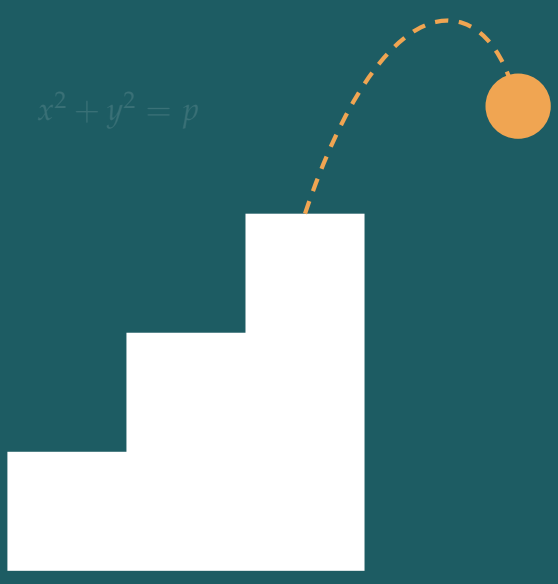
STEP 备试 · 大学数学

Beyond STEP

第 2 章

数列（sequences）、级数（series）与收敛（convergence）



KEITH McNULTY

Beyond STEP

以历届 STEP 试题为门
走进大学数学

第 2 章

数列（sequences）、级数（series）与收敛（convergence）

Keith McNulty

Beyond STEP：以历届 STEP 试题为门，走进大学数学

第 2 章：数列（sequences）、级数（series）与收敛（convergence）

本册是 *Beyond STEP* 全书 13 章中的第 2 章。全书、各章的单行本、每一节的可列印工作纸，以及每一道 STEP 试题的详细解答，均可在 `beyondstep.keithmcnulty.org` 免费阅读及下载。

2026 年 11 月首次于网上发表。

本 PDF 内凡属作者本人创作的内容，包括正文、解答、插图、练习及答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编及分享，毋须征求许可。详见 `creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0`。

本书讨论的 STEP 试题，版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有。本书并无转载这些试题：每一题均附连结，通往官方来源的题目，即 STEP Support Programme 的试题资料库或 OCR 的历届试卷。

如有错漏，欢迎到 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 提交 issue 指正。

章

2

数列、级数与收敛

无穷是数学变得有趣的地方，也是最容易出错的地方。

本章内容

2.1	“最终”是甚么意思	STEP III 2015
2.2	作为极限的黄金比例	STEP II 2013
2.3	一个发散级数与它的收敛近亲	STEP III 2014
2.4	$\pi^2/6$	STEP III 2018
2.5	韦达乘积	STEP III 2022
2.6	算术几何平均	STEP II 2024
2.7	六位还是六百位	STEP II 2023
2.8	平方再减二	STEP III 2021
2.9	逐步逼近 e 的分数	STEP II 2021
A	练习答案	第 67 页

驯服无穷

> 无穷！从来没有别的问题如此深刻地触动人类的心灵。
>
> — 希尔伯特（David Hilbert）

两千五百年前，埃利亚的芝诺（Zeno of Elea）论证说运动是不可能的。要走过一个房间，你必须先走一半路程，然后走余下路程的一半，再走那余下的一半，如此类推，永无止境：这是无穷多项任务，肯定无法在有限时间内完成。人人都知道芝诺错了，因为人们确实能走过房间，但在很长的一段时间里，没有人能确切说出他为甚么错。答案是：无穷和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 有一个有限的值，就是 1。可是，无穷多个数加起来等于某个数，这句话究竟是甚么意思？

这个问题占据数学的核心达两千年之久。十七世纪时，牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）在它之上建立了微积分（calculus），却始终没有真正回答它；他们的后继者既得出了许多精彩的结果，也制造了一些荒谬绝伦的谬论。欧拉（Euler）是有史以来最伟大的计算家，他毫不犹豫地写下 $1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$。另一些人则就同一个无穷级数（infinite series）“证明”出互相矛盾的结论。直到十九世纪，经过柯西（Cauchy）、魏尔斯特拉斯（Weierstrass）等人的努力，数学家才有了足够精确的定义，可以分辨哪些结果是真、哪些是假。这些定义就是本章的主题。

为甚么重要

你一生中用来计算的数，几乎每一个都是某样东西的极限（limit）。你的计算机并不知道 $\sqrt{2}$、π 或 e 是甚么：它只知道一些能够愈来愈接近这些数的计算步骤，并在足够接近时停下来。明白一套步骤逼近得有多快，正是一毫秒内完成的算法与永远算不完的算法之间的分别。用来预测天气、设计飞机和为金融产品定价的电脑模拟，背后也是同样的想法。而在最纯粹的一面，对极限的研究引出了数学中一些最优美的公式：在本章中，你将会证明

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

这个结果令欧拉一举成名，至今看来仍然近乎神奇。

你在大学会遇到甚么

几乎在每一所大学，数学分析（Analysis）都是你最先修读的课程之一，而对许多学生来说，它带来的冲击也最大。在中学数学里，你学的是计算极限；在数学分析里，你学的是

从精确的定义出发，证明关于极限的命题。你会定义数列（sequence）收敛（converge）是甚么意思，用的正是 Section 2.1 中出现的“对于每一个 $\varepsilon > 0$”和“存在 N”这些说法。你会证明每一个有界递增数列都收敛，并发现这有赖于实数的一项性质——完备性（completeness），而有理数并不具备这项性质。你会学习判别级数是否收敛的各种方法，然后运用同样的想法，为连续性、微分和积分赋予严格的意义。

往后的课程会在这个基础上向多个方向发展。数值分析（Numerical analysis）探讨近似值收敛得有多快，以及怎样令它们收敛得更快（Section 2.7、Section 2.6）。动力系统（Dynamical systems）研究反复套用同一条规则时会发生甚么事，有时会趋向一个极限，有时则产生混沌（chaos）（Section 2.2、Section 2.8）。复分析（Complex analysis）解释了为甚么 π 会在那么多无穷和与无穷乘积中出现（Section 2.4、Section 2.5）。而解析数论（analytic number theory）则利用极限来回答关于整数的问题，例如 Section 2.9。

贯穿本章的问题

三大问题

1. **一个无穷的过程有答案，是甚么意思？**我们怎样才能精确地说一个数列“趋近”某个极限，或者一个无穷和“加起来等于”某个数？
2. **怎样在不知道极限是甚么的情况下，证明某样东西收敛？**而一旦知道极限存在，又怎样把它求出来？
3. **有多快？**两个过程可以有相同的极限，逼近的速度却有天壤之别。为甚么会这样？我们又怎样量度这种速度？

第一节（Section 2.1）谈的是语言：数学家怎样精确地表达“最终”这个概念。接着的五节谈的是著名的极限：以连分数（continued fraction）表示的黄金比（golden ratio）、一个发散（divergent）级数和它那个收敛的近亲、$\pi^2/6$、韦达（Viète）关于 $2/\pi$ 的乘积，以及高斯（Gauss）的算术几何平均（arithmetic–geometric mean）。最后三节谈的是速度与结构：线性收敛与二次收敛的对比、一个要么爆炸式增长要么混沌地游走的迭代（iteration），以及一族逐步逼近 e 的积分。

处理收敛的工具

有少数几种工具，你会一再遇到，每次的场合都不一样。

§	主题	工具
2.1	“最终较小”	量词（quantifiers）：找出 m、否定命题
2.2	黄金比	单调有界子数列（monotone bounded subsequences）
2.3	调和级数（harmonic series）与 Kempner 级数	分段比较
2.4	$\pi^2/6$	多项式的根，然后用夹逼法（squeeze）
2.5	韦达乘积	裂项相消（telescoping），然后求一个简单的极限
2.6	算术几何平均（AGM）	两个数列互相夹逼；一个不变量（invariant）
2.7	逼近 $\sqrt{2}$	误差的递推关系（recurrences）：线性与二次
2.8	$x \mapsto x^2 - 2$	一个令映射变得简单的代换（substitution）
2.9	逼近 e 的分数	很小但不为零的积分

怎样阅读本章

与第 1 章一样，每一节都以一道 STEP 原题开始。请先自己尝试，然后才往下读。本章的题目往往会告诉你该用哪一种工具（“考虑……”、“你可以使用以下定理……”）；在解题的过程中，请留意同样的几种工具出现得有多频密，因为到了大学，你便要自己作出选择。

有好几道题目要求你假设极限存在，或者假设无穷和与无穷乘积收敛。遇到这种情况时，该节会解释要证明这一点还需要些甚么。意识到“这显然行得通”与“我能证明这行得通”之间的差距，是学会像分析学家那样思考的第一步。

2.1 “最终”是甚么意思

题目

STEP III 2015，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/15-s3-q2`

引子

大学第一门分析（analysis）课程里，几乎每一个命题都是同一个模样：*存在*某个东西，使得*对所有*某些东西，某个条件都成立。“数列（sequence）趋向 L”的意思是：对每一个容许误差 $\varepsilon > 0$，都*存在*一个位置 N，使得*对所有* $n \geq N$，都有 $|a_n - L| < \varepsilon$。能够纯熟运用这种句式的学生，会觉得分析引人入胜；不熟悉的学生，则会觉得摸不着头脑。

这道题目设计精妙，正好是这种说话方式的一个平易入门。它定义了一个新概念“最终小于”，然后就这个概念问了四条是非题。四条之中有一条是假的，而它为假的原因，正正是大多数大学一年级学生初次尝试*否定*（negate）含有量词（quantifier）的命题时会掉进的陷阱。

动笔之前

慢慢细读定义。$(s_n) \leq (t_n)$ 并不是说对每个 n 都有 $s_n \leq t_n$，而是说*由某一项开始*，这个不等式一直成立。最初的几项完全无关痛痒：即使你把其中一个数列开首的一百万项改掉，$(s_n) \leq (t_n)$ 是否成立也不受影响。

想一想 定义中有“存在正整数 m”这句话。要证明 $(s_n) \leq (t_n)$，你究竟要拿出甚么来？要证明它是*假*的，你又要说明甚么？

要证明它，你必须*拿出*一个合适的 m，然后说明*每一个* $n \geq m$ 都符合要求。要否证它，你必须说明*没有任何* m 行得通：无论别人提出哪一个 m，总有某个 $n \geq m$ 使得 $s_n > t_n$。请把后面这个说法记在心里，第 (ii) 部分会用到。

逐步解题

阶段 1　线性函数对二次函数

第 (i) 部分问的是 $1000n \le n^2$ 是否最终成立。由于 $n > 0$，这等同于 $1000 \le n$。所以取 $m = 1000$ 便可：对每个 $n \ge 1000$，都有 $n^2 = n \cdot n \ge 1000n$。此命题为**真**。 ■

在最初的 999 项，$1000n$ 远大于 n^2，但这并不要紧。“最终”二字不理会任何有限多项。

阶段 2　“最终小于”跟普通的“小于”相似吗？

对普通的数而言，如果 $a \le b$ 不成立，那么 $b < a$，因此当然有 $b \le a$。第 (ii) 部分问的是，我们这个新关系是否也有同样的性质。

> **想一想**　“$(s_n) \le (t_n)$ 不成立”究竟是甚么意思？把它完整地写出来，而且句首不要用“不”字。

“存在 m，使得对所有 $n \ge m$，都有 $s_n \le t_n$”这个命题为假，恰好就是

$$\text{对每个 } m,\ \text{都有某个 } n \ge m \text{ 使得 } s_n > t_n。$$

换句话说，$s_n > t_n$ 出现*无限多次*。这比“由某一项开始一直有 $s_n > t_n$”弱得多。两个数列大可以不断互换位置。

> **停一停，试一试**　试找出两个正数数列，它们永远不断互换位置，以致任何一个都不是最终小于另一个。

取 $s_n = 2 + (-1)^n$，即 $s_n = 1, 3, 1, 3, \ldots$，并对所有 n 取 $t_n = 2$。对每个 m，都有一个偶数 $n \ge m$ 使得 $s_n = 3 > 2 = t_n$，所以 $(s_n) \le (t_n)$ 不成立。但同样地，对每个 m，都有一个奇数 $n \ge m$ 使得 $t_n = 2 > 1 = s_n$，所以 $(t_n) \le (s_n)$ 也不成立。此命题为**假**。 ■

阶段 3　串连起来

> **想一想**　在第 (iii) 部分，你有两个 m 的值，每个假设各给一个，两者可能不同。要得出结论，应该用哪一个？

假设对所有 $n \ge m_1$ 都有 $s_n \le t_n$，并且对所有 $n \ge m_2$ 都有 $t_n \le u_n$。若 $n \ge \max(m_1, m_2)$，两个不等式同时成立，所以 $s_n \le t_n \le u_n$。因此取 $m = \max(m_1, m_2)$ 便可，此命题为**真**。 ■

在两个门槛之中取较大者，是你在分析里会用上数百次的一着。举例说，要证明两个收敛（convergent）数列之和也收敛，用的就是这一着。

阶段 4 二次函数对指数函数

先试几个数值：

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256

可见 $n^2 \le 2^n$ 在 $n = 1, 2$ 时成立，在 $n = 3$ 时不成立，然后由 $n = 4$ 起似乎一直成立（图 2.1.1）。很自然会猜 $m = 4$。

? **想一想** 要用归纳法（induction）证明对所有 $n \ge 4$ 都有 $n^2 \le 2^n$，你需要由 $n^2 \le 2^n$ 推到 $(n+1)^2 \le 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$。$(n+1)^2$ 与 n^2 之间要有怎样的不等式，这一步才行得通？

只要知道 $(n+1)^2 \le 2n^2$ 就足够，因为这样便有 $(n+1)^2 \le 2n^2 \le 2 \cdot 2^n$。而 $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2$，当 $n \ge 3$ 时为正数。于是：

- 基础步骤：$4^2 = 16 = 2^4$。
- 归纳步骤：若 $n \ge 4$ 且 $n^2 \le 2^n$，则 $(n+1)^2 \le 2n^2 \le 2^{n+1}$。

因此对所有 $n \ge 4$ 都有 $n^2 \le 2^n$，此命题为**真**，可取 $m = 4$。 ■

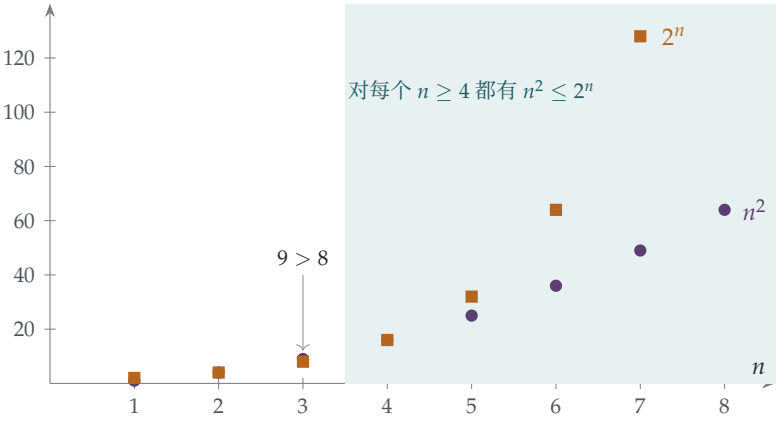


图 2.1.1 n^2（紫色圆点）对 2^n（琥珀色方块）。两个数列在最初几项交叉了两次，但由 $n = 4$ 起，2^n 永远领先。这正是 $(n^2) \le (2^n)$ 的意思，其中 $m = 4$。

