代数基本定理*（fundamental theorem of algebra）的一个特殊情况：每个复系数的非常数多项式都有一个复根，因而可以完全分解成线性因式。高斯（Gauss）在 1799 年的博士论文中给出了第一个获广泛接受的证明，其后又多次重新探讨这条定理，提出新的证明。由此可推出，每个实多项式都可以分解成实线性因式和实二次因式，因为非实根以共轭对的形式出现，正如第 1 步所见。这条定理名为“代数”，实质却属于分析：每个证明都要用到实数的某种性质，例如连续性（continuity），而你会在复分析（complex analysis）的入门课程中见到其中一个最巧妙的证明。

正弦与余弦之积

这个方法可以给出一整族恒等式。以 z^n-1 取代 $z^{2n}+1$，就得到

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

它的几何形式在 Section 5.4 中有证明。这类恒等式会在振动系统的分析中出现（以弹簧相连的 n 个质点的频率涉及 $\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$），也会在计数问题中出现（某些图的生成树（spanning trees）数目，以及长方形的多米诺骨牌铺砌（domino tilings）数目，都可以用余弦之积表示）。Kasteleyn 在 1961 年提出的 $m\times n$ 长方形多米诺骨牌铺砌公式，是一个双重乘积，其中各项是含 $\cos^2\frac{j\pi}{m+1}$ 和 $\cos^2\frac{k\pi}{n+1}$ 的式子。

思维技巧

从根到乘积

要计算等间隔角度的三角函数值之积，先看出它们来自某个简单多项式的根，再作因式分解，然后代入一个方便的值。

选取甚么值，是一门艺术：本题中 $z=\mathrm{i}$ 把每个二次因式变成一个余弦。其他选择（例如 $z=1$ 或 $z=-1$）会给出其他恒等式。

延伸练习

1 **一个七边形的乘积。**利用第 (ii) 部分，取 $n=7$，证明 $\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{5\pi}{14}=\frac{\sqrt{7}}{8}$。然后证明 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$。（提示：利用 $\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$ 把各角联系起来，或者反复使用恒等式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$。）

2 **另一个代入。**在因式分解式中代入 $z=1$，证明

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}=2^{\frac{1}{2}-n}.$$

3 **分解 z^6+1。**把 z^6+1 写成三个实二次式之积，并把它们乘开以验算答案。

4 **正弦。**以类似方法分解 $z^{2n}-1$，再除以 z^2-1，证明

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

延伸阅读

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章讲述单位根（roots of unity）与多项式，配有精美的图画。
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger, *The Fundamental Theorem of Algebra***（Springer）。收录这条定理的多个证明，分别来自分析、代数和拓扑，为大学本科生而写。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。一部关于 $\sqrt{-1}$ 的历史，包括单位根及其应用。

5.4 正多边形中的距离

题目

STEP III 2016，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/16-s3-q7`

引子

在半径为 1 的圆内画一个正七边形（regular heptagon）。从其中一个顶点出发，画出连往其余各顶点的六条弦（chord），量度它们的长度，再把这六个长度乘起来。答案恰好是 7。若换成正 100 边形，从一个顶点出发的 99 条弦，长度之积恰好是 100。

这么简洁的结果，为甚么会成立？各条弦的长度本身并不整齐（$2\sin\frac{\pi}{7}$、$2\sin\frac{2\pi}{7}$ 等等）。这道题目说明，这个结果其实是一个简单代数恒等式在几何上的投影，这个恒等式就是 z^n-1 按单位根（roots of unity）所作的因式分解（factorisation）；题目同时说明，平面上的距离就是复数（complex number）的模（modulus）。

动笔之前

> **想一想** 把多边形的顶点放在 n 次单位根上，即 $X_k=\omega^k$。若 P 是点 z，$|PX_k|$ 用 z 表示是甚么？那么所有距离之积又是甚么？

$|PX_k|=|z-\omega^k|$，而所有距离之积是 $|(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})|$，按题目第一部分，这等于 $|z^n-1|$。n 个距离之积变成了单独一个模。余下的工夫，全在于巧妙地选取 z。

逐步解题

阶段 1 因式分解

每个 ω^k 都满足 $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$，所以 $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ 都是 $z^n - 1$ 的根。它们互不相同（它们的辐角（argument）$\frac{2\pi k}{n}$ 各不相同，且都在 0 与 2π 之间），所以它们就是这个首项系数（leading coefficient）为 1 的 n 次多项式的全部 n 个根，于是 $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega^k)$。
■

阶段 2 垂直平分线上的一点

把图形旋转，使得 $X_k = \omega^k$。与 $X_0 = 1$ 和 $X_1 = \omega$ 等距的点，组成 X_0X_1 的垂直平分线（perpendicular bisector），即通过 O 而倾角为 $\frac{\pi}{n}$ 的直线。

想一想 所以 P 就是 $z = te^{\mathrm{i}\pi/n}$，其中 t 是某个实数（可正可负），而 $|OP| = |t|$。z^n 是甚么？

$z^n = t^n e^{\mathrm{i}\pi} = -t^n$。所以

$$|PX_0| \times \cdots \times |PX_{n-1}| = |z^n - 1| = |-t^n - 1| = |t^n + 1|.$$

若 n 是偶数，$t^n = |t|^n \geq 0$，所以上式等于 $|OP|^n + 1$。 ■

停一停，试一试 n 是奇数时又如何？分开考虑 $t > 0$ 和 $t < 0$ 两种情况，并说明每种情况在几何上代表甚么。

若 n 是奇数，t^n 与 t 同号。

- 若 $t \geq 0$，即 P 与 X_0X_1 的中点位于 O 的同一侧，则所求之积是 $|OP|^n + 1$。
- 若 $t < 0$，即 P 位于 O 的另一侧（朝向与边 X_0X_1 相对的顶点），则 $t^n = -|OP|^n$，所求之积是 $\left|1 - |OP|^n\right|$。

当 n 是奇数时，通过 O 而垂直于 X_0X_1 的直线会穿过另一侧的一个顶点；在第二种情况下，当 P 就是该顶点（$|OP| = 1$）时，所求之积等于零，这是理所当然的，因为此时其中一个距离是零。

阶段 3 从一个顶点出发的弦

想一想 现在 $P = X_0$，其中一个距离 $|X_0X_0|$ 是零，所以 $|z^n - 1| = 0$ 派不上用场。哪一个多项式以 $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ 为根，却不以 1 为根？

把 $z^n - 1$ 除以 $z - 1$，

$$(z - \omega)(z - \omega^2)\cdots(z - \omega^{n-1}) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}.$$

右边是一个多项式，所以这个等式对所有 z 都成立，包括 $z = 1$，此时它的值是 n。在

$z = 1$ 处取模，

$$|X_0X_1| \times |X_0X_2| \times \cdots \times |X_0X_{n-1}| = |1-\omega|\,|1-\omega^2| \cdots |1-\omega^{n-1}| = n. \qquad \blacksquare$$

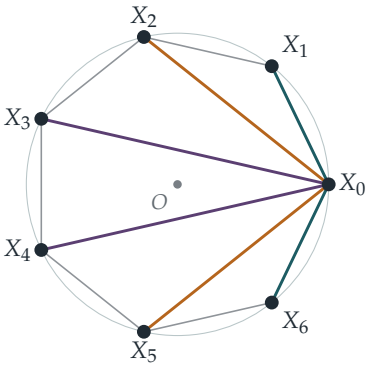


图 5.4.1 内接于半径为 1 的圆的正七边形。从 X_0 出发的六条弦，长度为 $2\sin\frac{k\pi}{7}$，约为 0.868（蓝绿色）、1.564（琥珀色）和 1.950（紫红色），每个长度各出现两次。它们的积恰好是 7。

回顾

- **距离就是模。**$|PX_k| = |z-\omega^k|$，所以距离之积就是积的模，而这个积有闭合形式（closed form）。
- **利用对称性选取坐标。**把图形旋转，使顶点成为单位根，再利用通过 O 的对称轴，z^n 便容易计算。
- **先消去零因子，再代入。**一如 Section 5.3，先除去在所关注的点上等于零的因子，代入才行得通。

背后的数学

科茨定理

第 (i) 部分是科茨（Roger Cotes）的一条定理。科茨是剑桥一位才华横溢的年轻数学家，曾编订牛顿（Newton）《自然哲学的数学原理》（*Principia*）的第二版，1716 年去世，年仅三十三岁（牛顿曾说："假如他还在世，我们或许已经学到一点东西了。"）。科茨发现，若 P 位于由 O 出发、通过正 n 边形一个顶点的射线上，则 P 到各顶点的距离之积是 $\big||OP|^n - 1\big|$；若 P 位于通过某条边中点的射线上，则这个积是 $|OP|^n + 1$。他没有用到复数，就凭这个结果把 $x^n \pm 1$ 分解成实二次因式，而这正是他计算有理函数（rational

function）积分时所需要的。这条定理在他去世后，于 1722 年才发表。

正弦之积

由于 $|1-\omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$，第 (ii) 部分说的就是

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

这与 Section 5.3 中的余弦之积互相配对。另一个相关的积给出 z^n-1 的判别式（discriminant）：所有成对的相异 n 次单位根之间距离的平方，乘起来等于 n^n。判别式量度一个多项式的根彼此相隔多远，在多项式和数域（number field）的代数理论中占有核心地位，我们会在第 6 章讨论。

静电学与等距分布

这个结果还有一个物理上的解读。把 n 个相等的电荷放在一个圆上；令势能（potential energy）最小的排列（采用二维静电学的对数势）就是正多边形，而能量所涉及的正是 $\sum \ln|X_jX_k|$，即距离之积的对数。“分布得尽量疏散”的点，在数值分析（numerical analysis）中十分重要（见 Section 3.6，当中最佳的插值点是由正多边形经 $x=\cos\theta$ 得来的），在随机矩阵（random matrix）理论中亦然。

思维技巧

用复数把几何化为代数

平面上的点是复数，距离是模，正多边形是单位根。距离之积就变成多项式的模。

经过这样的转换，像 z^n-1 的因式分解这类代数恒等式，便可以用来证明一些很难直接看出的几何事实。

延伸练习

1. **检查小的情况。**就正方形（$n=4$）和等边三角形（$n=3$）直接验证第 (ii) 部分。
2. **通过顶点。**证明：若 P 位于由 O 出发、通过 X_0 的射线上，则 $|PX_0|\times\cdots\times|PX_{n-1}| = \big||OP|^n-1\big|$。

3 **平均距离。**利用第 (ii) 部分和 Section 3.2 的算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality），证明从 X_0 出发的 $n-1$ 条弦，平均长度至少是 $n^{1/(n-1)}$。就 $n=6$ 求出实际的平均值 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$，并加以比较。

4 **所有的弦。**较难证明：内接于单位圆的正 n 边形，全部 $\binom{n}{2}$ 条弦的长度之积是 $n^{n/2}$。

延伸阅读

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。用复数处理几何，插图精美。
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems***（Mathematical Association of America）。收录了好几道关于正多边形的精巧问题。
- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher***（Cambridge University Press）。科茨的传记，并介绍他的数学工作。

5.5 名不副实的有理角

题目

STEP III 2022，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

引子

中学几何里遇到的角，度数通常是整数：30°、45°、60°。它们的余弦是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\frac{1}{2}$ 这类数。反过来又如何？如果余弦是个简单的分数，例如 $\frac{1}{3}$，那么这个角的度数会不会也是个漂亮的数？

$\cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.528779\ldots^\circ$ 这个角在科学中随处可见。它是正四面体（regular tetrahedron）两个面之间的夹角，而它的补角 109.47° 则是甲烷分子中两条化学键之间的夹角。本题要证明这个角的度数不是有理数（rational number）：不是 $70\frac{1}{2}$，不是 $\frac{1411}{20}$，也不是任何分数。它的小数展开永不循环。这个看似冷僻的事实，解决了大卫·希尔伯特（David Hilbert）在 1900 年提出的著名问题之一。

动笔之前

想一想 假设 θ 是有理数，设 $\theta = \frac{p}{q}$ 度。试找出一个正整数 k，使得 $\sin(k\theta) = 0$。

取 $k = 180q$：这时 $k\theta = 180p$ 度，是半圈的整数倍，所以 $\sin(k\theta) = 0$。因此，度数为有理数的角，总有某个倍数会落在 180° 的倍数上。要证明 θ 是无理数（irrational number），只需证明没有任何倍数 $k\theta$ 的正弦为零。第 (ii) 部分的做法是：假如这样的 k 存在，就取其中最小的一个，然后推出矛盾（contradiction）。这又是 Section 1.3 的良序原理（well-ordering principle）。

逐步解题

阶段 1　倍角公式

> **想一想**　写出 $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$，并提出因子 $\cos^k\theta$。括号内剩下甚么？

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k = \cos^k\theta \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathrm{i}^j \tan^j\theta$。虚部（imaginary part）来自奇数 $j = 2m+1$ 的各项，这时 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}(-1)^m$：

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m+1}\theta \\ &= \sin\theta\cos^{k-1}\theta \sum_{m} (-1)^m \binom{k}{2m+1} \tan^{2m}\theta.\end{aligned}$$

由于 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$，这就是所求的公式。■实部（real part）来自偶数 $j = 2m$ 的各项，由此得

$$\cos k\theta = \cos^k\theta \left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

阶段 2　奇偶性

现在 $\sec\theta = a$ 是奇整数，所以 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$ 是偶整数。而且 θ 严格介乎 0° 与 90° 之间，所以 $\sin\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq 0$。

> **想一想**　如果 $\sin(k\theta) = 0$，括号 $k - \binom{k}{3}(a^2-1) + \cdots$ 必须等于零。第一项之后的每一项都是 $a^2 - 1$ 的倍数。由此可知 k 有甚么性质？

括号等于 k 加上若干个偶数 $a^2 - 1$ 的倍数之和。假如 k 是奇数，括号就是奇数，而奇整数不可能等于 0。所以 k 必定是偶数。

于是 $\sin(k\theta) = 2\sin(\tfrac{1}{2}k\theta)\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$。但 $\tfrac{1}{2}k$ 是比 k 小的正整数，根据 k 的最小性，$\sin(\tfrac{1}{2}k\theta) \neq 0$。因此 $\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$。 ■

阶段 3　矛盾

> **停一停，试一试**　取 $m = \tfrac{1}{2}k$，套用余弦公式。为甚么 $\cos(m\theta)$ 永远不可能是零？

根据第 1 步，$\cos(m\theta) = a^{-m}\left(1 - \binom{m}{2}(a^2-1) + \binom{m}{4}(a^2-1)^2 - \cdots\right)$。括号等于 1 加上若干个偶数 $a^2 - 1$ 的倍数，所以它是奇数，自然不等于零。因此 $\cos(m\theta) \neq 0$，与第 2 步矛盾。

所以不存在使 $\sin(k\theta) = 0$ 的正整数 k。（假如有这样的正整数，其中必有最小的一个，而我们刚刚证明了这个最小的不可能存在。）根据动笔之前的观察，θ 的度数不可能是有理数。 ■

阶段 4 余切版本

? **想一想** 如果 $\cot\phi = \frac{1}{b}$，$\sec^2\phi - 1$ 是多少？它是偶数吗？

$\tan\phi = b$，所以 $\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$；由于 b 是偶数，这个数是偶数（其实更是 4 的倍数）。此外 $0° < \phi < 90°$，所以 $\sin\phi$ 和 $\cos\phi$ 都不等于零。完全相同的论证现在同样适用：如果 k 是使 $\sin(k\phi) = 0$ 的最小正整数，括号 $k - \binom{k}{3}b^2 + \cdots$ 必须等于零，于是 k 必为偶数；然后 $\cos(\frac{1}{2}k\phi) = 0$；但余弦的括号 $1 - \binom{m}{2}b^2 + \cdots$ 是奇数。这就产生矛盾，所以 ϕ 是无理数。 ■

例如，$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \tan^{-1}2 \approx 63.43°$ 是无理数。

回顾

- **有理角的倍数具周期性。**这样重新表述之后，无理性就变成一个关于所有 k 的 $\sin(k\theta)$ 的命题。
- **奇偶性论证。**以模 2 计算，可知某些整数是奇数，因而不等于零。方法简单，却一锤定音。
- **最小反例。**假设有最小的 k，再证明必定有更小的一个（这里是 $\frac{1}{2}k$），正是第 1 章的良序论证。