回顾

- **证明“存在”，就是要拿出来。**在第 (i)、(iii) 和 (iv) 部分，证明的内容就是指明 m 是甚么，然后加以验证。

- **否定会把量词对调。**“并非（存在 m，对所有 $n \geq m$，P）”变成“对所有 m，存在 $n \geq m$，非 P”。第 (ii) 部分考的就是能否把这一点做对。
- **新的关系不一定跟旧的关系性质相同。**“最终小于”跟 $\leq$ 一样具有传递性（transitive），但跟 $\leq$ 不同的是，它并不能比较每一对数列。

背后的数学

分析的语言

在牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）之后约 150 年间，数学家运用极限（limit）和无穷小（infinitesimal）出神入化，却说不清楚它们确切是甚么意思。贝克莱主教（Bishop Berkeley）在 1734 年嘲讽无穷小是“已逝之量的鬼魂”，他说的不无道理。补救要等到十九世纪：柯西（Augustin-Louis Cauchy）以及其后的魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass），以由“对每个”和“存在”构成的命题，取代了“变得无限接近”这类含糊的说法。现代的定义

$$a_n \to L \iff \text{对每个}\varepsilon > 0\text{，都存在}N\text{，使得}|a_n - L| < \varepsilon \text{ 适用于所有}n \geq N$$

跟本题的定义模样完全相同，只是前面多了一个量词。这是你在大学分析课程里最先遇到的东西。

增长的阶

第 (iv) 部分是一道著名阶梯（增长的阶，orders of growth）的其中一小级。对任何固定的 $k > 0$ 和 $c > 1$，

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

而事实上，每个数列不单最终小于下一个，更是最终小于下一个的*任何常数倍*。哈代（G. H. Hardy）为这类比较写了一整本书：*Orders of Infinity*（1910）。今天它已是计算机科学的日常语言，“这个算法需要 $O(n^2)$ 步”的意思，就是步数最终不超过 n^2 的某个常数倍。n^2 与 2^n 之别，就是一个会完成的程序，与一个到太阳燃尽也完成不了的程序之别。

并非全序的序

第 (ii) 部分说明“最终小于”不是*全序*（total order）：有些数列对根本无法比较。这类具有传递性但不能比较所有东西的关系，称为*预序*（preorder）或*偏序*（partial order），而且随处可见：整数的整除性、集合的包含关系，以及“是……的子群（subgroup）”都

是例子。辨别一个关系具有哪些性质、不具有哪些性质，是数学家训练的一部分。

思维技巧

处理量词

要证明“存在 m，使得对所有 $n \geq m$...”，先指明 m，再检查每一个 n。要否证它，则说明对每个 m，都有某个 $n \geq m$ 不符合要求。

当一个命题含有多个量词时，先把它完整写出来，才尝试证明或否证；否定时由左至右逐个处理：每个“对所有”变成“存在”，每个“存在”变成“对所有”，而末尾的条件则取其否定。

延伸练习

1 **样本试卷热身题。**试做 STEP III Specimen paper，第 2 题（`step.maths.org/questions/spec-s3-q2`），此题出自 1987 年首届 STEP 举行之前发出的试卷。（最后一部分的提示：利用二项展开式（binomial expansion）的下一项。）

2 **两边都成立。**证明若 $(s_n) \leq (t_n)$ 且 $(t_n) \leq (s_n)$，则对所有足够大的 n 都有 $s_n = t_n$。

3 **竞逐无穷。**试找出两个递增的正数数列，两者皆趋向无穷大，而任何一个都不是最终小于另一个。

4 **拾级而上。**证明 $(2^n) \leq (n!)$，并给出一个明确的 m。然后证明 $(n^{10}) \leq (2^n)$，并求出可行的最小 m。（第二部分用试算表会有帮助；答案大得出人意表。）

延伸阅读

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree***（牛津大学出版社 Oxford University Press）。第 3 章讲的正是这种逻辑语言，以及大学新生为何觉得它困难。
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***（牛津大学出版社 Oxford University Press）。一本亲切易读的指南，讲解大学一年级分析的各个定义。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It***（剑桥大学出版社 Cambridge University Press）。有系统地介绍逻辑、量词与证明。

2.2 作为极限的黄金比例

题目

STEP II 2013，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/13-s2-q6`

引子

写下这个式子

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

然后问它等于甚么。一个快捷的答案是：设它为 x；第一条分数线下面的部分又是 x，所以 $x=1+1/x$，由此得 $x^2=x+1$，于是 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，即黄金比（golden ratio）φ。

但这个论证成立吗？它假设了这个无穷式子*真的有意义*，即逐层构造下去的过程最终会稳定于一个数。把同样的手法用在 $1-1+1-1+\cdots$ 上（“设它为 S；那么 $S=1-S$，所以 $S=\frac{1}{2}$”），得出的却是荒谬的结果。本题示范怎样把这件事做得严谨，所用的是 STEP 考生在事先不知道极限（limit）的情况下证明收敛（convergence）的唯一工具：*单调数列*（*monotone sequences*）。

动笔之前

先计算几项。取 $u_1=1$：

$$1,\quad 2,\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{8}{5},\quad \frac{13}{8},\quad \frac{21}{13},\quad \frac{34}{21},\quad \ldots$$

想一想 你认得这些分子和分母吗？再看看小数值：$1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$。这个数列是递增的吗？还是递减的？

它们是相邻斐波那契数（Fibonacci numbers）之比。这个数列既不递增也不递减：它呈锯齿状摆动，时而过高，时而过低。因此，题目给出的定理是关于递增数列的，不能用于整个数列。不过，奇数项 $1, 1.5, 1.6, 1.615, \ldots$ 看来在上升，而偶数项 $2, 1.667, 1.625, \ldots$ 看来在下降。这正是本题的布局。

逐步解题

阶段 1　比较相隔两项的项

第 (i) 部分比较相隔两步的 u_{n+2} 与 u_n。最自然的第一步，是利用 $(*)$ 把它们各自用前一项表示。

> **想一想**　运用 $(*)$ 两次，把 $u_{n+2}-u_n$ 用 $u_{n+1}-u_{n-1}$ 表示，再把 $u_{n+1}-u_{n-1}$ 用 u_n-u_{n-2} 表示。

由 $(*)$，

$$u_{n+2}-u_n=\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n-1}}=-\frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{u_{n+1}u_{n-1}},$$

同理 $u_{n+1}-u_{n-1}=-\dfrac{u_n-u_{n-2}}{u_nu_{n-2}}$。把两式合起来，两个负号互相抵消：

$$u_{n+2}-u_n=\frac{u_n-u_{n-2}}{u_{n+1}u_n\cdot u_{n-1}u_{n-2}}.$$

最后，由 $(*)$ 可知 $u_{n+1}u_n=u_n+1$ 及 $u_{n-1}u_{n-2}=u_{n-2}+1$，于是得到所求的公式。（我们需要 $n\ge 3$，u_{n-2} 才存在。）∎

阶段 2　一个陷阱

> **停一停，试一试**　证明对所有 n 均有 $1\le u_n\le 2$。

对 $u_1=1$ 这是成立的。若 $1\le u_n\le 2$，则 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{u_n}\le 1$，所以 $\frac{3}{2}\le u_{n+1}\le 2$，这当然介乎 1 与 2 之间。由归纳法（induction），对所有 n 均有 $1\le u_n\le 2$。∎

特别地，每个 u_n 都是正数，所以第 (i) 部分中的分母 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$ 是正数。

阶段 3　两个单调子数列

> **想一想**　第 (i) 部分的公式说明，$u_{n+2}-u_n$ 是 u_n-u_{n-2} 的正数倍。由此你能看出 u_3-u_1、u_5-u_3、u_7-u_5、...的正负号有甚么关系吗?

它们的正负号全部相同！由于 $u_3-u_1=\frac{3}{2}-1>0$，由第 (i) 部分和归纳法可得 $u_5>u_3$、

$u_7 > u_5$，如此类推：奇数项是递增的。它们有上界 2，所以根据定理，它们趋向一个极限；设它为 L。

同样地，$u_4 - u_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$，所以偶数项是递减的。它们有下界 1。定理是就递增数列而言的，但 $-u_2, -u_4, -u_6, \ldots$ 是递增的，且有上界 -1，所以它收敛，因而偶数项也收敛；设它们的极限为 M。

阶段 4 求出极限

想一想 要求出 L，你需要一条把 u_{n+2} 与 u_n 直接联系起来的方程。你能从 $(*)$ 得出这样的方程吗?

运用 $(*)$ 两次，

$$u_{n+2} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + 1/u_n} = 1 + \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

令 $n \to \infty$ 而只取奇数值，则 u_n 和 u_{n+2} 都趋向 L，所以

$$L = \frac{2L + 1}{L + 1} \quad \Longrightarrow \quad L^2 + L = 2L + 1 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 1 = 0.$$

方程的根是 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，而由于 $L \geq 1$，必有 $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$。对偶数值作完全相同的论证，可得 $M = \varphi$。

想一想 奇数项趋向 φ，偶数项也趋向 φ。为甚么这就表示整个数列趋向 φ?

直观地说，每一项不是奇数项就是偶数项，而两类项都在逼近 φ。严格地说：给定任意容许误差 $\varepsilon > 0$，奇数项由某个位置 N_1 起与 φ 的距离都小于 ε，偶数项则由某个位置 N_2 起如此。所以由 $\max(N_1, N_2)$ 起，*所有*项与 φ 的距离都小于 ε，而这正是收敛的意思。（这就是 Section 2.1 中“取较大的那个门槛”的做法。）

阶段 5 从别处出发

取 $u_1 = 3$ 时，数列是

$$3, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{11}{7}, \quad \frac{18}{11}, \quad \frac{29}{18}, \quad \cdots$$

现在 $u_1 = 3$ 在 $[1, 2]$ 之外，所以第 (ii) 部分的归纳法无法起步。但 $u_2 = \frac{4}{3}$ 在区间之内，归纳法由此开始便行得通：对所有 $n \geq 2$ 均有 $1 \leq u_n \leq 2$。第 (i) 部分只用到由 u_{n-2} 起的各项，而且只需要它们是正数，而它们确实全是正数。这一次 $u_3 - u_1 = \frac{7}{4} - 3 < 0$ 而 $u_4 - u_2 = \frac{11}{7} - \frac{4}{3} > 0$，所以奇数项递减，偶数项递增：角色互换了，但每个子数列（subsequence）仍然是单调且有界（bounded）的。两个极限满足同一条方程，而且都是正数，所以都是 φ。结论**没有**改变。 ■

回顾

- **数列不单调时，找出单调的部分。**把数列分成奇数项和偶数项，锯齿状的数列就变成了两个规矩的数列。
- **先证明收敛，再求极限。**方程 $L = (2L+1)/(L+1)$ 只有在我们知道 L 存在之后才站得住脚。引子中那个快捷的论证所略过的，正是这一步。
- **检查该取哪个根。**极限方程有两个解；第 (ii) 部分的上下界告诉我们哪一个才对。

背后的数学

蛛网图与不动点

每个由 $u_{n+1} = f(u_n)$ 定义的数列，都可以画成一幅蛛网图（*cobweb diagram*）（图 2.2.1）。画出 $y = f(x)$ 和 $y = x$。由 x 轴上的 u_1 出发，垂直走到曲线（高度为 $u_2 = f(u_1)$），再水平走到直线 $y = x$（这样便移到 $x = u_2$），然后再垂直走到曲线，如此类推。这里 $f(x) = 1 + 1/x$ 是递减的，所以路径会向内盘旋，交替地过高和过低，趋向曲线与直线相交的那一点：不动点（*fixed point*）φ，该处 $f(\varphi) = \varphi$。

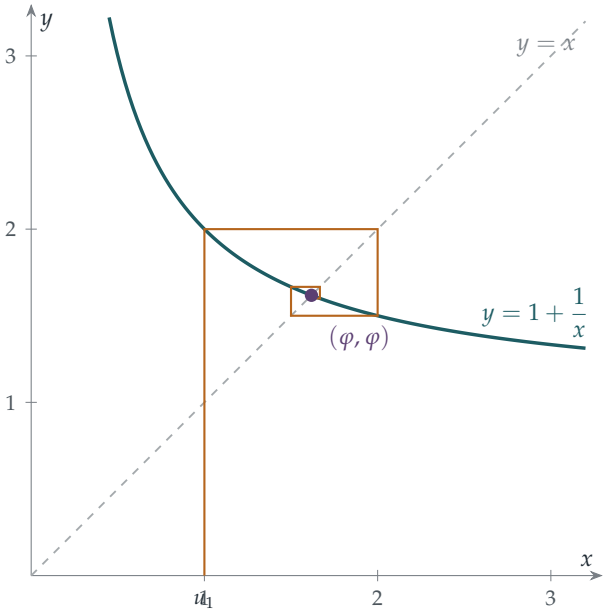


图 2.2.1　$u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ 由 $u_1 = 1$ 出发的蛛网图。路径向上走到曲线，再横向走到直线 $y = x$，如此不断重复。由于曲线向下倾斜，路径会向内盘旋，趋向不动点 $\varphi \approx 1.618$，并且交替落在两侧：这就是奇数项与偶数项的锯齿状摆动。

有多快，为甚么

第 (i) 部分中的因子 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$ 从何而来？在不动点附近，$u_{n+1}-\varphi = f(u_n)-f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n-\varphi)$，而 $f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$。所以每走一步，误差大约乘以 -0.38：正负号反转（锯齿状摆动），大小缩减（收敛）。走两步则乘以 $1/\varphi^4 \approx 0.146$，这正是 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$ 所趋向的值。到了大学，这会发展成*压缩映射定理*（*contraction mapping theorem*）：若在不动点附近有 $|f'| \le k < 1$，则迭代会收敛至该不动点，而误差至少以几何级数的速度缩小。它是数学中最有用的定理之一，也是用来证明微分方程有解的方法（第 8 章）。在 Section 2.8 中，我们会遇到一个不动点*并不*吸引的映射，结果截然不同。

最无理的数

各项 $u_n = F_{n+1}/F_n$ 是同等大小的分数之中对 φ 最好的逼近，但所谓“最好”其实并不太好：φ 比任何其他数都更难用分数逼近。原因可从它的连分数（continued fraction）$[1;1,1,1,\dots]$ 看出：连分数中出现大的项，就表示有非常好的逼近（试想 $\pi = [3;7,15,1,292,\dots]$ 和极佳的 $\frac{355}{113}$），而 φ 的每一项自始至终都是最小的。赫维兹（Adolf Hurwitz）于 1891 年证明，对每个无理数（irrational）x，都有无穷多个分数满足 $|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$，而且 $\sqrt{5}$ 不能再改进，原因正正在于 φ。这种“最大无理性”，就是黄金角出现在向日葵种子螺旋图案中的原因。

思维技巧

> **单调有界必收敛**
>
> 要在不知道极限的情况下证明数列收敛，可找出一个单调有界的数列，或者把数列分成若干单调有界的部分。
>
> 只有在知道极限存在之后，才可以在递推关系（recurrence）中“令 $n \to \infty$”来求出极限。在大学里，这个定理是实数完备性（*completeness*）的推论，完备性正是 $\mathbb{R}$ 有别于 $\mathbb{Q}$ 的性质，你会看到它由公理出发的证明。

延伸练习

1 **藏在其中的斐波那契数。** 证明 $u_n = F_{n+1}/F_n$，其中 $F_1 = F_2 = 1$ 及 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$。

2 **误差缩小。**证明 $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$，并由此推出对所有 n 均有 $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$。（利用 $\varphi^2 = \varphi + 1$ 及 $u_n \ge 1$。）

3 **令数列中断。**证明若 $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则数列是常数数列。求出所有使得某个 $u_n = 0$、以致数列无法继续下去的初始值 u_1。（提示：由 $u_n = 0$ 倒推回去。）

4 **$\sqrt{2}$ 的近亲。**设 $v_1 = 1$ 及 $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + v_n}$。仿照本题的方法，证明 $v_n \to \sqrt{2}$，并把 $\sqrt{2}$ 写成连分数。

延伸阅读

- **Mario Livio, *The Golden Ratio***（Broadway）。讲述 φ 的历史，把真正的数学与众多迷思区分开来。
- **C. D. Olds, *Continued Fractions***（Mathematical Association of America）。一本简短而非常易读的入门书，对象是能力较强的中学生。
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis***（Cambridge University Press）。严谨地处理单调数列与完备性，并附有大量习题。

2.3 一个发散级数与它的收敛近亲

题目

STEP III 2014，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/14-s3-q8`

引子

调和级数（harmonic series）$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$ 是最著名的例子：它的各项缩小至零，但总和却无止境地增长。它增长得慢得离谱：要超过 10，需要多于 12,000 项；要超过 100，则需要大约 1.5×10^{43} 项。但它终究会超过任何一个数。

现在把分母含有数字 2 的项全部丢掉：$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{20}$ 至 $\frac{1}{29}$、$\frac{1}{32}$ 等等统统删去。你也许会以为，对一个本来就是无穷大的和来说，删去十分之一左右的项不会有多大分别。事实却是，余下各项加起来小于 80。这个出人意表的结果由 A. J. Kempner 于 1914 年证明，而本题只用一个简单而漂亮的想法，就把你一步步带到这个结论：把和式切成一块一块。

动笔之前

想一想 第一个不等式谈的是由 $r=k^n$ 至 $r=k^{n+1}-1$ 的那一块。取 $k=2$ 和 $n=3$，这一块包含哪些项？共有多少项？

它们是 $f(8), f(9), \ldots, f(15)$，共八项。一般而言，这一块由 k^n 排到 $k^{n+1}-1$，所以共有 $k^{n+1}-k^n=k^n(k-1)$ 项。不等式所说的是：这一块的和介乎（项数）×（各项可能取的最小值）与（项数）×（最大的一项）之间。

逐步解题

阶段 1 估计一块的上下界

由于 f 是递减（decreasing）的，这一块内的每一项都满足

$$f(k^{n+1}) < f(k^{n+1}-1) \le f(r) \le f(k^n) \qquad (k^n \le r \le k^{n+1}-1).$$

把这 $k^n(k-1)$ 项加起来，便得到该不等式。 ■

阶段 2　调和级数

> **想一想**　取 $k=2$ 和 $f(r)=1/r$，由 2^n 至 $2^{n+1}-1$ 的那一块，两个界分别是甚么？

下界（lower bound）是 $2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$，上界（upper bound）是 $2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1$。所以每一块，不论排得多后，其贡献都介乎 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间（图 2.3.1）。$n = 0, 1, \dots, N$ 的各块恰好拼合成由 $r=1$ 至 $r = 2^{N+1}-1$ 的和，所以把 $N+1$ 块加起来，便得

$$\frac{N+1}{2} \le \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \le N+1.$$

当 $N \to \infty$ 时，左边无止境地增长，所以部分和（partial sum）无界，级数发散（diverge）。 ■

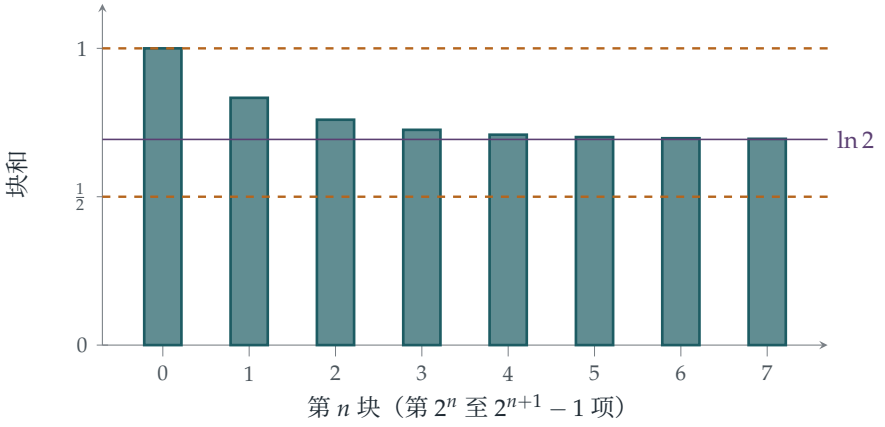


图 2.3.1　把调和级数切成分别有 $1, 2, 4, 8, \dots$ 项的各块。每一块的和都介乎 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间（琥珀色虚线），而事实上各块的和会逐渐趋近 $\ln 2 \approx 0.693$（紫红色线）。无穷多块，每块至少值 $\frac{1}{2}$，总和不可能有限。

阶段 3　立方倒数之和

现在取 $f(r) = 1/r^3$，仍然用 $k=2$。第 n 块的上界是

$$2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^3} = \frac{1}{4^n}.$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ 的各块把每个正整数恰好覆盖一次，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

（严格来说，这只证明了每个部分和都不超过 $\frac{4}{3}$；一个递增而有上界的数列必定收敛（converge），所以这个无穷和存在，而且不超过 $\frac{4}{3}$。它的真正数值是 1.2020 . . .）

阶段 4 数一数不含 2 的数

> **想一想** 如果容许在前面补零（例如把 7 写成 007），由 0 至 999 的整数之中，有多少个可以只用数字 $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 写出来?

三个数位每个都有 9 种选择，所以这样的数字串共有 9^3 个。它们与由 0 至 999 之中不含 2 的数一一对应，再剔除 0（它不是正数），$S(1000)$ 中便剩下 $9^3 - 1 = 728$ 个数。 $\blacksquare$

阶段 5 Kempner 级数

分块的想法现在同样适用，只是改为按位数来分块，这等同于取 $k = 10$。

> **停一停，试一试** 有多少个 d 位数不含 2? 而一个 d 位数最小可以是多少?

首位数字可以是 $1, 3, 4, \ldots, 9$ 中任何一个（八种选择：不能是 0，也不能是 2），其余 $d - 1$ 个数位各有九种选择。所以这样的数共有 $8 \times 9^{d-1}$ 个，而每一个都至少是 10^{d-1}。因此，$S(n)$ 中的 d 位数对 $\sigma(n)$ 的贡献至多是

$$8 \times 9^{d-1} \times \frac{1}{10^{d-1}} = 8 \left(\frac{9}{10} \right)^{d-1}$$

。对所有位数 $d = 1, 2, 3, \ldots$ 求和，

$$\sigma(n) \le \sum_{d=1}^{\infty} 8 \left(\frac{9}{10} \right)^{d-1} = \frac{8}{1 - \frac{9}{10}} = 80.$$

至于严格不等式，只须留意大部分的界都远远未达到相等（例如 $\frac{1}{3} < 1$，而我们却用 1 作为每个一位数项的上界），所以对所有 n 都有 $\sigma(n) < 80$。 $\blacksquare$

回顾

- **把各项分组。**两个和逐项处理都不容易。把它们分成大小合适的块之后，每个和都可以与一个等比级数（geometric series）比较。
- **怎样分块视乎问题而定。**2 的幂适合 $1/r$ 和 $1/r^3$；10 的幂则适合一道关于十进制数字的题目。

- **有界而递增。**两个收敛证明都建基于与 Section 2.2 相同的原理：正项的部分和是递增的，所以只需要找到一个界便足够。

背后的数学

凝聚判别法

题目中的第一个不等式正是*柯西凝聚判别法*（Cauchy's condensation test）的核心：若 f 为正且递减，则

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r) \text{ 收敛} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ 收敛。}$$

它把困难的级数变成容易的级数。应用于 $f(r)=1/r^p$，便得到 $\sum 2^n\cdot 2^{-np}=\sum (2^{1-p})^n$，这是一个等比级数，恰好在 $p>1$ 时收敛。应用于 $1/(r\ln r)$，可知连这个级数也发散；应用于 $1/(r(\ln r)^2)$，则可知这个级数收敛。这个论证可追溯至奥雷姆（Nicole Oresme），他在大约 1350 年正是用图 2.3.1 中的分块方法，证明了调和级数发散。

调和级数发散得有多慢

图 2.3.1 显示每一块的贡献大约是 $\ln 2$，所以首 N 项之和应该大约是 $\log_2 N\times\ln 2=\ln N$。事实上

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}=\ln N+\gamma+(\text{某个趋向 0 的量}),$$

其中 $\gamma=0.5772\ldots$ 是欧拉－马斯刻若尼常数（Euler–Mascheroni constant）。至今没有人知道 γ 是否有理数（rational）。你会在大学一年级的分析课中用积分证明这条公式，而调和数（harmonic numbers）会在 Section 9.11 和 Section 11.12 再次出现。

大多数的数都含有 2

Kempner 级数为甚么收敛？因为在大数之中，“不含 2 的数”非常罕有：在小于 10^d 的数之中，不含 2 的所占比例至多是 $(0.9)^d$，而这个比例趋向 0。在 100 位数之中，只有不足 0.003% 能避开数字 2。所以我们删去的并不是十分之一的项，而是几乎所有的项。我们求得的界 80 相当宽松：1979 年，Robert Baillie 用一种加速方法把这个和计算到小数点后许多位，其值约为 19.257。

幂的倒数之和

第 (ii) 部分的和是 $\zeta(3)$，即我们在 Section 1.2 遇过的黎曼（Riemann）zeta 函数的一个值。在 Section 2.4 我们会求出 $\zeta(2)=\pi^2/6$ 的准确值，而欧拉（Euler）亦找到了 $\zeta(4),\zeta(6),\ldots$ 的公式。但至今没有人找到 $\zeta(3)$ 的公式。1978 年，Roger Apéry 证明了 $\zeta(3)$ 是无理数

(irrational)，震惊了整个数学界；他所用的积分与 Section 2.9 中的颇为相似。至于 $\zeta(5)$ 是否无理数，至今仍然未知。

思维技巧

分块比较

要判断一个正项级数是否收敛，可以把各项分成若干块，使每块内的项大致不变，然后把每一块与一个简单的级数比较。

比较判别法（comparison test）是大学一年级分析课的家常便饭。技巧在于选择与甚么比较：在这里，就是选大小为 2^n 或 10^d 的块，块内各项的变化不超过一个固定的倍数。

延伸练习

1 **感受一下有多慢。** 利用 $\sum_{r\le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$，估计调和级数需要多少项才超过 10，以及需要多少项才超过 100。

2 **判别法的实际运用。** 用第 (i) 部分的方法，取 $f(r) = 1/r^2$，证明 $\sum 1/r^2 \le 2$。然后把第一项分开处理，从而改进这个界。

3 **在收敛与发散之间。** 利用 $k = 2$ 的分块不等式，证明 $\sum_{r\ge 2} \dfrac{1}{r \ln r}$ 发散，而 $\sum_{r\ge 2} \dfrac{1}{r(\ln r)^2}$ 收敛。

4 **排除更多数字。** 较难 证明：十进制表示中既不含 2 亦不含 7 的所有正整数，其倒数（reciprocal）之和小于 35。（你看得出 35 是怎样来的吗?）

延伸阅读

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*** (Princeton University Press)。讲述调和级数、γ 以及更多相关课题，为程度较高的中学生而写。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis*** (Palgrave)。一本简明的大学一年级教科书，其中论级数与比较判别法的一章写得十分清晰。
- **Robert Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit"**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979)。一篇短论文（论缺少某个指定数字的整数的倒数之和），读完本节后你便有能力读懂。

2.4 $\pi^2/6$

题目

STEP III 2018，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

`step.maths.org/questions/18-s3-q7`

引子

1650 年，Pietro Mengoli 提出了一个简单的问题：

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots ?$$

的值是甚么？各项缩小得够快，足以令这个和收敛（converge）（Section 2.3 已证明它不超过 2），但没有人能求出它的值。伯努利（Bernoulli）兄弟试过，却无功而还；雅各布·伯努利（Jacob Bernoulli）更公开恳求他人相助。这个问题后来以伯努利兄弟的家乡命名，称为巴塞尔问题（*Basel problem*）。

1734 年，年轻的欧拉（Leonhard Euler）解决了这个问题，答案令他一举成名：这个和等于 $\pi^2/6$。π 明明是一个关于圆的数，究竟为甚么会出现在平方倒数之和里？本题给出一个完整而严格的证明，所用的工具全部不超出高级程度（A-level）的范围：棣美弗定理（De Moivre's theorem）、多项式（polynomial）的根之和，以及夹逼（squeeze）。

动笔之前

在处理细节之前，值得先看看整体的计划。

- 第 (i) 部分构造一个多项式，它的根就是 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ 这些数。
- 第 (ii) 部分利用系数（coefficient），在不知道各个根的情况下把这些根加起来。
- 第 (iii) 部分利用“当 θ 很小时 $\cot\theta \approx 1/\theta$”这个事实，把 $\cot^2$ 值之和变成 $1/m^2$ 值之和，然后夹逼。

> **想一想**　若多项式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的根为 $r_1, \ldots, r_n$，那么 $r_1 + \cdots + r_n$ 以系数表示是甚么？

答案是 $-a_{n-1}/a_n$。这个事实正是第 (ii) 部分的动力所在。

逐步解题

阶段 1　棣美弗定理

> **想一想**　把 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 写成单一分数。你留意到分子有甚么特别？

$\cot\theta + \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$，同样地 $\cot\theta - \mathrm{i} = \dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{\sin\theta}$。根据棣美弗定理，

$$(\cot\theta \pm \mathrm{i})^{2n+1} = \frac{\cos(2n+1)\theta \pm \mathrm{i}\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}.$$

两式相减，余弦项互相抵消，正弦项则变成两倍，再除以 $2\mathrm{i}$ 便得

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta}. \qquad \blacksquare$$

阶段 2　多项式

现在改用二项式定理（binomial theorem）展开左边。设 $c = \cot\theta$ 及 $N = 2n+1$。

> **想一想**　在 $(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N$ 中，两个二项展开式有哪些项互相抵消，又有哪些项变成两倍？

含 i^j 的项在第一个展开式中带 $+$ 号，在第二个展开式中则带 $(-1)^j$。因此 j 为偶数的项互相抵消，j 为奇数的项变成两倍：

$$(c+\mathrm{i})^N - (c-\mathrm{i})^N = 2\sum_{j\ \text{为奇数}} \binom{N}{j} c^{N-j}\,\mathrm{i}^j.$$

取 $j = 2k+1$，则 $\mathrm{i}^j = \mathrm{i}\,(-1)^k$ 及 $c^{N-j} = c^{2n-2k} = (c^2)^{n-k}$。除以 $2\mathrm{i}$，得