背后的数学

无理旋转

如果 θ 的度数是有理数，不断重复旋转 θ，最终会回到起点。如果 θ 是无理数，就永远不会回到起点，而且会出现奇妙的现象：各点 $k\theta$（以模 360° 计算）会均匀地散布在整个圆周上，与每一个角都可以任意接近。这就是*等分布定理*（equidistribution theorem），由赫尔曼．外尔（Hermann Weyl）、瓦茨瓦夫．谢尔宾斯基（Wacław Sierpiński）和 Piers Bohl 在 1910 年前后各自独立证明。图 5.5.1 显示 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 的首 40 个倍数：它们已经逐渐布满圆周，而且永远不会重复。

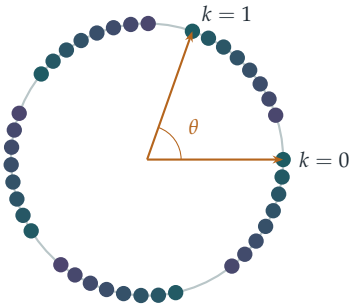


图 5.5.1　位于角 $k\theta$ 的各点，其中 $k = 0, 1, \ldots, 39$，而 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$（颜色随 k 增加由蓝绿色渐变为紫红色）。由于 θ 是无理数，没有任何一点会重复出现，而各点均匀地散布在整个圆周上。

希尔伯特第三问题

1900 年，大卫．希尔伯特为新世纪列出了二十三个问题。第三个问题是：如果两个多面体（polyhedron）体积相同，是否总可以把其中一个切成有限多块多面体，再重新拼合成另一个？（对平面上的多边形而言，答案是肯定的：这就是 Wallace–Bolyai–Gerwien 定理。）不出一年，希尔伯特的学生马克斯．德恩（Max Dehn）证明了答案是*否定*的：正四面体不能切开再重新拼合成体积相同的立方体。德恩的证明为每个多面体赋予一个由其棱长和二面角（dihedral angle）构成的量，现称为*德恩不变量*（Dehn invariant），它在切割和重新拼合之下保持不变；立方体的德恩不变量是零，而正四面体的德恩不变量不等于零，原因正是二面角 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 不是 $180°$ 的有理数倍。这恰恰就是本题所证明的事实。

尼云定理

这个结论可以推到多远？1956 年，伊凡．尼云（Ivan Niven）证明：如果 θ 的度数是有理数，而且 $\cos\theta$ 是有理数，那么 $\cos\theta$ 只能是 0、$\pm\frac{1}{2}$、± 1 其中之一。所以余弦为有理数的“漂亮”角，就只有 $0°$、$60°$、$90°$、$120°$、$180°$ 以及与它们相关的角。证明用到这个事实：$2\cos\theta$ 是某个整数系数首一多项式（monic polynomial）的根，即*代数整数*（algebraic integer），也就是 Section 1.3 末尾提到的概念。

思维技巧

以奇偶性证明不等于零

要证明一个整数算式永不为零，可证明它恒为奇数：把它以模 2 化简。

这个简单的想法与最小反例（minimal counterexample）结合，就证明了一个深刻的事实。以一个小的数为模作化简，从而排除某个方程成立的可能，是数论中最常用的手法之一，Section 1.5 便是一例。

延伸练习

1 **正四面体。**证明正四面体两个面之间的夹角是 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$，并证明甲烷分子中两条化学键（由正四面体的中心连到两个顶点）之间的夹角是 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$。

2 **3–4–5 三角形。**证明 3–4–5 三角形最小的角的度数是无理数。(提示：这个角是 $\cot^{-1}\frac{4}{3}$；可改写上述论证，或考虑高斯整数（Gaussian integer）$4+3\mathrm{i}$ 的各次幂，并证明它们全都不是实数。)

3 **为甚么 a 要是奇数？**当 $a=2$ 时，论证在哪里出了问题？$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 是有理数吗？

4 **尼云定理的简单情况。**找出介乎 0° 与 90° 之间、度数为整数而 $\cos\theta$ 为有理数的所有角 θ，并验证你所列的结果与尼云定理吻合。

延伸阅读

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。书中载有关于三角函数有理数值的尼云定理。
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，论希尔伯特第三问题的一章。对德恩的解法有精彩的阐述。
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers***（A. K. Peters）。讲述全部二十三个问题背后的故事。

5.6 费马点

题目

STEP III 2000，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/00-s3-q3`

引子

三条村庄想兴建一个把它们全部连接起来的道路网络，而且路程愈短愈好。交汇处应该设在哪里？大约在 1640 年，费马（Pierre de Fermat）提出了这样一个问题：在三角形内找出使 $PA + PB + PC$ 最小的点 P。托里拆利（Evangelista Torricelli）解决了这个问题：从这一点望向三条边，所见的角都是 120°。

本题利用复数（complex numbers）来证明这一点的一个漂亮作图法。在三角形的每条边上向外作一个等边三角形（equilateral triangle），再把每个新顶点与原三角形中相对的顶点连起来。这三条直线相交于同一点，即*费马点*（Fermat point），而且三条线段的长度都相同，这个长度正是道路总长的最小值。有了复数，再加上一条关于 $e^{i\pi/3}$ 的恒等式，整件事只需几行代数运算。

动笔之前

想一想 A、B 和 C 在哪里？它们的辐角（argument）是多少？OA、OB 和 OC 彼此之间的夹角是多少？

$A = p$ 位于正实轴上（辐角为 0°）。$B = q\alpha^2 = qe^{2\pi i/3}$ 的辐角是 120°。$C = -r\alpha = re^{i\pi}e^{i\pi/3}$ 的辐角是 240°。因此原点是三角形内的一点，从这一点望向三个顶点，方向两两相隔 120°，距离分别是 p、q 和 r。按照这个设置，原点就是费马点；本题要证明的，是等边三角形作图法确实能找到它。

逐步解题

阶段 1　关键恒等式

$\alpha^3 = e^{i\pi} = -1$，所以 α 是 $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$ 的一个根。由于 $\alpha \neq -1$，故 $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$，即 $1+\alpha^2 = \alpha$。 ■

有两个推论稍后会用得着：$1-\alpha = -\alpha^2$，以及 $\alpha - \alpha^2 = 1$。此外，$1-\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = e^{-i\pi/3}$，即 α 的共轭复数（complex conjugate）。

阶段 2　把等边三角形看成旋转

> **想一想**　三角形 CAN 是等边三角形，顶点按顺时针方向标记。假如你站在 C，怎样从 A 走到 N？试以 $A-C$ 表示 $N-C$。

按顺时针方向依次经过 C、A、N，可知点 N 是把 A 绕 C 顺时针旋转（rotation）60° 而得。乘以 $e^{-i\pi/3} = 1-\alpha$ 相当于顺时针旋转 60°，所以

$$\begin{aligned} N &= C + (1-\alpha)(A-C) = -r\alpha + (1-\alpha)(p+r\alpha) \\ &= (1-\alpha)p + r(\alpha - \alpha^2 - \alpha) = (1-\alpha)p - \alpha^2 r. \end{aligned}$$ ■

（顺时针而非逆时针旋转，会使 N 落在 CA 的另一侧，与原点分处两边，即在三角形之外。）

> **停一停，试一试**　用同样的方法求出 L 和 M，并利用第 1 阶段的恒等式化简。

同理，$L = A + (1-\alpha)(B-A)$ 及 $M = B + (1-\alpha)(C-B)$：

$$\begin{aligned} L &= p + (1-\alpha)(q\alpha^2 - p) = \alpha p + (\alpha^2 - \alpha^3)q = \alpha p + (\alpha^2+1)q = \alpha(p+q), \\ M &= q\alpha^2 + (1-\alpha)(-r\alpha - q\alpha^2) = q\alpha^3 + r(\alpha^2 - \alpha) = -q - r. \end{aligned}$$

再利用 $1-\alpha = -\alpha^2$，可得 $N = -\alpha^2 p - \alpha^2 r = -\alpha^2(p+r)$。

阶段 3　三条通过原点的直线

> **想一想**　比较 $L = \alpha(p+q)$ 与 $C = -r\alpha$。你留意到甚么？对 M 与 A，以及 N 与 B，也作同样的比较。

L 是 α 的正数倍，而 C 是 α 的负数倍。所以 L 和 C 分别位于 O 的两侧，并且在同一条通过 O 的直线上；线段 LC 因而通过原点，长度为 $|L-C| = |\alpha|(p+q+r) = p+q+r$。