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin^{2n+1}\theta} = \binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \cdots + (-1)^n,$$

其中 $x = \cot^2\theta$。

停一停，试一试 左边在哪些 θ 的值时等于零？利用这一点找出多项式的 n 个不同的根。

当 $\sin(2n+1)\theta = 0$ 而 $\sin\theta \neq 0$ 时，左边等于零，例如当 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$，其中 $m = 1, 2, \ldots, n$。这些角全部严格介乎 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间，而 cot 在这个范围内为正且严格递减，所以 $\cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$ 这 n 个值各不相同。n 次多项式最多有 n 个根，所以这些就是它的全部根。 ■

阶段 3 把根加起来

根之和等于 $-$(以下一项的系数：x^{n-1})/(以下一项的系数：x^n)：

$$\sum_{m=1}^{n} \cot^2\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6\,(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}. \qquad \blacksquare$$

以 $n = 1$ 验算：$\cot^2(\pi/3) = \frac{1}{3}$，而 $\frac{1\times 1}{3} = \frac{1}{3}$。

阶段 4 夹逼

由 $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$ 出发，取倒数（不等号方向因而倒转）再平方：

$$\cot^2\theta < \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta.$$

想一想 代入 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$，并对 $m = 1, \ldots, n$ 求和。外侧的两个和变成甚么？中间的和与 $\sum 1/m^2$ 有甚么关系？

中间的和是 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{m^2\pi^2}$。根据第 (ii) 部分，左边的和是 $\frac{n(2n-1)}{3}$，而右边的和是 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$。各项同乘以 $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$：

$$\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} < \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}.$$

当 $n \to \infty$ 时，$\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}$ 和 $\frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}$ 都趋向 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$（把分子和分母同除以 n^2）。所以上下两个界都趋向 $\frac{\pi^2}{6}$，而部分和（partial sum）被夹在两者之间，亦必定趋向 $\frac{\pi^2}{6}$（图 2.4.1）。■

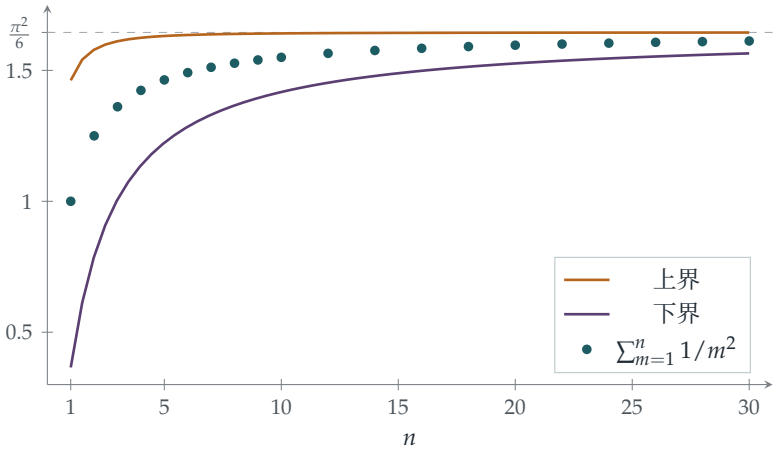


图 2.4.1　第 (iii) 部分的夹逼。$\sum 1/m^2$ 的部分和（蓝绿色点）被夹在下界（紫红色）与上界（琥珀色）之间，而两个界都趋向 $\pi^2/6 \approx 1.645$。

回顾

- **从系数取得信息。**我们始终没有把 $\cot^2(m\pi/(2n+1))$ 这些根化成任何更简单的形式，却准确地求出了它们的和。
- **先近似，再夹逼。**$\cot\theta$ 只是近似等于 $1/\theta$，但误差在两个方向上都受到精确的不等式控制。
- **由有限到无限。**除了最后一步，每一步处理的都是有限和。无穷和只在我们于不等式中令 $n \to \infty$ 时才出现，这正是处理无限的稳妥方法。

背后的数学

欧拉的大胆论证

以现代标准来看，欧拉本人在 1734 年的论证并不严格，却令人目眩神迷。一个多项式若以 $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$ 为根，且在 0 处取值 1，便可分解为 $(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$。函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 处取值 1，而它的根是 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$，于是欧拉把它当作一个“无限多项式”，写下

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots .$$

右边 x^2 的系数是 $-\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$，而由麦克劳林级数（Maclaurin series）$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$ 可知它是 $-\frac{1}{6}$。两相比较便得 $\pi^2/6$。我们这个 STEP 证明正是同一想法的

有限而严格的版本：一个多项式，它的根与 π 的倍数息息相关，再加上它的第二个系数。

平方倒数以外

欧拉其后还求出 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$、$\sum 1/m^6 = \pi^6/945$，而一般而言 $\sum 1/m^{2k}$ 是 π^{2k} 的有理数倍，当中涉及伯努利数（*Bernoulli numbers*）。奇数次幂则是另一回事：正如我们在 Section 2.3 所见，没有人知道 $\sum 1/m^3$ 的公式。这些和就是黎曼 ζ 函数（Riemann zeta function）的值 $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$，而这个函数在复数自变量上的表现，支配着质数的分布（Section 1.2）。

日后在哪里再遇上

在大学里，你会至少再遇到 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 的三个证明：一个来自傅里叶级数（*Fourier series*）（把函数写成正弦和余弦之和），一个来自二重积分（double integral），还有一个来自复分析（complex analysis）。这个数也在概率中出现：随机选出的两个整数没有公因数的机会是 $6/\pi^2 \approx 0.61$。（质数 p 同时整除两者的概率是 $1/p^2$，所以没有任何质数同时整除两者的机会是 $\prod_p (1 - 1/p^2)$，而欧拉证明了这个乘积等于 $1/\zeta(2)$。）π 在概率极限中的另一次现身，是 Section 12.23 的主题。

思维技巧

夹逼，以及根的对称函数（symmetric functions）

要求一个极限，可把该量夹在两个极限相同而较简单的式子之间。

而当你需要求一些难缠的数之和（或积）时，不妨试找一个以它们为根的多项式：系数会把这些数的对称组合白白送给你。

延伸练习

1 **1992 年的版本。**试做 STEP III 1992, 第 8 题（`step.maths.org/questions/92-s3-q8`）。它利用一个与本节相似的多项式，求出正切平方与余割平方的准确和。（提示：若你知道一个多项式的根是 r_i，那么哪个多项式的根是 $1/r_i$?）

2 **奇数的平方。**由 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ 推导出 $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$。

3 **四次方。** 较难 利用 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$ 和多项式的系数，求 $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\!\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$，并改动夹逼的论证以证明 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$。

4 **有多快？** 利用第 (iii) 部分的下界，证明 $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$。按这个结果，$n$ 要多大才能保证部分和与 $\pi^2/6$ 相差不超过 0.001？试与真正的误差比较，后者接近 $1/n$。

延伸阅读

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***（Mathematical Association of America）。第 3 章讲述巴塞尔问题的故事，并完整交代当中的数学。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 9 章“Three times $\pi^2/6$”。当中包括本节的证明。
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula***（Princeton University Press）。内容涵盖复数、傅里叶级数，以及类似本节的求和。

2.5 韦达乘积

题目

STEP III 2022，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip`

引子

这道题的最后一行，是数学中最优美的公式之一，也是同类公式中最古老的一条。它由法国律师兼数学家韦达（François Viète）于 1593 年发表，是历史上第一次有人把 π 准确地写成一个无穷过程的结果。在韦达之前，π 只能求近似值；在他之后，它可以用一条公式来定义，只要一直算下去，就能得出每一个数位。

这条公式看来很神秘：一层套一层的 2 的平方根，即嵌套平方根（nested square roots），究竟从何而来？这道题揭示，它其实来自反复运用倍角公式（double-angle formula），而且同一套方法还顺道得出另一条名气较小的公式，是关于 $\ln 2$ 的。

动笔之前

想一想 sinh 的倍角公式是甚么？（如果不肯定，可把 $\sinh 2y$ 和 $\sinh y \cosh y$ 用指数函数写出来，再作比较。）

$\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$，与 $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ 完全一样。整道题就是靠反复运用这一条恒等式（identity）来推动的。题目一直使用双曲函数（hyperbolic functions），到最后一部分我们才转用普通的三角函数。

逐步解题

阶段 1　反复减半

$n=1$ 的情况就是取 $y=x/2$ 的倍角公式：

$$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right).$$

想一想 假设公式对 n 成立。最后一个因子是 $\sinh(x/2^n)$。怎样改写它，才能得到 $n+1$ 时的公式？

对它运用倍角公式：$\sinh(x/2^n)=2\cosh(x/2^{n+1})\sinh(x/2^{n+1})$。代入后得

$$\sinh x = 2^{n+1}\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cosh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right),$$

这正是 $n+1$ 时的公式。根据归纳法（induction），公式对所有 n 成立。 ■

至于随后的推论，先把两边除以 x，再把两边乘以 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$。在右边，$2^n\sinh(x/2^n)\cdot\dfrac{x/2^n}{x\sinh(x/2^n)}=1$，只剩下各个 cosh 项的乘积。 ■

阶段 2　极限

由级数（series）可知，当 $y\neq 0$ 时，

$$\frac{\sinh y}{y}=1+\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}+\cdots,$$

当 $y\to 0$ 时它趋向 1，所以它的倒数 $y/\sinh y$ 也趋向 1。（如果想严谨一点：尾部 $\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}+\cdots$ 中的每个阶乘都至少是 6，所以当 $0<|y|<1$ 时，尾部至多是 $\frac{1}{6}(y^2+y^4+\cdots)=\frac{y^2}{6(1-y^2)}$，而这个量趋向 0。）

现在固定 x，在第 (i) 部分中令 $n\to\infty$。这时 $y=x/2^n\to 0$，所以左边趋向 $\dfrac{\sinh x}{x}\times 1$。右边是部分积（partial product），因此它也趋向 $\dfrac{\sinh x}{x}$。这正是无穷乘积（infinite product）的意思。 ■

阶段 3　$\ln 2$ 的公式

取 $x=\ln 2$，则 $e^{x/2}=\sqrt{2}$，所以

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2^{1/2}+2^{-1/2}}{2}=\frac{2+1}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

同样地，$e^{x/4}=2^{1/4}$，所以 $\cosh(x/4)=\dfrac{2^{1/4}+2^{-1/4}}{2}$，把分子和分母同乘以 $2^{1/4}$，便得 $\dfrac{2^{1/2}+1}{2\times 2^{1/4}}$。 ■

想一想 $\cosh(x/2^k)$ 的一般规律是甚么？把所有分母 $2\times 2^{1/2^k}$ 乘在一起，会有甚么结果？

同样的计算显示，对每个 $k\geq 1$，

$$\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1+2^{1/2^{k-1}}}{2}\times 2^{-1/2^k}.$$

（当 $k=1$ 时，这就是 $\frac{1+2}{2}\times 2^{-1/2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$，与前面一致。）对 $k=1,2,3,\ldots$ 连乘，2 的各个幂合并成 $2^{-(1/2+1/4+1/8+\cdots)}=2^{-1}$，而第一个分数是 $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$。所以这个无穷乘积是

$$\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1+2^{1/2}}{2}\times\frac{1+2^{1/4}}{2}\times\frac{1+2^{1/8}}{2}\cdots.$$

另一边，$\sinh(\ln 2)=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$，所以 $\dfrac{\sinh x}{x}=\dfrac{3}{4\ln 2}$。两边的因子 $\frac{3}{4}$ 互相约去，剩下

$$\frac{1}{\ln 2}=\frac{1+2^{1/2}}{2}\times\frac{1+2^{1/4}}{2}\times\frac{1+2^{1/8}}{2}\cdots.$$ ■

阶段 4 韦达公式

想一想 第 (iv) 部分含有 π，所以它必定来自普通的三角函数，而不是双曲函数。如果把 sinh 和 cosh 换成 sin 和 cos，第 (i) 和第 (ii) 部分的一切是否仍然成立？

仍然成立。归纳法只用到倍角公式，而 $\sin 2y=2\sin y\cos y$。极限只用到当 $y\to 0$ 时 $\frac{\sin y}{y}\to 1$，这可以用同样的方法由 $\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\cdots$ 推出。所以当 $x\neq 0$（并且 x 不是 π 的倍数，以确保过程中没有因子为零）时，

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

停一停，试一试 选取 x 使左边等于 $2/\pi$，然后算出最初几个因子。半角公式（half-angle formula）$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$（适用于 $0\leq\theta\leq\pi$）会派上用场。

取 $x=\frac{\pi}{2}$。这时 $\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}$，而各因子是 $\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{\pi}{8},\cos\frac{\pi}{16},\ldots$。第一个是 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。如果某个因子是 $\cos\theta=\frac{c}{2}$，由半角公式可知下一个因子是

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+c/2}{2}}=\frac{\sqrt{2+c}}{2}.$$

所以分子依次是 $\sqrt{2}$、$\sqrt{2+\sqrt{2}}$、$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$、...，每一个都是把前一个加上 2 再开平方而得。这就是韦达公式。 ■

回顾

- **乘积的相消（telescoping）。**第 (i) 部分的恒等式是一个会收拢的乘积，正如某些和式可以裂项相消一样。
- **先有有限的恒等式，再取极限。**与 Section 2.4 一样，每一步对有限的 n 都是准确的，唯一需要的极限就是非常简单的 $\frac{\sin y}{y} \to 1$。
- **双曲函数与圆函数是孪生兄弟。**同一个证明对两者都适用，因为两者满足相同的倍角公式和相同的小角极限。这并非巧合：$\cosh(ix) = \cos x$，你会在 Section 5.7 看到。

背后的数学

阿基米德（Archimedes）的多边形

韦达公式有一个几何意义，可追溯至阿基米德。内接（inscribed）于半径为 1 的圆的正 2^n 边形，面积是 $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$。把边数加倍，面积就乘以

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

由正方形（$A_2 = 2$）开始，不断把边数加倍，面积便趋向圆的面积 π。所以 $\pi = 2 \div \left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots\right)$，这正是韦达公式。乘积中的每个因子，都是图 2.5.1 中相邻两个多边形的面积之比。

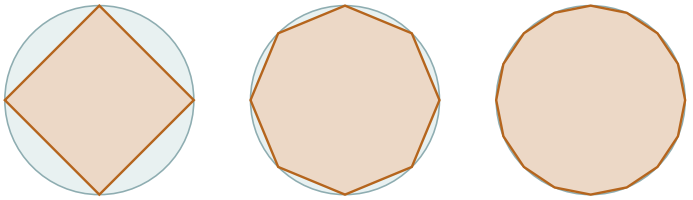


图 2.5.1　内接于半径为 1 的圆的正多边形，边数分别为 4、8 和 16。边数每加倍一次，面积就多除以韦达乘积中的一个因子，而面积不断增大并趋向 π。

无穷乘积

韦达乘积是数学史上第一个无穷乘积。其后陆续有其他例子：沃利斯（John Wallis）在 1655 年发现 $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$，而欧拉（Euler）关于 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘积已在 Section 2.4

出现过。到了大学，你会学到无穷乘积在甚么情况下收敛（converge）。粗略地说，当 $\prod(1+a_n)$ 中的 a_n 是细小的正数时，它的表现与 $\sum a_n$ 相似，因为 $\ln(1+a_n)\approx a_n$。这里 $1-\cos(\pi/2^n)\approx\frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$，每次缩小 4 倍，所以这个乘积收敛得很快。

有多快?

乘了 n 个因子之后，部分积恰好等于 $\dfrac{1}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})}$，其误差大约是 $\frac{\pi^2}{6\cdot4^{n+1}}$ 乘以 $\frac{2}{\pi}$。每多一个因子，答案的准确度大约提高 4 倍，即多得大约 0.6 个小数位。十个因子可使 $2/\pi$ 准确至六个小数位。这已经不错，但远远不及 Section 2.6 的方法那么快，那些方法每一步都令准确的位数加倍。

思维技巧

反复运用恒等式

一条把 $f(x)$ 与 $f(x/2)$ 联系起来的恒等式，可以一次又一次地运用；取极限之后，结果往往是一个无穷和或无穷乘积。

找出 n 步之后的“余项”（这里是 $2^n\sinh(x/2^n)$），然后另行求出它的极限。这个模式在分析学中随处可见，由无穷乘积以至分形（fractals）的构造都有它的踪影。

延伸练习

1 **1990 年的版本。**试做 STEP I 1990, 第 8 题（`step.maths.org/questions/90-s1-q8`）。它循一条与本节不同的途径得出韦达乘积，所用的不外乎 sin 的倍角公式。你觉得哪一种方法较为自然?

2 **另一个角。**在 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘积中取 $x=\frac{\pi}{3}$，把 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ 写成无穷乘积，并化简最初两个因子。

3 **要多少个因子?** 用计算机找出韦达乘积需要多少个因子，才能使 π 准确至 4 个小数位。解释为甚么每多一个因子大约多得 0.6 个数位。

4 **$\ln 3$ 的公式。**取 $x=\ln 3$ 重做第 (iii) 部分，把 $\frac{1}{\ln 3}$ 写成无穷乘积。需要多少个因子才能使 $\frac{1}{\ln 3}$ 准确至两个小数位? 为甚么这个乘积收敛得比韦达乘积慢?

延伸阅读

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。阿基米德、韦达、沃利斯等人的故事，写得兴味盎然。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。关于计算 π 的严谨数学，包括 Section 2.6 的方法。读完本章之后，第 1 章应该读得懂。
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights***（Princeton University Press）。书中有一章专门讲述韦达和他的乘积。

2.6 算术几何平均

题目

STEP II 2024，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip`

引子

取两个正数，例如 $\sqrt{2}$ 和 1。把它们换成两者的算术平均（arithmetic mean）和几何平均（geometric mean）。再做一次，然后再做一次。结果如下：

n	x_n（算术）	y_n（几何）
0	1.4142135623730950488	1
1	1.2071067811865475244	1.1892071150027210667
2	1.1981569480946342956	1.1981235214931201226
3	1.1981402347938772091	1.1981402346773072058
4	1.1981402347355922074	1.1981402347355922074

只需四步，两个数便有二十位小数完全相同。它们的共同极限（limit）就是*算术几何平均*（arithmetic–geometric mean，简称 AGM）$M(\sqrt{2},1) = 1.19814\ldots$

1799 年 5 月 30 日，年仅 21 岁的高斯（Carl Friedrich Gauss）在日记中写道，他发现 $1/M(\sqrt{2},1)$ 与一个常数有十一位小数相同，而这个常数出自一个完全不同的问题：一条称为双纽线（lemniscate）的曲线的弧长。他写道：“这必定会开辟一个全新的分析领域。”事实果然如此。本题要证明的，正是高斯这项发现背后的关键事实：AGM 能求出一个用任何常规方法都计算不了的积分。

动笔之前

> **想一想**　为甚么两个不相等的正数的算术平均，总是大于它们的几何平均？你能用一行证明吗？

这就是算术几何平均不等式（AM–GM inequality），而第 (i) 部分的提示正好给出这个一行证明：当 $x \neq y$ 时，$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 > 0$，展开后便是 $x+y > 2\sqrt{xy}$。第 (i) 部分的一切，都由这个不等式，以及“每个平均都介乎原来两个数之间”这个事实推出。

逐步解题

阶段 1　两个数列互相夹紧

若 $y_n < x_n$，则 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$，所以 $x_n - 2\sqrt{x_n y_n} + y_n > 0$，即 $x_{n+1} > y_{n+1}$。由于 $y_0 < x_0$，用归纳法（induction）可知对所有 n 都有 $y_n < x_n$。

> **想一想**　为甚么 x_n 与 y_n 的算术平均小于 x_n，而几何平均大于 y_n？

因为 $y_n < x_n$：$x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} < \frac{x_n+x_n}{2} = x_n$，而 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n$。所以

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < x_2 < x_1 < x_0.$$

y_n 递增，并以 x_0 为上界（bounded above），所以根据题目所给的定理，它趋向一个极限 M。

至于两者的差距，

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \frac{x_n+y_n}{2} - y_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n),$$

而由第一部分可知它是正数。所以差距每次至少减半：$0 < x_n - y_n < (x_0 - y_0)/2^n$，而后者趋向 0。

最后，$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ 是一个趋向 M 的数列与一个趋向 0 的数列之和，所以 $x_n \to M$ 亦成立。 ∎

阶段 2　代换

这个代换（substitution）看来无缘无故，但它其实经过精心设计，令根号下的两个括号都变成完全平方（或接近完全平方）。

想一想 设 $t=\frac{1}{2}\left(x-\frac{pq}{x}\right)$，计算 t^2+pq。然后计算 $t^2+\frac{1}{4}(p+q)^2$。两者之中，有没有哪一个可以漂亮地因式分解？

首先，

$$t^2+pq=\frac{1}{4}\left(x^2-2pq+\frac{p^2q^2}{x^2}\right)+pq=\frac{1}{4}\left(x+\frac{pq}{x}\right)^2.$$

其次，

$$\begin{aligned}t^2+\tfrac{1}{4}(p+q)^2&=\frac{1}{4}\left(x^2-2pq+\frac{p^2q^2}{x^2}+p^2+2pq+q^2\right)\\&=\frac{x^4+(p^2+q^2)x^2+p^2q^2}{4x^2}=\frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.\end{aligned}$$

另外 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{pq}{x^2}\right)=\dfrac{x^2+pq}{2x^2}$。

停一停，试一试 把以上结果合起来。当 x 由 0 走到 ∞ 时，t 怎样变化？关于 t 的积分会变成甚么？

当 x 由 0 增加至 ∞ 时，t 由 $-\infty$ 递增至 ∞（因为它的导数是正数）。对 $x>0$，

$$\sqrt{\left(t^2+\tfrac{1}{4}(p+q)^2\right)\left(t^2+pq\right)}=\frac{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}{2x}\cdot\frac{x^2+pq}{2x},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cdots}}=\frac{x^2+pq}{2x^2}\cdot\frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}}.$$

因此关于 t 的积分等于 $2\,\mathrm{I}(p,q)$。

另一方面，关于 t 的积分与 I 的形式完全一样，只是 p 和 q 分别换成了 $\frac{1}{2}(p+q)=\mathrm{a}(p,q)$ 和 $\sqrt{pq}=\mathrm{g}(p,q)$，而且积分范围是整条实数线。被积函数（integrand）是 t 的偶函数（even function），所以关于 t 的积分等于 $2\,\mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q),\mathrm{g}(p,q)\big)$。两者比较，得

$$\mathrm{I}(p,q)=\mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q),\mathrm{g}(p,q)\big).\qquad\blacksquare$$

阶段 3 求积分的值

想一想 由 (x_0,y_0) 开始，反复应用这个恒等式。经过 n 步之后，$\mathrm{I}(x_0,y_0)$ 等于甚么？当 $n\to\infty$ 时又会怎样？

对每个 n，$\mathrm{I}(x_0,y_0)=\mathrm{I}(x_1,y_1)=\mathrm{I}(x_2,y_2)=\cdots=\mathrm{I}(x_n,y_n)$。当 $n\to\infty$ 时，两个变量都趋向 M，而

$$\mathrm{I}(M,M)=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{M^2+x^2}=\left[\frac{1}{M}\arctan\frac{x}{M}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{2M}.$$

所以

$$\mathrm{I}(x_0, y_0) = \frac{\pi}{2M}. \qquad \blacksquare$$

题目容许我们直接接受“$\mathrm{I}(x_n, y_n) \to \mathrm{I}(M, M)$”这一步，但其实可以简洁地加以证明。把 p 或 q 增大，被积函数便会变小，而 $y_n < x_n$，所以

$$\frac{\pi}{2x_n} = \mathrm{I}(x_n, x_n) < \mathrm{I}(x_n, y_n) < \mathrm{I}(y_n, y_n) = \frac{\pi}{2y_n}.$$

上下两个界都趋向 $\frac{\pi}{2M}$，而对每个 n，$\mathrm{I}(x_n, y_n)$ 都是同一个数 $\mathrm{I}(x_0, y_0)$，所以它必定等于 $\frac{\pi}{2M}$。这又是一次夹逼（squeeze），与 Section 2.4 中的做法一样。

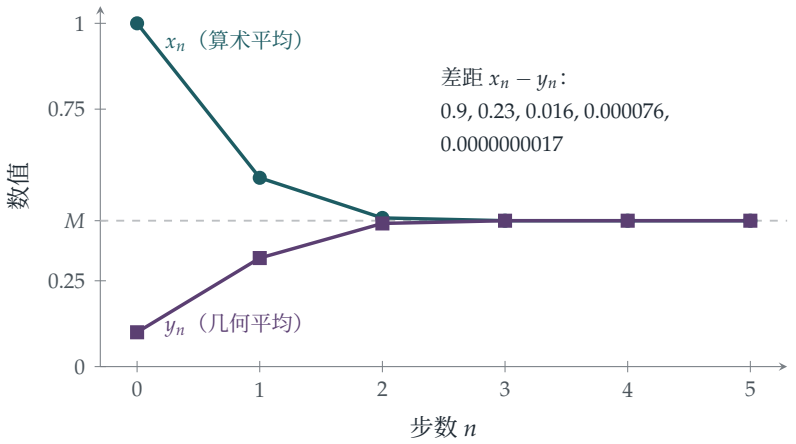


图 2.6.1　$x_0 = 1$ 与 $y_0 = 0.1$ 的算术几何平均。算术平均 x_n（蓝绿色）递减，几何平均 y_n（紫红色）递增，两者以惊人的速度逼近共同极限 $M = 0.425040709\ldots$：一旦两者接近，正确位数每一步大约增加一倍。

回顾

- **两个单调数列互相夹紧。**一个上升，一个下降，而两者的差距缩小至零。要证明两个数列有共同极限，这是最干净利落的方法。
- **不变量 (invariant)。**$\mathrm{I}(x_n, y_n)$ 这个量在每一步都保持不变。在其他一切都在变动时，找出某样固定不变的东西，是数学中最有力的想法之一。
- **巧妙的代换是设计出来的，不是猜出来的。**选用这个代换，正是为了令根号下的式子可以因式分解。

背后的数学

比题目所说的还要快

第 (i) 部分证明了差距每一步至少减半，这相当于每一步大约多得一个二进制位。引子中的表格所显示的却惊人得多：正确位数每一步大约*增加一倍*（$2, 4, 10, 21, 43, \ldots$）。事实上

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\bigl(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\bigr)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\bigl(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\bigr)^2},$$

所以每个差距大约是一个常数乘以前一个差距的*平方*。这称为*二次收敛*（quadratic convergence），我们会在 Section 2.7 中仔细探讨。

椭圆积分

我们的积分 $\mathrm{I}(p, q)$ 其实是一个乔装了的*完全椭圆积分*（complete elliptic integral）。这类积分在计算椭圆的弧长时出现，而且不能用你所认识的函数表示。它最著名的应用是单摆。高级程度（A-level）课程中的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 只是小幅度摆动时的近似。由角度 θ_0 释放的单摆，其准确周期是

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\bigl(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\bigr)},$$

这是一个可用 AGM 求值的椭圆积分。当 $\theta_0 = 90^\circ$ 时，真正的周期比简单公式所预测的长约 18%。高斯那则日记所谈的是双纽线，一条 8 字形的曲线，它的总弧长涉及 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$；这个积分其实就是乔装了的 $\mathrm{I}(\sqrt{2}, 1)$，所以可以用 AGM 求值。

计算 π

1976 年，Richard Brent 与 Eugene Salamin 各自独立地把高斯的想法变成一个计算 π 的算法（algorithm），每一步都令正确位数增加一倍。二十五步便可得出数千万位。在 1980 及 1990 年代，这类算法曾用于多次刷新纪录的 π 计算；时至今日，凡是需要高精度的地方，类似的二次收敛算法已成为标准工具。试比较 Section 2.5 中的韦达（Viète）乘积，它每一步只多得约 0.6 位。

思维技巧

寻找不变量

当一个过程同时改变许多东西时，找出一个不变的量。然后在过程的终点求它的值，因为那里一切都很简单。

在这里，过程就是 AGM 的每一步，而不变量就是积分 I。在过程的终点，两个变量相等，积分变成初等积分。不变量在数学中随处可见，由力学中的能量守恒（第 10 章），以至证明某些谜题无解。

延伸练习

1 **二次收敛。**证明恒等式 $x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{(x_n-y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$，并由此推出 $x_{n+1}-y_{n+1}\le\dfrac{(x_n-y_n)^2}{8y_0}$。

2 **亲手计算。**用计算机求 $M(2,1)$，准确至六位小数。你需要多少步？

3 **缩放。**证明对 $\lambda>0$ 有 $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda M(x,y)$，以及 $\mathrm{I}(\lambda p,\lambda q)=\lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$。验证这两个事实与 $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\pi/(2M)$ 互相吻合。

4 **单摆。**利用上面的公式，求由 60° 释放的单摆的周期比小角度近似的预测值长多少，答案准确至三位有效数字。

延伸阅读

- **David Cox, “The arithmetic–geometric mean of Gauss”**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984)。讲述这段历史和有关数学的经典文章；开首几节只需要微积分知识。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)。关于 AGM 与 π 的快速计算的权威著作。
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters)。讲述实验数学，包括像高斯那样凭着留意数值上的巧合而得出的发现。

2.7 六位还是六百位

题目

STEP II 2023，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip`

引子

有两个求 $\sqrt{2}$ 近似值的简单方法，同样由 1 开始，同样只用加法、乘法和除法。十步之后，第一个方法准确至小数点后约 8 位，第二个方法则准确至超过 700 位。

两者的分别，并不在于第二个方法对付 $\sqrt{2}$ 的手法较为高明，而在于误差的形态不同：第一个方法每走一步，误差乘以一个固定的分数；第二个方法每走一步，误差就被平方一次。这道题目把这一点说得精确，同时引入数值分析（numerical analysis）的一个核心概念；每一部计算机、每一次天气预报、每一个工程模拟，背后都是这门学科。

动笔之前

先以分数形式计算两个数列（sequence）的首几项。

$$x_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \cdots \qquad y_n:\quad 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \frac{665857}{470832},\ \cdots$$

? **想一想** 你留意到这两列数有甚么特别吗？（看看哪些分数在两列中都有出现。）

每一个 y_n 都在 x 的那一列中出现，只是位置愈来愈后：$y_2 = x_3$，$y_3 = x_7$，一般而言 $y_n = x_{2^n-1}$。第二个方法其实是在同一列近似值之中，以指数速度向前跳。请记住这一点，我们会在本节末解释。

逐步解题

阶段 1　第一个方法的各项不小于 1

我们可以写成 $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n + 1}$。若 $x_n \geq 1$，则 $x_n + 1 > 0$，所以 $x_{n+1} > 1$。由于 $x_0 = 1$，由归纳法（induction）可知对所有 n 都有 $x_n \geq 1$。 ■

阶段 2　第一个方法的误差

> ? **想一想**　题目以 $x_n^2 - 2$ 而不是 $x_n - \sqrt{2}$ 来量度误差。试把 $x_{n+1}^2 - 2$ 写成以 x_n 表示的单一分数。分子有甚么特别之处?