同样地，$M = -(q+r)$ 和 $A = p$ 都在实轴上，分别位于 O 的两侧，所以 MA 通过 O，

长度为 $p+q+r$。而 $N=-\alpha^2(p+r)$ 和 $B=q\alpha^2$ 都在通过 O、方向为 α^2 的直线上，并且分处两侧，所以 NB 通过 O，长度为 $p+q+r$。 ■

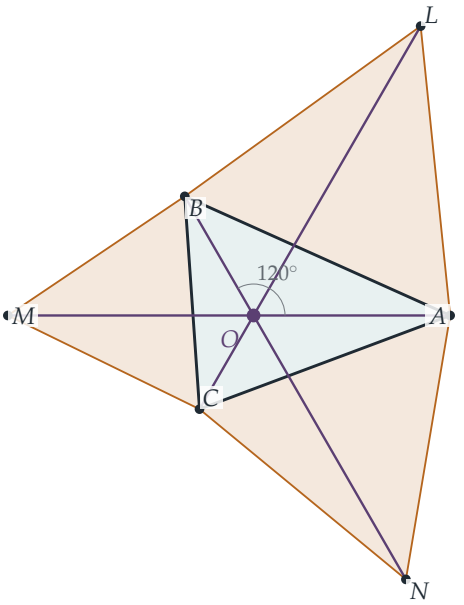


图 5.6.1 费马点，其中 $p=2$，$q=1.4$，$r=1.1$。在 ABC 的各边上向外作等边三角形（琥珀色）。直线 LC、MA 和 NB（紫红色）全部通过原点 O，而 ABC 的各边在该点所对的角均为 120°；每条线段的长度都是 $p+q+r=4.5$。

回顾

- **旋转即乘法。**作等边三角形,就是把一个顶点绕另一个顶点旋转 60°,也就是乘以 $e^{\pm i\pi/3}$。
- **巧选坐标。**把费马点放在原点，并让各顶点沿 1、α^2、$-\alpha$ 这三个方向排列，每条算式都随即大幅简化。
- **一条恒等式，反复使用。**每一步化简都来自 $\alpha^2-\alpha+1=0$ 和 $\alpha^3=-1$。

背后的数学

为甚么费马点使距离最小

为甚么 $PA+PB+PC$ 会在各边所对的角均为 120° 的那一点取得最小值？以下是一个精彩的论证。把整幅图绕 B 旋转 60°，把 A 送到 L'（即 AB 上等边三角形的顶点），把 P 送到 P'。三角形 BPP' 是等边三角形，所以 $PB=PP'$，而且 $PA=P'L'$。于是

$PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$，这是一条由 L' 到 C 的路径的长度。它至少等于 $|L'C|$，而等号恰好在路径成一直线时成立，这种情况出现于 P 处的各个角均为 120° 之时。所以总长度的最小值是 $|LC| = p + q + r$，与题目所得的结果一致。（这个论证成立的前提是三角形的每个角都小于 120°；否则最小值会在钝角的顶点取得。）

肥皂膜与斯坦纳树

把一个装有三根小钉（代表 A、B、C）的框架浸入肥皂水中：肥皂膜会令其表面张力能量减至最小，形成三面薄壁，在费马点以 120° 相交。若有更多的点，最短的连接网络是一棵*斯坦纳树*（Steiner tree），其中有额外的交汇点，每个交汇点都有三条边以 120° 相交。一般而言，求斯坦纳树在计算上十分困难（这是一个 NP 困难（NP-hard）问题），但它们在实际应用中相当重要，例如设计道路网络、管道网络以及电脑晶片上的线路。

拿破仑定理

同一个图形中还藏着另一件瑰宝：在任意三角形的三边上所作的三个等边三角形，它们的*中心*构成一个等边三角形。传统上这个结果归功于拿破仑（Napoleon Bonaparte）（他是一位热衷数学的业余爱好者），不过并无证据显示这是他发现的。这个定理同样可以用复数简短地证明，用到的正是 $1 + \alpha^2 = \alpha$。

思维技巧

选择切合问题的坐标

把最重要的点放在原点，并按照问题的对称性来安排各个方向。选得好，代数运算几乎可以变得轻而易举。

在这里，原点就是费马点，而三个顶点分别位于 -1 的三个立方根的方向上（或相差一个正负号）。若改用其他坐标，同样的计算会繁复得多。

延伸练习

1. **检查字母次序。**证明若各等边三角形的顶点按逆时针方向标记（即向内作），则三条直线一般不会通过 O。

2. **拿破仑定理。**证明等边三角形 ABL 的中心是 $\frac{1}{3}(A + B + L)$。利用上文的表达式，证明三个中心构成一个等边三角形。

3 **最小值。**取 $p = 2$, $q = 1.4$, $r = 1.1$, 分别就 P 位于每个顶点以及位于形心（centroid）$\frac{1}{3}(A + B + C)$ 的情况计算 $PA + PB + PC$，并验证所得的值全部大于 4.5。

4 **等边三角形的判别法。**证明 z_1、z_2、z_3 构成等边三角形（不论方向），当且仅当 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$。

延伸阅读

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 7 章讨论费马点、斯坦纳树和肥皂膜。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（Mathematical Association of America）。以复数证明多个几何定理，程度正好与本节相若。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 1 章包括拿破仑定理及其他几何结果。

5.7 作为映射的复指数函数

题目

STEP II 1997，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/97-s2-q5`

引子

你所认识的指数函数（exponential function）是一条曲线 $y = e^x$。但复变量的函数却无法画成曲线：它的输入是平面上的一点，输出也是平面上的一点。要想像这样的函数，应把它看成一个映射（map），也就是一个变换（transformation）：它把一个平面上的每一点搬到另一个平面上的某一点，沿途把图形拉伸、弯曲。

题目中的公式是 $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = e^{u+\mathrm{i}v} = e^w$。作为映射来看，复指数函数（complex exponential）做了一件奇妙的事：它把平面上的一条水平带状区域卷成整个平面（除去原点），把铅垂线绕成圆，把水平线铺成射线。又因为它是绕圈卷起来的，所以它不是一对一（one-to-one）的：每一点都有无穷多个点映到它那里。这正是复对数（complex logarithm）“多值”（multi-valued）的原因，也是复分析（complex analysis）最早带来的惊奇之一。

动笔之前

想一想 $z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ 的模（modulus）和辐角（argument）用 u 和 v 表示是甚么？

$|z| = e^u$，而 $\arg z = v$（可相差 2π 的倍数）。所以 w 的实部 u 以指数方式控制与原点的距离，而虚部 v 则控制方向。单凭这一点观察，题目几乎每一部分都能解答。

逐步解题

阶段 1　解 $e^{w} = \mathrm{i}e$

想一想　$\mathrm{i}e$ 的模和辐角是甚么?

$|\mathrm{i}e| = e$，而 $\arg(\mathrm{i}e) = \frac{\pi}{2}$。所以我们需要 $e^{u} = e$，得 $u = 1$，并且 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$，其中 k 为任意整数。方程的解为

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

解有无穷多个，沿铅垂方向每隔 2π 有一个。

阶段 2　格线的像

在铅垂线 $u = c$ 上，$|z| = e^{c}$ 固定不变，而 v 则在变动：它的像（image）是以原点为圆心、半径为 e^{c} 的圆，当 v 取遍所有实数时，这个圆被绕了无穷多圈。

在水平线 $v = d$ 上，$\arg z = d$ 固定不变，而 $|z| = e^{u}$ 取遍所有正值：它的像是由原点出发、方向角为 d 的开射线（半直线），不包括原点本身。直线 $v = d$ 与 $v = d + 2\pi$ 给出同一条射线。

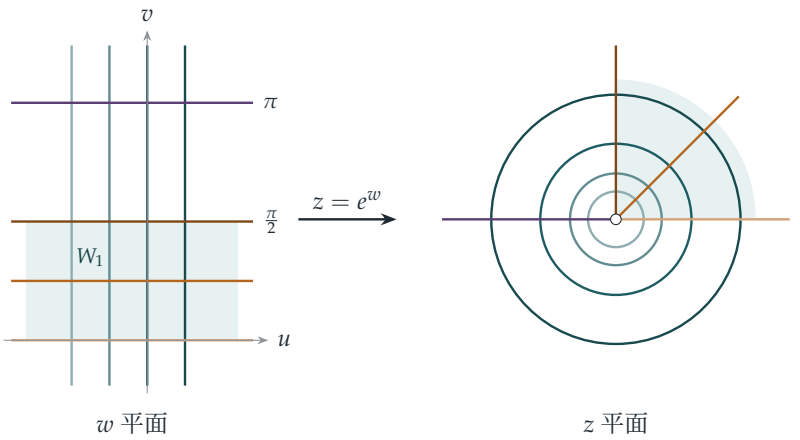


图 5.7.1　把复指数函数看成映射。w 平面上的铅垂线 $u = c$（蓝绿色）映到半径为 e^{c} 的圆；水平线 $v = d$（琥珀色、紫红色）映到方向角为 d 的射线。阴影带状区域 $W_1 = \{0 < v < \frac{\pi}{2}\}$ 恰好映满第一象限。留意两幅图中的格线都相交成直角：这个映射保持角度不变。原点（空心圆圈）永远不会被映到。

阶段 3　一对一的部分

想一想 哪些点 w 会映入第一象限 $x>0$、$y>0$？为甚么这个集合太大，不能与该象限构成一一对应（one-to-one correspondence）？

z 位于开的第一象限，当且仅当 $\arg z$ 严格介乎 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间（模 2π），而模可取任意值。所以 w 必须满足 $0<v<\frac{\pi}{2}$ 或 $2\pi<v<\frac{5\pi}{2}$ 或 ...：共有无穷多条水平带状区域，每一条都映满整个象限。任取其中一条，它都与该象限一一对应，因为在一条带状区域之内，u 和 v 由 $|z|$ 和 $\arg z$ 唯一确定。所以我们可以取

$$W_1=\{u+\mathrm{i}v:0<v<\tfrac{\pi}{2}\},\qquad W_2=\{u+\mathrm{i}v:2\pi<v<\tfrac{5\pi}{2}\}.$$

停一停，试一试 现在试在 w 平面上找出两个集合，使它们各自与去心圆盘（punctured disc）$0<|z|<1$ 一一对应。

$|z|<1$ 即 $e^u<1$，亦即 $u<0$；而每一个辐角都必须恰好被覆盖一次，所以 v 的取值范围应是一个长度恰为 2π 的区间，包括其中一个端点而不包括另一个。例如

$$W_3=\{u+\mathrm{i}v:u<0,\ 0\le v<2\pi\},\qquad W_4=\{u+\mathrm{i}v:u<0,\ -\pi<v\le\pi\}.$$

这些都是半带状区域，一条边包括在内，另一条边不包括在内。（若两条边都包括在内，正实轴上的点便会被映到两次；若两条边都不包括，这些点便会被遗漏。）■

回顾

- **模和辐角把变量分开。** $|e^w|=e^{\operatorname{Re}w}$，而 $\arg e^w=\operatorname{Im}w$，所以 w 的实部和虚部分别独立地控制距离和方向。
- **把复函数想像成映射。** 追踪格线被映到哪里，便能清楚看见一个无法画成图像的函数的面貌。
- **周期性破坏单射性（injectivity）。** $e^{w+2\pi\mathrm{i}}=e^w$，所以这个映射是多对一的，必须限制在一条高度为 2π 的带状区域上，才有反函数。

背后的数学

复对数

在实数线上，ln 是 exp 的反函数。在复平面上，对每一个 $z\neq 0$，方程 $e^w=z$ 都有无穷多个解 w，彼此相差 $2\pi\mathrm{i}$ 的倍数，所以“$\log z$”并不是单独一个数。要得到一个真正的函数，就必须选定一个分支（branch），也就是选定一条像 W_3 或 W_4 那样的带状区域：主

分支（principal branch）取 $-\pi < \arg z \leq \pi$。每一个分支都必然在某处有跳跃，跳跃发生在由原点出发的一条射线上，这条射线称为**分支割线**（branch cut）。黎曼（Bernhard Riemann）在 1851 年的博士论文中提出了解决办法：不再坚持对数函数要定义在一个平面上。它其实定义在一道无穷的螺旋楼梯上，即一个**黎曼曲面**（Riemann surface）；在这个曲面上，对数函数是单值而且光滑的。时至今日，黎曼曲面在几何、数论和弦论中都占有核心地位。

角度保持不变

再看一次图 5.7.1。铅垂和水平的格线相交成直角，它们变成的圆和射线也是如此。这并非巧合：凡是复函数的导数不为零之处，该函数都会保持曲线之间的夹角不变。这样的映射称为**保角**（conformal）映射。在局部范围内，保角映射不过是一次旋转加上一次缩放，而这正是乘以复数 $f'(z)$ 所起的作用。保角映射可用来解决流体流动、静电学和热传导的问题，方法是把一个复杂的区域变换成一个答案已知的简单区域。

麦卡托地图

这里有一个意想不到的发现，把本节与 Section 4.8 连系起来。麦卡托（Gerardus Mercator）在 1569 年绘制的地图，设计的目的是令罗盘方位恒定的航线成为一条直线，这就要求地图保持角度不变。如果你先把地球以球极投影（stereographic projection）的方式（从北极出发）投影到一个平面上，然后取复对数，所得的结果恰好就是麦卡托投影：经线变成铅垂线，纬线变成水平线，正如射线和圆在 log 之下变成水平线和铅垂线一样。把本节的指数映射倒过来运行，就是航海图背后的数学。

思维技巧

把函数想像成变换

当一个函数无法画成图像时，就把它所做的事画出来：取一组由简单曲线组成的格网，看看它们被映到哪里。

对于复函数，水平线和铅垂线的像，或者圆和射线的像，往往已能说明一切。这种着眼于映射如何改变图形的思考方式，贯穿整个几何与分析。

延伸练习

1 **解方程。**求所有满足 $e^w = -1$ 的复数 w，以及所有满足 $e^w = 1 + \mathrm{i}$ 的 w。

2 **正方形的像。**求顶点为 0、1、$1 + \mathrm{i}$ 和 i 的正方形在 $z = e^w$ 之下的像，并画出草图。

3 **直角。**直接证明圆 $|z| = e^c$ 与射线 $\arg z = d$ 相交成直角，并解释为甚么这与直线 $u = c$ 和 $v = d$ 互相垂直是一致的。

4 **平方。**设 c 和 d 为非零实数。求直线 $x = c$ 和 $y = d$ 在映射 $z \mapsto z^2$ 之下的像。证明它们都是抛物线，并且凡相交之处都相交成直角。（若 $c = 0$ 或 $d = 0$，情况会怎样?）

延伸阅读

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章和第 4 章以精彩的插图讲解指数函数、对数函数和保角映射。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（Oxford University Press）。一本清晰易懂的大学本科入门教材。
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis***（Cambridge University Press）。另一本出色的本科入门书，着重几何观点。

5.8 圆盘中隐藏的距离

题目

STEP III 2013，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/13-s3-q6`

引子

乍看之下，这只是一道运算模（modulus）和共轭（conjugate）的练习，最后得出一条模样古怪的不等式。为甚么会有人关心 $\frac{|z-w|}{|1-zw^*|}$ 呢?