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n + 2)^2 - 2(x_n + 1)^2}{(x_n + 1)^2} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n + 1)^2} = \frac{2 - x_n^2}{(x_n + 1)^2}.$$

分子正好是 $-(x_n^2 - 2)$。所以 $x_{n+1}^2 - 2$ 与 $x_n^2 - 2$ 异号（近似值交替落在 $\sqrt{2}$ 的两侧），而且由 $x_n \geq 1$ 可得 $(x_n + 1)^2 \geq 4$，因此

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n + 1)^2} \leq \frac{1}{4}|x_n^2 - 2|. \qquad \blacksquare$$

阶段 3　十步之后

把上式连续应用十次，得 $|x_{10}^2 - 2| \leq 4^{-10}|x_0^2 - 2| = 4^{-10} = \frac{1}{1048576} < 10^{-6}$。至于正负号：$x_0^2 - 2 = -1 < 0$，而正负号逐项交替，所以对每个偶数 n 都有 $x_n^2 - 2 < 0$。于是 $x_{10}^2 < 2$，两者合起来便得 $2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2$。 ■

x_n^2 的误差每一步最多乘以 $\frac{1}{4}$。这称为*线性收敛*（linear convergence）：每一步增加固定数目的准确位数（这里最少是 $\log_{10} 4 \approx 0.6$；实际上较接近 0.77）。

阶段 4　第二个方法的误差

> ? **想一想**　试把 $y_{n+1} - \sqrt{2}$ 写成单一分数。分子应该会令你想起完全平方。

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{\left(y_n - \sqrt{2}\right)^2}{2y_n}. \qquad \blacksquare$$

若 $y_n > 0$，右方为非负数，所以 $y_{n+1} \geq \sqrt{2} > 1$。由于 $y_0 = 1$，由归纳法可知对所有 n 都有 $y_n \geq 1$。 ■（事实上，对所有 $n \geq 1$ 都有 $y_n \geq \sqrt{2}$：走完第一步之后，第二个方法永远从上方逼近 $\sqrt{2}$。）

阶段 5　把误差平方

设 $e_n = y_n - \sqrt{2}$，则当 $n \geq 1$ 时 $e_n \geq 0$，而且因为 $y_n \geq 1$，有 $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2y_n} \leq \dfrac{e_n^2}{2}$。

> **停一停，试一试** 用归纳法证明：当 $n \geq 1$ 时 $e_n \leq 2r^{2^n}$，其中 $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$。请仔细检查基础情况。

基础情况：$e_1 = \dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2 \cdot 1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$，而 $2r^2 = 2 \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2}{2}$。两者相等，所以基础情况成立（而且是等式）。

归纳步骤：若 $e_n \leq 2r^{2^n}$，则

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}}. \qquad \blacksquare$$

阶段 6 六百位小数

由于 $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$，我们有 $r < \frac{1}{4}$，所以

$$0 \leq y_{10} - \sqrt{2} \leq 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^{10}} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

而 $2^{10} = 1024 > 10^3$，所以 $2^{-2047} < 2^{-2040} = (2^{10})^{-204} < 10^{-612}$，这当然小于 10^{-600}。 $\blacksquare$

回顾

- **找出误差的递推关系。**两部分的做法，都是把新误差写成旧误差的一个精确函数，其余一切便随之而来。
- **线性与二次之别。**“新误差 $\leq$ 常数 $\times$ 旧误差”表示每一步增加固定数目的准确位数。“新误差 $\leq$ 常数 $\times$ (旧误差)^2”则表示每一步令准确位数加倍（图 2.7.1）。
- **平方量决定正负号。**在第 (ii) 部分，走一步之后的误差是一个平方数除以一个正数，所以永远不会是负数：迭代从上方逼近。

背后的数学

牛顿法

第二个方法其实是把牛顿法（Newton's method）应用于 $f(y)=y^2-2$。牛顿法求 f 的根的做法，是反复把猜测值 y 换成 y 处的切线与横轴的交点：

$$y_{\text{新}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2-2}{2y} = \frac{y^2+2}{2y}.$$

在单根（simple root）α 附近，由泰勒展开式（Taylor expansion）可知新误差约为 $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{旧误差})^2$，这就是牛顿法二次收敛（quadratic convergence）的原因。这个特殊情况，即“取 y 与 $2/y$ 的平均值”，古巴比伦人早已知道；一块约公元前 1700 年的泥板（现称为 YBC 7289）以 60 进制给出 $\sqrt{2}$ 的值，误差小于百万分之一。

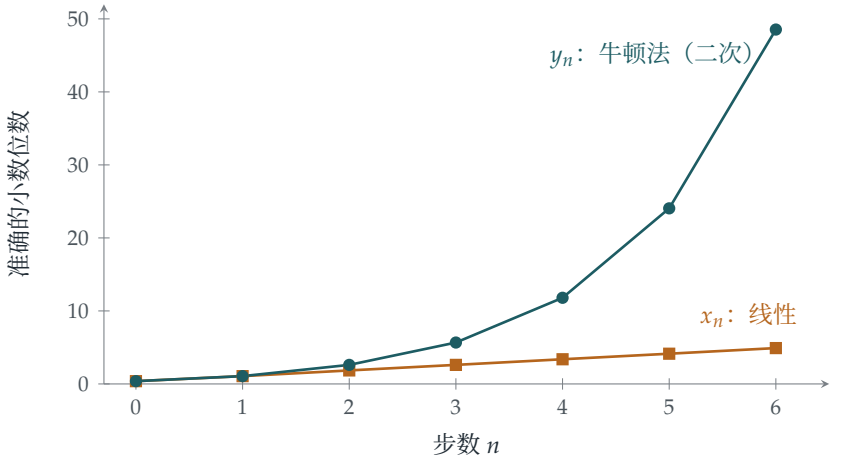


图 2.7.1　两个方法各走 n 步之后，$\sqrt{2}$ 的准确小数位数。线性的方法每一步增加约 0.77 位；牛顿法则每一步令准确位数大约加倍，到 $n=10$ 时达到约 780 位。

不动点及其收敛速度

两个方法都具有 $u_{n+1}=g(u_n)$ 的形式，而且 $g(\sqrt{2})=\sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}$ 是一个*不动点*（fixed point），正如 Section 2.2 的蛛网图（cobweb diagram）所示。在不动点 α 附近，误差每一步大约乘以 $g'(\alpha)$。对第一个方法而言，$g(x)=\frac{x+2}{x+1}$，而 $g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3-2\sqrt{2}) \approx -0.17$：负号解释了正负号为何交替，0.17 则解释了每一步为何增加 0.77 位（$\log_{10}(1/0.17)\approx 0.77$）。对牛顿法而言，$g'(\alpha)=0$，所以线性项消失，误差由下一项（即平方项）决定。设计出满足 $g'(\alpha)=0$ 的迭代（iteration），正是快速数值方法的精髓

所在。

为何出现相同的分数

分数 $x_n = p_n/q_n$ 满足 $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ 和 $q_{n+1} = p_n + q_n$，并且 $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$，正负交替。它们是佩尔方程（Pell's equation）$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ 的解，也是连分数（continued fraction）$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ 的渐近分数（convergents）。它们来自 $1 + \sqrt{2}$ 的幂：$p_n + q_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{n+1}$。牛顿法的每一步把 $p + q\sqrt{2}$ 平方（不妨一试：$(p + q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$，而 $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ 正是把牛顿法的公式应用于 p/q 的结果）。平方令指数加倍，这就是 $y_n = x_{2^n-1}$ 的原因。同样的“平方”模式，也是 Section 2.8 中迭代的动力来源。

思维技巧

分析误差，而不是答案

要了解一个近似方法的表现，就写下某一步的误差如何取决于上一步的误差。

这是数值分析的起点。两个方法的答案本身（$\sqrt{2}$）是一样的；不同之处，亦是实际应用中最要紧之处，在于误差如何演变。

延伸练习

1. **佩尔方程。**证明：若 $y_n = p/q$ 为最简分数，且 $p^2 - 2q^2 = 1$，则 $y_{n+1} = \dfrac{p^2 + 2q^2}{2pq}$ 亦满足这个方程。验证 $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$。

2. **立方根。**写出应用于 $f(y) = y^3 - 2$ 的牛顿法，并证明新误差为 $\dfrac{(y_n - \alpha)^2(2y_n + \alpha)}{3y_n^2}$，其中 $\alpha = \sqrt[3]{2}$。由此推出：若 $y_n > \alpha$，则新误差最多是旧误差平方的 $\frac{1}{\alpha}$ 倍。（提示：利用 $\alpha^3 = 2$。）

3. **不用除法的除法。**证明应用于 $f(y) = \frac{1}{y} - a$ 的牛顿法给出 $y_{n+1} = y_n(2 - ay_n)$，当中无需除法。若 $e_n = 1 - ay_n$，证明 $e_{n+1} = e_n^2$。（电脑处理器正是用这类迭代来做除法的。）

4. **牛顿法失效的时候。**把牛顿法应用于 $f(y) = y^{1/3}$，它唯一的根是 0。证明无论从哪里开始，每一步都令与根的距离加倍。误差公式的哪一个假设不成立？

延伸阅读

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。标准的大学本科数值分析教科书；第 1 章讲述不动点迭代和牛顿法。
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics***（Princeton University Press）。收录有关牛顿法和数值分析的短文，由专家执笔，面向广大读者。
- **David Fowler & Eleanor Robson, "Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context"**（古巴比伦数学中的平方根近似值），*Historia Mathematica* 25 (1998)。

2.8 平方再减二

题目

STEP III 2021，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

引子

“平方后减二”几乎是可以用来生成数列（sequence）的最简单规则。然而它把实数线分成两个世界。从 $[-2,2]$ 之外出发，各项会以比指数增长还要快的速度冲向无穷大。从区间之内出发，各项则永远被困在其中，四处游走，而且在一个精确的意义下完全无法预测：这是混沌（chaos）最简单的例子之一。

同一条规则，用在非常大的整数上，就是卢卡斯－莱默检验法（Lucas–Lehmer test）的核心。这是一个高效的检验法，用来判断梅森数（Mersenne number）2^p-1 是否质数（prime）；现时的最大质数纪录，以及其他已知最大的质数中的大部分，都是靠它找到的。本题探讨的是故事中“逃逸”的一面，并找出一条隐藏的公式，令这个数列完全可解。

动笔之前

先试几个初始值。取 $a=3$：$3,7,47,2207,\ldots$ 取 $a=1$：$1,-1,-1,-1,\ldots$ 取 $a=0$：$0,-2,2,2,2,\ldots$ 取 $a=0.3$：$0.3,-1.91,1.648,0.716,-1.487,0.211,\ldots$

想一想 为甚么 $[-2,2]$ 内的数永远无法逃出去？当 $-2\le x\le 2$ 时，x^2-2 最大和最小可以是多少？

若 $-2\le x\le 2$，则 $0\le x^2\le 4$，所以 $-2\le x^2-2\le 2$。区间 $[-2,2]$ 被映射到它自身之内。这就是第 (ii) 部分的一半。

逐步解题

阶段 1　逃逸

> **想一想**　第 (i) 部分出现了 4^{n-1}，暗示与 2 的距离每一步至少变成四倍。设 $x_n = 2 + d$。以 d 表示，x_{n+1} 是甚么？

$x_{n+1} = (2+d)^2 - 2 = 2 + 4d + d^2$。所以若 $d \geq 0$，新一项高出 2 的距离是 $4d + d^2 \geq 4d$。

现在用归纳法（induction）。当 $n = 1$ 时，$x_1 = a = 2 + 4^0(a-2)$。若 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$，则 $d = x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2) \geq 0$，所以

$$x_{n+1} - 2 \geq 4d \geq 4^n(a-2). \qquad \blacksquare$$

阶段 2　逃逸当且仅当 $|a| > 2$

> **想一想**　“当且仅当”（if and only if）表示要分别作两个证明。第 (i) 部分差不多已经给出哪一个方向？还欠甚么？

若 $|a| > 2$：当 $a > 2$ 时，由第 (i) 部分得 $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2) \to \infty$。当 $a < -2$ 时，第一步已把正负号纠正过来：$x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$，而由 x_2 开始的数列，就是以 $x_2 > 2$ 为初始值的同一个数列，所以它趋向无穷大。

仅当：若 $|a| \leq 2$，则 $a \in [-2, 2]$，由上面的观察可知每一项都留在 $[-2, 2]$ 之内。有界（bounded）的数列不可能趋向无穷大。 $\blacksquare$

阶段 3　一条隐藏的公式

第 (iii) 部分看来令人却步。在动手之前，值得先找出 x_n 的公式。

> **想一想**　若 $a > 2$，则存在一个数 $t > 1$ 使得 $a = t + \dfrac{1}{t}$。（为甚么？）以 t 表示，x_2 和 x_3 是甚么？

当 t 由 1 增至 ∞ 时，函数 $t + 1/t$ 由 2 递增至 ∞，所以每个 $a > 2$ 都可以写成这个形式。于是

$$x_2 = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad x_3 = \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)^2 - 2 = t^4 + \frac{1}{t^4},$$

再由归纳法得

$$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}.$$

平方后减 2，只不过是把指数加倍。这样题目就变得容易处理了。

阶段 4 乘积裂项相消

想一想 $\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 是甚么？若把结果再乘以 $t^2+\frac{1}{t^2}$，会怎样？

$\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)=t^2-\frac{1}{t^2}$，然后 $\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)=t^4-\frac{1}{t^4}$，如此类推：每个因子 x_k 都把两个幂之差中的指数加倍。所以

$$\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n=t^{2^n}-t^{-2^n}.$$

停一停，试一试 以 t 表示并计算 x_{n+1}^2-4，然后与上面的乘积比较。

$$x_{n+1}^2-4=\left(t^{2^n}+t^{-2^n}\right)^2-4=\left(t^{2^n}-t^{-2^n}\right)^2.$$

由于 $t>1$，$t^{2^n}-t^{-2^n}>0$，所以 $\sqrt{x_{n+1}^2-4}=t^{2^n}-t^{-2^n}=\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n$。因此

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2-4}}{x_{n+1}}=\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1\cdots x_n}{x_{n+1}},$$

而它对每个 n 都等于 y_n，恰好就是 $A=t-\frac{1}{t}$ 的时候。最后，$\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-4=a^2-4$，所以条件是 $A=\sqrt{a^2-4}$，即

$$a=\sqrt{A^2+4}.$$

（因为 $A>0$，这个值大于 2，符合要求。）■

阶段 5 y_n 是否收敛？

取这个 a 值时，

$$y_n=\frac{\sqrt{x_{n+1}^2-4}}{x_{n+1}}=\sqrt{1-\frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