因为它是一个距离。它不是 z 与 w 之间的普通距离，而是另一种几何中的距离：在这种几何里，单位圆盘（unit disc）本身就是一个无限大的完整宇宙，直线是圆弧，三角形的内角和小于 180°。这就是*双曲几何*（*hyperbolic geometry*）。两千年来，人们一直试图证明欧几里得（Euclid）的平行公设（parallel postulate），到了十九世纪才发现这种几何；而本题的不等式，原来正是它的三角不等式（triangle inequality），只是乔装了一番。更令人意外的是，不等式的右边正是狭义相对论（special relativity）中的速度相加公式，我们在 Section 3.8 已经见过。

动笔之前

? **想一想** 怎样从图形看出 $|z-w| \le |z|+|w|$?（把 z 和 $-w$ 想成向量。）

$z-w = z+(-w)$。先把 z 画成由原点出发的箭嘴，再把 $-w$ 画成由 z 的尖端出发的箭嘴。由原点指向终点的箭嘴就是 $z-w$，三支箭嘴组成一个三角形，边长分别为 $|z|$、$|w|$ 和 $|z-w|$。三角形任何一边的长度都不超过另外两边之和。

另外要记得，对任何复数 a 都有 $|a|^2 = aa^*$。这样就可以把题目中每一个模都化为代数运算。

逐步解题

阶段 1　展开各个模

想一想　展开 $|z-w|^2=(z-w)(z^*-w^*)$，再与 $(|z|+|w|)^2$ 比较。

$|z-w|^2=zz^*-zw^*-z^*w+ww^*=|z|^2+|w|^2-zw^*-z^*w$。另一方面，$(|z|+|w|)^2-E=|z|^2+2|z||w|+|w|^2-zw^*-z^*w-2|zw|$，而由于 $|z||w|=|zw|$，两者相等。 ■

$E=(zw^*)+(zw^*)^*+2|zw|=2\,\mathrm{Re}(zw^*)+2|zw|$，这是实数。而且根据三角不等式，$E=(|z|+|w|)^2-|z-w|^2\geq 0$。 ■

阶段 2　第二条恒等式

$|1-zw^*|^2=(1-zw^*)(1-z^*w)=1-zw^*-z^*w+|z|^2|w|^2$，而 $(1+|zw|)^2-E=1+2|zw|+|zw|^2-zw^*-z^*w-2|zw|$，两者相等。 ■

阶段 3　不等式

想一想　设 $A=(|z|+|w|)^2$ 和 $B=(1+|zw|)^2$。把不等式两边平方后，它就是 $\frac{A-E}{B-E}\leq\frac{A}{B}$。这在甚么时候成立?

所求不等式的两边都是非负的，所以它等价于平方后的不等式 $\frac{A-E}{B-E}\leq\frac{A}{B}$。假设 $B-E=|1-zw^*|^2>0$，两边乘开：

$$(A-E)B\leq A(B-E)\iff -EB\leq -EA\iff E(B-A)\geq 0.$$

由于 $E\geq 0$，只要 $B\geq A$，即 $1+|zw|\geq|z|+|w|$，上式便成立。

停一停，试一试　证明 $1+|z||w|-|z|-|w|$ 可以因式分解。它在甚么时候非负?

$1+|z||w|-|z|-|w|=(1-|z|)(1-|w|)$。若 $|z|>1$ 且 $|w|>1$，两个因式都是负数，乘积为正。所以 $B\geq A$，不等式成立。 ■

若改为 $|z|<1$ 且 $|w|<1$，两个因式都是正数，乘积同样为正，同一个论证依然适用：**是的**，不等式在这个情况下也成立。（在这两个情况下都有 $|zw^*|\neq 1$，所以 $1-zw^*\neq 0$，左边有定义。）不等式可能不成立的，是混合的情况：一点在单位圆内，另一点在单位圆外。

回顾

- $|a|^2 = aa^*$。每一条恒等式都是由展开共轭的乘积而来。这是用代数方法处理模的标准做法。
- **归结为一个量的正负。**平方并交叉相乘之后，整条不等式只取决于 $(1-|z|)(1-|w|)$ 的正负。
- **检查其他情况。**最后一问考虑 $|z|, |w| < 1$；同一个因式分解立即给出答案。

背后的数学

非欧几里得几何

两千年来，数学家一直试图由欧几里得的其他公理，证明他的第五公设（过直线外一点，恰好有一条直线与该直线平行）。在 1820 和 1830 年代，罗巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky）、鲍耶（János Bolyai）和（私下研究的）高斯（Gauss）意识到这是办不到的：存在一种完全相容的几何，其中有无限多条平行线。1882 年，庞加莱（Henri Poincaré）在单位圆盘内找到了这种几何的一个优美模型。点就是开圆盘内的点；“直线”是直径，以及与边界圆成直角相交的圆弧；而 z 与 w 之间的距离是

$$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\rho(z,w), \qquad \text{其中} \qquad \rho(z,w) = \frac{|z-w|}{|1-zw^*|}.$$

当一点趋近边界圆时，它与圆心的距离趋向无限大：这个圆盘是一整个无限的平面，只是通过一块令影像变形的透镜来观看。

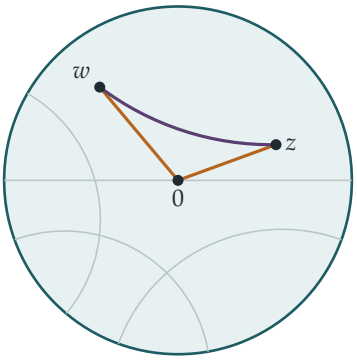


图 5.8.1 庞加莱圆盘（Poincaré disc）。双曲“直线”是直径，或与边界成直角相交的圆弧（灰色）。以 0、z 和 w 为顶点的双曲三角形，有两条边沿着直径（琥珀色），一条边沿着圆弧（紫红色）。题目中的不等式说明，以双曲距离计算，紫红色的边不会比另外两条边加起来更长。

乔装了的三角不等式

对于 $|z|, |w| < 1$，题目所证明的其实是以下结果。设 $|z| = \tanh a$ 和 $|w| = \tanh b$，则由 0 到 z 和 w 的双曲距离分别是 $2a$ 和 $2b$。根据 Section 3.8 中 tanh 的加法公式，

$$\frac{|z| + |w|}{1 + |zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b} = \tanh(a + b).$$

所以该不等式就是 $\tanh\big(\frac{1}{2}d(z,w)\big) \le \tanh(a+b)$，即

$$d(z,w) \le 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

这就是双曲距离的三角不等式（图 5.8.1）。相对论的速度相加公式与双曲几何，骨子里是同一回事：狭义相对论中所有可能速度组成的集合，配上适当的距离概念，就是一个双曲空间。我们会在 Section 7.6 再谈这一点。

圆盘的对称

为甚么 ρ 是合适的量？对于 $|a| < 1$，映射 $z \mapsto \dfrac{z - a}{1 - a^* z}$ 把单位圆盘映到自身，保持双曲距离不变，并把 a 移到圆心。它们是平移在双曲几何中的对应物，而 $\rho(z,w)$ 正是把 w 移到圆心时的 $|$映射后的$z|$。这些莫比乌斯变换（*Möbius transformation*）是复分析（complex analysis）的核心课题。艾雪（M. C. Escher）的木刻版画《圆极限》（*Circle Limit*），灵感来自数学家考克斯特（H. S. M. Coxeter）的一幅图；画中以全等的鱼和天使镶嵌（tiling）庞加莱圆盘，它们愈近边缘便愈小，因为双曲距离在那里会无限增大。

思维技巧

问一问算式有甚么意义

当某个代数式不断出现时，问一问它是否有某种意义：一个距离、一个角、一个概率、一种对称。

在这里，一个古怪的模之比原来是另一种几何中的距离，而一条古怪的不等式原来是它的三角不等式。认出当中的意义，就能解释结果为何成立，以及它通往何处。

延伸练习

1 **数值验算。**取 $z = \frac{1}{2}$ 和 $w = -\frac{1}{2}$。计算不等式的两边。然后计算双曲距离 $d(z,0)$、$d(0,w)$ 和 $d(z,w)$，并验证三角不等式在这里取等号。为甚么？

2 **混合的情况。**求满足 $|z| < 1 < |w|$ 的 z、w，使不等式不成立。

3 **等距映射（isometry）。**设 $f(z) = \dfrac{z-a}{1-a^*z}$，其中 $|a| < 1$。证明当 $|z| = 1$ 时必有 $|f(z)| = 1$，并且 $f(a) = 0$。证明 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$。

4 **无限近在咫尺。**证明由 0 到 r（其中 $0 < r < 1$）的双曲距离是 $\ln \frac{1+r}{1-r}$，并且当 $r \to 1$ 时它趋向无限大。一点要多接近边界，才会与圆心相距双曲距离 10?

延伸阅读

- **Caroline Series, “Hyperbolic geometry” lecture notes**（华威大学 University of Warwick，可免费取得）。一份清晰的入门课程讲义，由庞加莱圆盘讲起。
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space***（牛津大学出版社 Oxford University Press）。由欧几里得到爱因斯坦（Einstein）的非欧几里得几何史。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（牛津大学出版社 Oxford University Press）。第 6 章讲述非欧几里得几何和莫比乌斯变换，并配有精美的插图。

我们学到了甚么

本章开首，我们谈到卡尔达诺（Cardano）那个令人不安的发现：要得到实数答案，中途可能非用虚数不可。我们也提出了三个问题：复数（complex number）怎样帮助我们解决实数问题？单位根（roots of unity）有何特别之处？复函数（complex function）是甚么模样？以下是本章八道题目所揭示的答案。

1. 复数怎样帮助我们解决实数问题？

一次又一次，关于实数的事实，取道复平面（complex plane）便有简短的证明。

- **角变成乘积。**梅钦（Machin）的 π 公式，说的其实是 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$ 是 $239-\mathrm{i}$ 的实数倍，只需整数运算便可验证（Section 5.1）。
- **计数变成取平均。**每隔三项取一个二项式系数（binomial coefficient）所得的和，来自在三次单位根处计算 $(1+x)^n$ 的值（Section 5.2）。
- **三角函数的乘积变成多项式的值。**等间隔角的余弦之积，来自把 $z^{2n}+1$ 因式分解，再代入 $z=\mathrm{i}$（Section 5.3）。
- **几何变成代数。**距离变成模（modulus），所以由正 n 边形的一个顶点引出的各条弦，其长度之积是 $|1+1+\cdots+1|=n$（Section 5.4）；旋转变成乘法，所以费马点（Fermat point）的作图化简为恒等式 $1+\alpha^2=\alpha$（Section 5.6）。
- **由棣美弗定理推出无理性。**展开 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^k$，再从奇偶性（parity）着手论证，便知 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 的度数不是有理数；这正是德恩（Dehn）解决希尔伯特（Hilbert）第三问题的关键事实（Section 5.5）。

2. 单位根有何特别之处？

n 次单位根是正 n 边形的顶点，是最简单的多项式 z^n-1 的根，并且在乘法之下构成一个群（group）。这三个事实合起来，解释了它们为何无处不在。由于它们均匀地分布在一个圆上，所以总和为零；Section 5.2 的筛选法由此而来，推而广之就是离散傅里叶变换（discrete Fourier transform）。由于它们是 z^n-1 的根，所以遍取它们的乘积，就是简单多项式的值（Section 5.3、Section 5.4）。又由于它们对乘法封闭，单位根的幂会循环往复，而像 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 这样的角，欠缺的正是这一点（Section 5.5）。到了第 6 章，单位根会成为代数的核心，并通往伽罗瓦理论（Galois theory）。

3. 复函数是甚么模样?

在 Section 5.7 中，我们把 e^w 想像成一个把带状区域卷成整个平面的映射：它把铅垂线变成圆，把水平线变成射线，并且无穷无尽地一圈圈绕下去，所以对数是多值的。我们看到它保持角度不变，是*共形*（conformal）映射的第一个例子，也是麦卡托（Mercator）海图背后的原理。在 Section 5.8 中，一个古怪的不等式原来就是双曲几何（hyperbolic geometry）的三角不等式（triangle inequality）；在双曲几何里，单位圆盘是一个无限的平面，直线是圆弧，而距离则按相对论的速度相加公式合成。

4. 复数工具箱

方法	用于何处
相乘时辐角（argument）相加	梅钦公式（5.1）
检查 2π 的倍数	梅钦公式（5.1）
对单位根取平均	每隔三项的系数（5.2）
按根因式分解，然后代入	余弦乘积（5.3）；弦（5.4）
约去一个等于零的因式	5.3；5.4
棣美弗定理（De Moivre's theorem）	倍角公式（5.5）
奇偶性与最小反例（minimal counterexample）	无理角（5.5）
以乘法表示旋转	等边三角形（5.6）
映射网格	指数映射（5.7）
$\lvert a\rvert^2 = aa^*$	庞加莱（Poincaré）圆盘不等式（5.8）

下一步

- 单位根是第 6 章的主角，当中包括 Section 6.1 的分圆多项式（cyclotomic polynomial），以及 Section 6.2 中高斯（Gauss）的正 17 边形作图。
- 双曲几何、tanh 与相对论之间的联系，在 Section 7.6 中有进一步的探讨。
- 在梅钦公式中出现过的高斯整数（Gaussian integer），是 Section 1.6 的主题。

如果你想在入读大学之前再进一步

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（《复分析：可视化方法》）：有史以来最优美的复数著作，图画丰富。由第 1 章读起。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（《虚数的故事》）：$\sqrt{-1}$ 的历史，由卡尔达诺讲到现代物理。

- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（《复数与几何》）：用复数处理欧几里得几何，程度与本章完全相同。
- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（《复分析导论》）：让你初步认识大学的复分析课程。

卡尔达诺认为他的虚数量既精微又无用。五个世纪之后，在数学或物理之中，已经很难找到一个没有它们踪影的角落。本章的启示，正是阿达马（Hadamard）的那句话：当一个关于实数的问题很难时，不妨试试走出实数线。复平面更加广阔，许多看似复杂的事情，在那里原来都很简单。

延伸练习答案

以下只是简短的答案和提示，并非完整解答：只列出结果和关键步骤，方便你核对自己的做法。请先认真做过每道练习，然后才看答案。

5.1 梅钦公式

1. $(5-\mathrm{i})^2(1+\mathrm{i}) = (24-10\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) = 34+14\mathrm{i}$，其辐角（argument）为 $\tan^{-1}\frac{7}{17}$。它的辐角同时也是 $-2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}$。
2. $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) = 5+5\mathrm{i}$，辐角为 $\frac{\pi}{4}$。
3. $(3+\mathrm{i})^2(7+\mathrm{i}) = (8+6\mathrm{i})(7+\mathrm{i}) = 50+50\mathrm{i}$。
4. 这些级数（series）都是交错级数，所以误差小于第一个被略去的项。对于 $16\tan^{-1}\frac{1}{5}$，需要被略去的项 $\frac{16}{(2N+1)5^{2N+1}}$ 小于 5×10^{-21}，即要取 $N=14$ 项；对于 $4\tan^{-1}\frac{1}{239}$，取 4 项便足够。用计算机可得 $16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right)-\frac{4}{239}\approx3.14162$。

5.2 单位根筛选法

1. $(1+1)^n+(1-1)^n = 2\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\cdots\right)$，所以当 $n\ge1$ 时，该和为 2^{n-1}。
2. 先分别乘以 ω^{-1} 和 ω^{-2}，然后取平均：$\frac{1}{3}\left(2^n+\omega^{-1}(1+\omega)^n+\omega^{-2}(1+\omega^2)^n\right)$。由于 $1+\omega=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，上式等于 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$。第三个剩余类（residue）给出 $\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\right)$，而三个余弦 $\cos x+\cos(x-\frac{2\pi}{3})+\cos(x+\frac{2\pi}{3})$ 之和为 0。
3. 对 $j=0,1,2,3$ 取 $(1+\mathrm{i}^j)^n$ 的平均：该和为 $\frac{1}{4}\left(2^n+(1+\mathrm{i})^n+0+(1-\mathrm{i})^n\right)$，而 $(1\pm\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\pi/4}$。
4. 按元素个数计：$\frac{1}{3}(2^{12}+2\cos4\pi)=1366$。按元素之和计：$\prod(1+\omega^j)$ 中，2、$1+\omega$ 和 $1+\omega^2$ 这三种因子各出现四次，而 $(1+\omega)(1+\omega^2)=1$，所以该乘积等于 16（在 ω^2 处的乘积亦然）。所求的数目为 $\frac{1}{3}(4096+16+16)=1376$。

5.3 因式分解 $z^{2n}+1$

1. 在第 (ii) 部分取 $n=7$，得 $\cos^2\frac{\pi}{14}\cos^2\frac{3\pi}{14}\cos^2\frac{5\pi}{14}=\frac{7}{64}$，而三个余弦均为正数。至于第二个结果，设 $c=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$。则 $8c\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{8\pi}{7}=-\sin\frac{\pi}{7}$，所以 $c=-\frac{1}{8}$；另外 $\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}$。

2. 在 $z=1$ 处，$2=\prod\left(2-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)=\prod 4\sin^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}$，所以各正弦（全为正数）的乘积为 $\sqrt{2/4^n}=2^{\frac{1}{2}-n}$。