由第 (ii) 部分知 $x_{n+1}\to\infty$，所以 $\frac{4}{x_{n+1}^2}\to 0$，而 $y_n\to 1$。数列收敛（converge），极限为 1。■

所以无穷乘积（infinite product）$x_1x_2x_3\cdots$ 的增长速度与 x_{n+1}/A 完全相同：我们找到了一个由急速增长的项所组成的乘积的精确增长率。

回顾

- **不变区域（invariant region）。**$[-2,2]$ 被映射到它自身之内，单凭这一点就解决了第 (ii) 部分的一半。

- **把问题线性化的代换（substitution）。**写成 $a = t + 1/t$ 之后，“平方后减 2”就变成“把指数加倍”。杂乱的非线性行为变得简单。
- **又是裂项相消（telescoping）。**与 Section 2.5 中的乘积一样，由许多因子组成的乘积之所以能折叠起来，是因为每个因子都与下一个互相配合。

背后的数学

秩序与混沌

在 $[-2, 2]$ 之内会发生甚么事？在那里 $a = t + 1/t$ 行不通（它需要 $|a| \geq 2$），但三角函数的版本却可行：设 $a = 2\cos\theta$。则 $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$，而一般地

$$x_n = 2\cos\left(2^{n-1}\theta\right).$$

所以在区间之内，这个映射只不过是*把角度加倍*。听起来无伤大雅，但把角度加倍其实是混沌的。把 θ/π 写成二进制（binary）：加倍会把二进制小数点向右移一位，并丢掉最前面的一位数字。经过 50 步之后，x_n 取决于 θ/π 的第 51 位二进制数字，所以初始值若有 10^{-15} 的误差（一般电脑的精确度），50 步之后的答案就完全不可靠。这种对初始条件的敏感依赖（sensitive dependence on initial conditions）正是混沌的标志，见图 2.8.1。映射 $x \mapsto x^2 - 2$ 经变量代换后，等价于著名的逻辑斯谛映射（logistic map）$x \mapsto 4x(1-x)$，我们会在 Section 8.7 再遇上它。

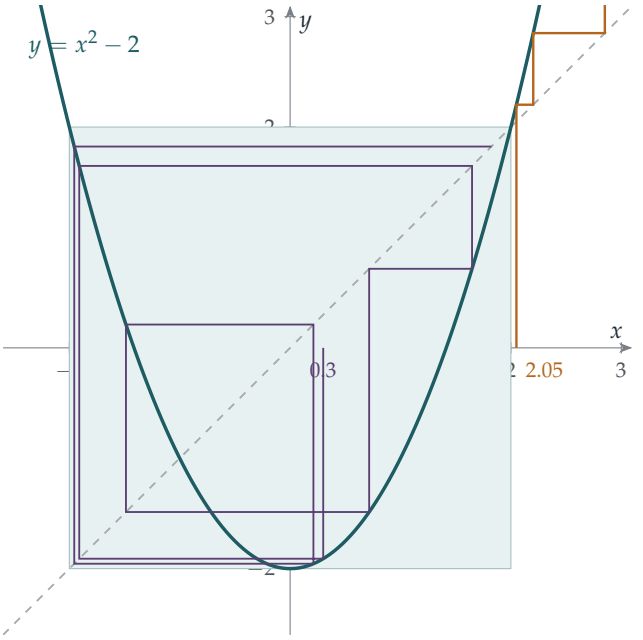


图 2.8.1 $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ 的蛛网图（cobweb diagram）。由 0.3 出发（紫红色），轨道（orbit）永远留在阴影正方形 $[-2,2]^2$ 之内，混沌地游走。由区间外不远处的 2.05 出发（琥珀色），它就会逃逸：$2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

寻找最大的质数

梅森数是指 $M_p = 2^p - 1$。卢卡斯（Édouard Lucas）在 1876 年发现了一个出色的检验法，用来判断 M_p 是否质数（其中 p 为奇质数），其后莱默（Derrick Lehmer）在 1930 年把它完善：由 $s_0 = 4$ 开始，反复平方后减 2，每次都取模（modulo）M_p 化简。则

$$M_p \text{ 是质数} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

以 $M_7 = 127$ 为例：$s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$，所以 127 是质数。它与本题的联系就在于那个代换：$4 = t + 1/t$，其中 $t = 2 + \sqrt{3}$，所以 $s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$，而检验法的证明用到形如 $a + b\sqrt{3}$ 的数的算术，与 Section 1.6 的高斯整数（Gaussian integers）颇为相似。由于每一步只需要一次平方，这个检验法极为快速，这就是为甚么已知最大的质数中的大部分，包括现时的纪录保持者，都是梅森质数（并非全部都是：其他特殊形式，例如 $a^{2^n} + 1$，也有各自的快速检验法）。在本书撰写之时，纪录是 $2^{136279841} - 1$，这个数有多于 41 百万位数字，于 2024 年发现。

曼德博集合

把 -2 换成任意常数 c，并容许复数：$z \mapsto z^2 + c$。令 0 的轨道保持有界的所有 c 所组成的集合，就是曼德博集合（Mandelbrot set）。我们的映射对应 $c = -2$，即曼德博集合最

左边的一点，而轨道保持有界的初始值所组成的集合（它的茹利亚集合（Julia set））正好是我们在第 (ii) 部分找到的区间 $[-2,2]$。对于几乎所有其他的 c，这个集合都是分形（fractal）。

思维技巧

转换变量，令映射变得简单

若一个迭代（iteration）看来很复杂，就找一个代换，把它变成简单的东西，例如加倍或加上一个常数。

这里 $x = t + 1/t$ 和 $x = 2\cos\theta$ 把 $x \mapsto x^2 - 2$ 变成了加倍。在动力系统（dynamical systems）理论中，这称为*共轭*（conjugacy），而找到共轭往往是彻底理解一个系统的关键。

延伸练习

1 **区间之内。**证明若 $a = 2\cos\theta$，则 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$。求所有使得 $x_3 = a$ 但 $x_2 \neq a$ 的 a 值。（提示：你需要 $4\theta \equiv \pm\theta$，模 2π。）

2 **手算卢卡斯－莱默检验法。**用这个检验法证明 $M_5 = 31$ 是质数，而 $M_{11} = 2047$ 不是。（对 M_{11} 你需要九步；用计算机会有帮助。把 2047 作因数分解，以验证你的结论。）

3 **一个具体例子。**取 $A = \frac{3}{2}$。求 a 和 t，并以数值验证公式 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$。

4 **裂项相消的和。**较难设 $a = t + 1/t$ 且 $t > 1$，证明

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

利用恒等式 $\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z}{z^2-1}$，其中 $z = t^{2^n}$，由此推出

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

当 $a = 3$ 时，以数值验证这个结果。

延伸阅读

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?***（Penguin）。讲述混沌的经典科普著作，当中包括逻

辑斯谛映射。

- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。标准的大学本科入门教材；第 10 章讲述像本题这样的一维映射。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。书中包括搜索梅森质数的故事。

2.9 逐步逼近 e 的分数

题目

STEP II 2021，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2021 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

`www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip`

引子

怎样才能找到逼近 e 的好分数？你可以把级数（series）$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots$ 截断，但以分母的大小来衡量，这样得到的分数并不算特别好。这道题的做法高明得多：它构造出一族积分，每个积分都是形如“整数 $+$ 整数 $\times e$”的一个很小的数。如果 $a+be$ 极小，那么 e 就非常接近 $-a/b$，于是这些积分便为我们送上一连串极佳的分数：$\frac{19}{7}$、$\frac{193}{71}$、$\frac{2721}{1001}$、…

同样的技巧，即找出既很小、又形如“你所关心的那个数的整数组合”的积分，正是数学中一些最深刻的无理性证明背后的想法，包括埃尔米特（Hermite）对 e 是超越数（transcendental）的证明，以及阿佩里（Apéry）对 $\zeta(3)$ 是无理数（irrational）的证明。

动笔之前

看看 $[0,1]$ 上的被积函数（integrand）$\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$。

> **想一想** $t(1-t)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值是多少？由此可知，当 n 增大时 T_n 的大小会怎样变化？

$t(1-t)$ 的最大值是 $\frac{1}{4}$，在 $t=\frac{1}{2}$ 处取得。所以被积函数至多为 $\frac{e}{4^n n!}$，它缩小的速度快得惊人（图 2.9.1）。这个“小”只是故事的一半。另一半，即 T_n 具有 a_n+b_ne 这种特殊形式，则来自分部积分法（integration by parts）。

逐步解题

阶段 1　求导两次

设 $p(t)=t^n(1-t)^n$。由积法则（product rule），

$$p'(t)=nt^{n-1}(1-t)^n-nt^n(1-t)^{n-1}=nt^{n-1}(1-t)^{n-1}(1-2t).$$

> **想一想**　再求导一次。你会得到两项；把公因式 $nt^{n-2}(1-t)^{n-2}$ 抽出来。要配合题目要求的形式，你需要把 $(1-2t)^2$ 改写成以 $t(1-t)$ 表示的式子。怎样做？

用积法则对 $n\,[t(1-t)]^{n-1}(1-2t)$ 求导（留意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)]=1-2t$）：

$$\begin{aligned}p''(t)&=n(n-1)[t(1-t)]^{n-2}(1-2t)^2-2n[t(1-t)]^{n-1}\\&=nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\Big[(n-1)(1-2t)^2-2t(1-t)\Big].\end{aligned}$$

现在 $(1-2t)^2=1-4t+4t^2=1-4t(1-t)$，所以方括号内的式子是 $(n-1)-4(n-1)t(1-t)-2t(1-t)=(n-1)-2(2n-1)t(1-t)$。 ■

阶段 2　分部积分两次

> **想一想**　$p(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=1$ 处都等于零。当 $n\ge 2$ 时，$p'(t)$ 又如何？在对 $p(t)e^t$ 作分部积分时，这一点为甚么重要？

当 $n\ge 2$ 时，$p'(t)$ 含有因式 $t^{n-1}(1-t)^{n-1}$，所以它在两个端点也等于零。分部积分两次，每一个边界项都是零：

$$\int_0^1 p\,e^t\,\mathrm{d}t=\Big[p\,e^t\Big]_0^1-\int_0^1 p'\,e^t\,\mathrm{d}t=-\Big[p'\,e^t\Big]_0^1+\int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t=\int_0^1 p''\,e^t\,\mathrm{d}t.$$

由第 1 阶段，$p''(t)=n(n-1)\,t^{n-2}(1-t)^{n-2}-2n(2n-1)\,t^{n-1}(1-t)^{n-1}$。除以 $n!$：

$$\frac{p''(t)}{n!}=\frac{t^{n-2}(1-t)^{n-2}}{(n-2)!}-2(2n-1)\frac{t^{n-1}(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

乘以 e^t 再积分，便得 $T_n=T_{n-2}-2(2n-1)T_{n-1}$。 ■

阶段 3　整数结构

$T_0=\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t=e-1$。至于 $T_1=\int_0^1(t-t^2)e^t\,\mathrm{d}t$，由分部积分得 $\int_0^1 te^t\,\mathrm{d}t=1$ 及 $\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t=e-2$，所以 $T_1=1-(e-2)=3-e$。

想一想 $T_0 = -1+1\cdot e$ 而 $T_1 = 3+(-1)\cdot e$。为甚么每个 T_n 都必定具有 $a_n + b_n e$ 的形式，其中 a_n、b_n 是整数?

用强归纳法（strong induction）：若 $T_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2}e$ 及 $T_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1}e$，其中系数都是整数，则

$$T_n = (a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}) + (b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1})e,$$

而新的系数也是整数。 ■

阶段 4 很小，因而带来信息

当 $0 < t < 1$ 时，被积函数是正数，并且 $t^n(1-t)^n \le 1$ 及 $e^t < e$。所以

$$0 < T_n < \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{e}{n!}.$$

停一停，试一试 把 $0 < a_n + b_n e < \dfrac{e}{n!}$ 除以 $|b_n|$。这说明 e 与 $-a_n/b_n$ 之间的距离如何?

除以 $|b_n|$（它是正整数，所以至少是 1），

$$\left| e - \left(\frac{-a_n}{b_n}\right)\right| = \frac{|a_n + b_n e|}{|b_n|} < \frac{e}{n!\,|b_n|} \le \frac{e}{n!}.$$

右边趋向 0，所以 $-a_n/b_n \to e$。 ■

以下是由递推关系（recurrence）算出的头几个分数：

n	2	3	4	5	6
$-a_n/b_n$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49171}{18089}$	$\frac{1084483}{398959}$
误差	4×10^{-3}	3×10^{-5}	1×10^{-7}	3×10^{-10}	5×10^{-13}

分数 $\frac{2721}{1001}$ 准确至小数点后 6 位，而分母只有四位数。

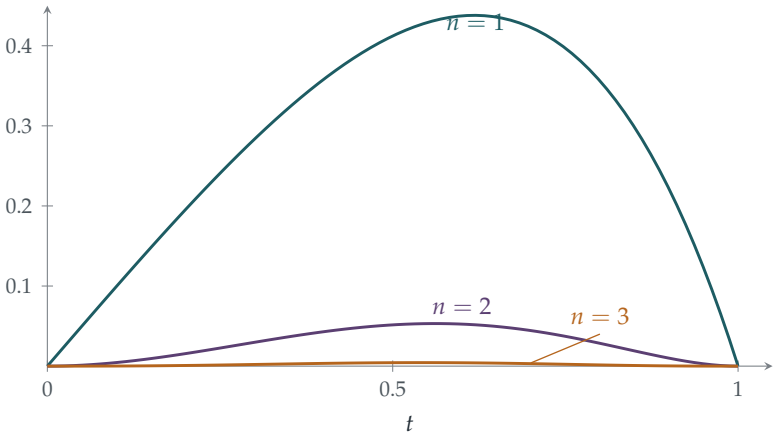


图 2.9.1　$n = 1, 2, 3$ 时的被积函数 $\frac{t^n(1-t)^n}{n!}e^t$。每一个在 $(0, 1)$ 上都是正数，所以每个 T_n 都是正数；而且它们缩小得极快，到 $n = 3$ 时曲线已几乎看不见。是正数但极小，正是这个论证所需要的。

回顾

- **分部积分是制造递推关系的机器。**由于多项式及其导数在两个端点都等于零，分部积分给出了一个没有边界项的简洁递推关系。
- **结构与大小并用。**递推关系说明 T_n 具有 $a_n + b_n e$ 的形式；上界说明它很小。单凭其中任何一项，都无法说明怎样逼近 e。
- **不需要的就不要算。**题目叫我们不必求出 a_n 和 b_n 的值，而论证也从来用不着它们；所需要的只是它们是整数。

背后的数学

e 是无理数的另一个证明

这道题离一个著名定理只差一步。假设 $e = p/q$，其中 p, q 是正整数。那么

$$q\,T_n = q a_n + b_n p$$

是一个整数。但是 $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$，而当 n 很大时，右边小于 1。于是 qT_n 就会是一个严格介乎 0 与 1 之间的整数，这是不可能的。因此 e 是无理数。这正是 Section 1.4 中“把一个整数困在 0 与 1 之间”的想法，只是这次由积分而不是级数来实现。正是这一类积分，配合 $t^n(1-t)^n$ 这样的多项式，在 1873 年被夏尔·埃尔米特（Charles Hermite）用来证明 e 是*超越数*：它不是任何整系数多项式的根。