3. $z^6+1=(z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)$；首尾两个因式相乘得 z^4-z^2+1。

4. $z^{2n}=1$ 的根是 ±1 以及共轭（conjugate）对 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k\pi/n}$，其中 $1\le k\le n-1$，所以 $\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$。令 $z\to1$：左边趋向 n，右边则为 $\prod 4\sin^2\frac{k\pi}{2n}$。

5.4 正多边形中的距离

1. 正方形：$\sqrt{2}\times2\times\sqrt{2}=4$。三角形：$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$。

2. 设 $X_k=\omega^k$，并把 $P=r$ 放在正实轴上。则 $\prod|r-\omega^k|=|r^n-1|$。

3. 由算术几何平均不等式（AM–GM），平均值不小于几何平均（geometric mean）$n^{1/(n-1)}$。当 $n=6$ 时，各弦（chord）的长度为 1、$\sqrt{3}$、2、$\sqrt{3}$、1，平均值为 $\frac{4+2\sqrt{3}}{5}\approx1.493$，而 $6^{1/5}\approx1.431$。

4. 由第 (ii) 部分，从每个顶点出发的 $n-1$ 条弦的乘积为 n。对全部 n 个顶点相乘得 n^n，其中每条弦都计算了两次，所以 $\binom{n}{2}$ 条弦的乘积为 $n^{n/2}$。

5.5 名不副实的有理角

1. 取顶点 $(1,1,1)$、$(1,-1,-1)$、$(-1,1,-1)$、$(-1,-1,1)$，中心为 O。两个键向量的点积（dot product）为 -1，长度均为 $\sqrt{3}$，所以键角（bond angle）为 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$。一个面的向外法向量（outward normal），是指向对面顶点的向量的负向量，所以两个向外法向量之间的夹角同样是 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$，而两个面之间的夹角是它的补角（supplement），即 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$。

2. 设 $(4+3\mathrm{i})^k=a_k+\mathrm{i}b_k$。由于 $4+3\mathrm{i}$ 及其共轭是 $t^2-8t+25$ 的根，故 $b_{k+1}=8b_k-25b_{k-1}\equiv3b_k\pmod5$，而 $b_1=3$，所以 $b_k\equiv3^k\not\equiv0\pmod5$。因此没有任何一个幂是实数。假如该角的度数是有理数（rational number），它的某个倍数便会是 180° 的倍数，相应的幂就会是实数。

3. 当 $a=2$ 时，$a^2-1=3$ 是奇数，所以奇偶性（parity）论证不成立。事实上 $\cos^{-1}\frac{1}{2}=60^\circ$ 的确是有理数；取 $k=3$ 时，正弦的括号部分为 $3-\binom{3}{3}\cdot3=0$。

4. 0°、60° 和 90°，余弦值分别为 1、$\frac{1}{2}$ 和 0。尼云定理（Niven's theorem）指出：在 180° 的有理数倍处，cos 的有理数值只有 0、$\pm\frac{1}{2}$ 和 ±1。

5.6 费马点

1. 向内作时，各顶点为 $A+(1-\bar{\alpha})(B-A)$，余此类推。在 $p=2$、$q=1.4$、$r=1.1$ 的例子中，通过 C 和新的 L 的直线并不经过 O（检验条件 $\mathrm{Im}(\bar{C}L')=0$ 不成立），

另外两条直线也是如此。

2. 等边三角形（equilateral triangle）的中心就是它的形心（centroid）。设 $L=\alpha(p+q)$、$M=-(q+r)$ 和 $N=-\alpha^2(p+r)$，则 ABL、BCM、CAN 的中心 G_1、G_2、G_3 满足 $G_3-G_1=\alpha(G_2-G_1)$（利用 $\alpha^2=\alpha-1$ 展开），这说明 $G_1G_2G_3$ 是等边三角形。在该例子中，它的边长为 $\frac{p+q+r}{\sqrt{3}}\approx 2.598$。

3. $PA+PB+PC$ 在 A 处约为 5.68，在 B 处约为 5.13，在 C 处约为 4.89，在形心处约为 4.54；全部都大于 4.5。

4. 等边（两种定向（orientation）之一）即是 $z_1+\omega z_2+\omega^2 z_3=0$ 或 $z_1+\omega^2 z_2+\omega z_3=0$，其中 $\omega=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$。利用 $\omega+\omega^2=-1$，两式左边的乘积为 $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1$。

5.7 作为映射的复指数函数

1. 当 $w=(2k+1)\pi\mathrm{i}$ 时 $\mathrm{e}^w=-1$；当 $w=\frac{1}{2}\ln 2+\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$ 时 $\mathrm{e}^w=1+\mathrm{i}$，其中 k 为整数。

2. 区域 $1\le|z|\le\mathrm{e}$、$0\le\arg z\le 1$（一弧度）：圆环（annulus）的一部分。底边映到实轴上的 $[1,\mathrm{e}]$，右边映到半径为 e 的一段圆弧，顶边映到角度为 1 的一段径向线段，左边映到单位圆的一段圆弧。

3. 射线沿半径方向；圆的切线则与半径垂直。这与直线 $u=c$ 和 $v=d$ 的情况吻合，因为 e^w 保持角度不变（它的导数永不为 0）。

4. $(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$。直线 $x=c$ 映到 $u=c^2-\frac{v^2}{4c^2}$，而 $y=d$ 映到 $u=\frac{v^2}{4d^2}-d^2$：分别是开口向左和向右的抛物线（parabola），两者的焦点（focus）都在 0。令两式相等，得 $v^2=4c^2d^2$，所以它们相交两次，交点为 $u=c^2-d^2$、$v=\pm 2cd$。在 $v=2cd$ 处（即两直线交点 $c+\mathrm{i}d$ 的像），斜率 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ 分别为 $-\frac{d}{c}$ 和 $\frac{c}{d}$；在 $v=-2cd$ 处则为 $\frac{d}{c}$ 和 $-\frac{c}{d}$。两种情况下乘积都是 -1。（第二个交点既是第一条直线上 $c-\mathrm{i}d$ 的像，也是第二条直线上 $-c+\mathrm{i}d$ 的像：平方把 z 和 $-z$ 映到同一点。）若 $c=0$，$x=0$ 的像是射线 $u\le 0$、$v=0$；若 $d=0$，$y=0$ 的像是射线 $u\ge 0$、$v=0$：这些都不是抛物线。只要两直线的交点不在 0，射线仍会与另一个像成直角相交；但若 $c=d=0$，两个像都落在实轴上：在 0 处这个映射把角度加倍（它的导数 $2z$ 在该处为零），所以两轴之间的直角变成了平角。

5.8 圆盘中隐藏的距离

1. 两边都等于 $\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}$。于是 $d(z,0)=d(0,w)=2\tanh^{-1}\frac{1}{2}=\ln 3$，而 $d(z,w)=2\tanh^{-1}\frac{4}{5}=\ln 9$，所以等号成立：0 位于由 z 到 w 的双曲线段（hyperbolic line segment，这里是一条直径）上。

2. 由第 (i) 和第 (ii) 部分，当 $E > 0$ 时，该不等式等价于 $|z| + |w| \le 1 + |zw|$，即 $(1 - |z|)(1 - |w|) \ge 0$。在混合的情况下这并不成立，例如取 $z = \frac{1}{2}$、$w = 3$：左边是 $\frac{5/2}{1/2} = 5$，右边是 $\frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$。

3. 若 $|z| = 1$，则 $|1 - a^* z| = |\bar{z} - a^*| = |z - a|$。直接计算，$f(z) - f(w) = \frac{(1-|a|^2)(z-w)}{(1-a^*z)(1-a^*w)}$ 及 $1 - f(z)f(w)^* = \frac{(1-|a|^2)(1-zw^*)}{(1-a^*z)(1-aw^*)}$；两式相除再取模（modulus），得 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z, w)$。

4. $d(0, r) = 2\tanh^{-1} r = \ln \frac{1+r}{1-r}$，当 $r \to 1$ 时趋向 ∞。距离为 10 需要 $r = \tanh 5 \approx 0.99991$：离边界只有约 9×10^{-5}。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

全书共 13 章，本册为第 5 章。 全书各章及所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为

beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。