连分数

表中的分数不仅是好；它们更属于*最佳之列*。e 的连分数（continued fraction）由欧拉（Euler）发现，有一个优美的规律：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

而它的渐近分数（convergents）是 $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$。我们的 $-a_n/b_n$ 恰好是每隔两个取一个的渐近分数。没有任何分母更小的分数能更接近 e。欧拉发现的这个规律本身就是 e 是无理数的第一个证明，因为只有有理数才有有限的连分数。

阿佩里的奇迹

1978 年，罗杰·阿佩里（Roger Apéry）宣布证明了 $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ 是无理数，这是自欧拉以来一直悬而未决的问题（见 Section 2.3）。他的证明实在太出人意表，以致在场听众起初并不相信。一年后，Frits Beukers 找到一个简短的版本，所用的积分形如

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

其中 P_n 由 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n(1-x)^n\right)$ 构造而成。这些积分很小，是正数，并且形如“整数 + 整数 $\times\, \zeta(3)$”再除以一个受控的分母：这正是本题的策略。至于 $\zeta(5)$ 或 $e + \pi$ 是否无理数，至今仍然未知。

思维技巧

很小但不是零

如果已知某个量是若干个数的整数组合，又已知它很小但不是零，它就带有信息：关于逼近的信息，有时还有关于无理性的信息。

这个模式就是“结构来自代数，大小来自分析”。它在数论中反复出现，也是分析与代数交汇得最有成果的地方之一。

延伸练习

1 **运行递推关系。**由递推关系计算 $n = 2, 3, 4$ 时的 a_n 和 b_n，并核对表中的分数。证明 b_n 的正负号交替出现。

2 **更精确的上界。**证明 $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$。这把 $-a_n/b_n$ 的误差估计改进了多少？

3 **无理性的证明。**把上面方框中的论证仔细写出来。你究竟在哪一处用到 $T_n > 0$？

4 **换一个权函数。**较难把 e^t 换成 e^{2t}，重做这道题（即 $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\,\mathrm{d}t$）。求 U_n 的递推关系，证明 U_n 是 1 和 e^2 的有理系数组合，并探究这个论证是否仍能证明 e^2 是无理数。（与 Section 1.4 比较。）

延伸阅读

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。关于无理性证明的经典小书，当中包括埃尔米特的方法。
- **Alfred van der Poorten, “A proof that Euler missed”**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979)。生动地记述阿佩里的证明及其所得到的回响。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。一部无理数的历史，为一般数学读者而写。

我们学到了甚么

我们由芝诺（Zeno）说起，并提出了关于无穷过程的三个问题：说无穷过程有答案，究竟是甚么意思？怎样证明它们确实有答案？它们又以多快的速度到达答案？做过九道 STEP 题目之后，让我们看看自己走了多远。

1. 说无穷过程有答案，是甚么意思？

在 Section 2.1 中，我们学会了这套语言。凡是描述数列（sequence）长远表现的命题，都具有这样的形式：“存在某一点 m，使得对所有 $n \geq m$...”。要证明它，就要把 m 找出来；要否定它，就要证明任何人提出的 m 都不管用。极限（limit）的定义只是在最前面多加一个量词（quantifier）：“对任意容许误差 $\varepsilon > 0$”。有了这个定义，芝诺悖论便迎刃而解：无论你要求的容许误差多小，$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ 由某一点起，与 1 的距离都在这个误差之内，而“和等于 1”的全部意思，不过如此。

这套语言也能防止我们说出毫无意义的话。在 Section 2.2 中，“设 x 等于那个无穷表达式”这种取巧的论证，为黄金比（golden ratio）给出了正确答案，但那只是因为我们能够另行证明极限存在。把同一个论证用在 $1 - 1 + 1 - \cdots$ 上，得出的答案却毫无意义。

2. 不知道极限是甚么，怎样证明收敛？

本章大部分小节所用的，都不外乎以下几种工具。

- **单调有界。**递增而有上界的数列必定收敛（converge）（Section 2.2、Section 2.6）。各项皆为正数的部分和（partial sum）亦然（Section 2.3）。到了大学，你会发现这其实是关于实数本身的一个命题：它就是实数的*完备性*（completeness）。
- **比较。**一个正项级数（series）如果比某个收敛的级数小，它就收敛；如果比某个发散（diverge）的级数大，它就发散。把各项分组成段之后，比较起来便很容易，由此可见调和级数（harmonic series）发散，而 Kempner 那个删减了部分项的版本却收敛（Section 2.3）。
- **夹逼。**把要研究的量夹在两个较简单而极限相同的量之间。我们就是这样证明 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$（Section 2.4），并严格地计算出算术几何平均（AGM）积分的值（Section 2.6）。

- **有限阶段的精确公式。**在 Section 2.5 和 Section 2.8 中，我们利用裂项相消（telescoping）求出 n 步之后的精确表达式，到了最后一刻才让 $n \to \infty$。

一旦知道极限存在，往往只需在递推关系（recurrence）中“让 $n \to \infty$”便可求出极限，例如黄金比的 $L = (2L+1)/(L+1)$。但次序十分重要：先证存在，后求数值。

3. 有多快？

在这方面，本章有些出人意表的发现。韦达（Viète）乘积（Section 2.5）每多乘一个因子，大约多得 0.6 个小数位。Section 2.7 中计算 $\sqrt{2}$ 的简单方法，每一步大约多得 0.8 个数位。牛顿法（Newton's method）和 AGM（Section 2.6）则每一步都令正确数位的数目*倍增*：牛顿法只需十步，便可得出 $\sqrt{2}$ 的 700 多个数位。差别在于误差递推关系的形式：一种是“新误差 $\approx$ 常数 $\times$ 旧误差”（线性），另一种是“新误差 $\approx$ 常数 $\times$（旧误差）^{2}”（二次）。而在 Section 2.8 中，我们见到了另一个极端：由仅仅大于 2 的数出发，映射（map）$x \mapsto x^2 - 2$ 会以比指数增长还要快的速度把数推开；而在 $[-2, 2]$ 之内，它会把微小的误差不断放大，直至完全无法预测。

速度对理论同样重要。Section 2.9 中的积分所产生的分数，趋近 e 的速度极快，足以证明 e 是无理数（irrational）：任何分数 p/q 都不可能被其他分数以这样快的速度逼近。

4. 分析学的工具箱

方法	你在哪里用过
找出量词所要求的对象与否定量词	“最终”（2.1）
单调有界数列	黄金比（2.2）；AGM（2.6）
比较与凝聚（condensation）	调和级数与 Kempner 级数（2.3）
夹逼	$\pi^2/6$（2.4）；AGM 积分（2.6）
根的对称函数（symmetric function）	$\cot^2$ 值之和（2.4）
裂项相消的和与积	韦达（2.5）；$x^2 - 2$（2.8）
不变量（invariant）	AGM 积分（2.6）
误差递推关系	线性收敛与二次收敛（2.7）
以变量代换简化映射	$a = t + 1/t$、$a = 2\cos\theta$（2.8）
细小但非零的整数组合	逼近 e（2.9）

留意这些工具当中，有多少附带着一条“你可以直接使用的定理”。STEP 经常直接把单调收敛定理（monotone convergence theorem）交给你，或者叫你假设极限存在。到了大学，你要由实数的公理（axiom）出发证明这些定理，而且当一个论证不动声色地假设了极限存在，你也要自己察觉得到。阅读解答的时候，不妨养成一个很好的习惯，问问自己：*究竟在哪一步取了极限？这一步有没有根据？*

下一步

本章的想法贯穿全书其余部分。

- 不动点（fixed point）和蛛网图（cobweb diagram）会在 Section 8.7 再次出现，在那里，一个混沌（chaotic）映射原来有精确解。
- 调和数（harmonic number）$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 会在 Section 9.11 的概率和 Section 11.12 的力学中出现。
- π 另一次在极限中现身，是在 Section 12.23，这次来自概率。
- 对极限的审慎态度是第 3 章的主题，该章以 Section 3.1 开始：一些看似正确、其实不然的论证。

如果你想在上大学之前再进一步

- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis***：大学一年级的分析学是怎样的，又该如何应付。
- **David Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis***：循历史脉络讲授分析学，由那些迫使数学家不得不严谨起来的难题说起。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）：由一位剑桥的分析学家执笔，正是为本书这样的读者而写。
- **Julian Havil, *Gamma*** 和 **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***：本章许多级数背后的故事。

芝诺认为无穷令运动变得不可能。数学家花了两千年才回应他，而答案原来是人类发现过最强而有力的想法之一：一种能够精确地描述永无止境的过程的方法。这套语言最初的几个词语，你现在已经认识了。到了分析学，你便会学懂怎样流利地说这套语言。

延伸练习答案

以下只是简短的答案和提示，并非完整解答：这里只给出结果和关键步骤，方便你核对自己的做法。请先认真做过每一道练习，然后才翻看。

2.1 “最终”是甚么意思

1. $(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots$ 的各项均为非负，所以 $(1+x)^n \geq 1 + nx > nx$。设 $y = 1 + x$，则只要 $n > K/(y-1)$，便有 $y^n > n(y-1) > K$。利用下一项，$y^n > \binom{n}{2}(y-1)^2$，所以只要 $n > 1 + 2K/(y-1)^2$，便有 $y^n/n > \frac{1}{2}(n-1)(y-1)^2 > K$。

2. 若当 $n \geq m_1$ 时 $s_n \leq t_n$，而当 $n \geq m_2$ 时 $t_n \leq s_n$，则当 $n \geq \max(m_1, m_2)$ 时 $s_n = t_n$。

3. 例如：当 n 为偶数时 $s_n = n + 0.6$，当 n 为奇数时 $s_n = n$；而当 n 为奇数时 $t_n = n + 0.6$，当 n 为偶数时 $t_n = n$。两个数列（sequence）都是递增的，而且各自都有无限多次大于对方。

4. 当 $n \geq 4$ 时 $2^n \leq n!$（用归纳法（induction）：$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq (n+1)\,n!$）。至于 $n^{10} \leq 2^n$，这个不等式对由 2 至 58 的每一个 n 都不成立，而对所有 $n \geq 59$ 都成立，所以最小的 m 是 59。

2.2 作为极限的黄金比例

1. 用归纳法：$u_1 = 1 = F_2/F_1$，而若 $u_n = F_{n+1}/F_n$，则 $u_{n+1} = 1 + F_n/F_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1}$。

2. 由于 $\varphi - 1 = 1/\varphi$，$u_{n+1} - \varphi = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\varphi} = -\frac{u_n - \varphi}{\varphi u_n}$。因为 $u_n \geq 1$，所以 $|u_{n+1} - \varphi| \leq |u_n - \varphi|/\varphi$，又 $|u_1 - \varphi| < 1$，故 $|u_n - \varphi| \leq \varphi^{-(n-1)}$。

3. $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 满足 $\psi^2 = \psi + 1$，所以 $1 + 1/\psi = \psi$。倒推回去，$u_{n-1} = \frac{1}{u_n - 1}$：由 0 出发，得到 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, \ldots$，即对某个 $k \geq 1$ 有 $u_1 = -F_{k-1}/F_k$。这些数值趋近 ψ。

4. 不动点（fixed point）满足 $v = 1 + \frac{1}{1+v}$，即 $v^2 = 2$。误差每次乘以 $-\frac{1}{(1+v_n)(1+\sqrt{2})}$，其大小不超过 $\frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$，所以 $v_n \to \sqrt{2}$。并且 $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$。

2.3 一个发散级数与它的收敛近亲

1. 由 $\ln N + 0.5772 = 10$ 得 $N \approx 12\,400$；要超过 100，大约需要 $e^{99.4} \approx 1.5 \times 10^{43}$ 项。

2. 取 $k = 2$，第 n 组之和不超过 $2^n \cdot 4^{-n} = 2^{-n}$，所以总和不超过 $\sum_{n\ge 0} 2^{-n} = 2$。把 $1 + \frac14 + \frac19$ 准确加起来，再以 $\frac14 + \frac18 + \cdots = \frac12$ 作为由 $r = 4$ 起各组的上界，便得到约 1.86。（真确值是 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$。）

3. 对于 $1/(r \ln r)$，由 2^n 至 $2^{n+1} - 1$ 的一组之和至少是 $\frac{2^n}{2^{n+1}(n+1)\ln 2} = \frac{1}{2(n+1)\ln 2}$，而这些数之和的表现与调和级数（harmonic series）相同：级数发散（divergence）。对于 $1/(r(\ln r)^2)$，该组之和不超过 $\frac{1}{n^2(\ln 2)^2}$，而 $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛（converges）。

4. 可用的数字：首位数字有 7 个选择，其余每一位各有 8 个选择，所以符合条件的 d 位数最多有 $7 \cdot 8^{d-1}$ 个，而每个都至少是 10^{d-1}。总和不超过 $\sum_{d\ge 1} 7(0.8)^{d-1} = \frac{7}{1-0.8} = 35$。

2.4 $\pi^2/6$

1. 各个 $\tan^2 = 1/\cot^2$ 的值是倒序多项式 $\sum_j (-1)^j \binom{2n+1}{2j+1} y^j$ 的根（roots），其根之和为 $\binom{2n+1}{2n-1} = n(2n+1)$。然后由 $\operatorname{cosec}^2 = 1 + \cot^2$ 得 $n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$。

2. 偶数项之和为 $\frac14 \sum \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{24}$，所以奇数项之和为 $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$。

3. 这些根满足 $e_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$ 和 $e_2 = \binom{2n+1}{5} \big/ \binom{2n+1}{1}$，由此得 $\sum \cot^4 = e_1^2 - 2e_2 = \frac{n(2n-1)(4n^2+10n-9)}{45}$。利用 $\cot^4\theta < \theta^{-4} < (1+\cot^2\theta)^2$ 作夹逼（squeezing），再令 $n \to \infty$，便得到 $\frac{\pi^4}{90}$。

4. 由下界得 $\sum_{m\le n} \frac{1}{m^2} > \frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2}$，所以误差小于 $\frac{\pi^2(6n+1)}{6(2n+1)^2} < \frac{\pi^2}{4n}$。这保证了当 $n \ge 2468$ 时准确度达到 0.001；事实上 $n \approx 1000$ 已经足够。

2.5 韦达乘积

1. 反复使用 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$：乘积会逐项相消（telescopes）。令 $n \to \infty$（于是 $2^n \sin(\alpha/2^n) \to \alpha$），并取 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，再利用 $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac12}$ 和 $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac12 + \frac12\cos\theta}$。

2. $\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt3}{2\pi} = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\cdots$，其中 $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt3}{2}$，而 $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2} = \frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$。

3. 取 8 个因子得 3.14157，四舍五入后是 3.1416。取 n 个因子后，误差约为 $\frac{\pi^3}{6\cdot 4^{n+1}}$，因为被略去的因子是 $\cos\frac{\pi}{2^{j+1}} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$：每多一个因子，误差约缩小至原来的 4 分之一，而 $\log_{10} 4 \approx 0.6$。

4. 设 $x = \ln a$，同样的论证给出

$$\frac{a-1}{\ln a} = \prod_{j\ge 1} \frac{1 + a^{1/2^j}}{2},$$

所以 $\frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{2}\prod_{j\geq 1}\frac{1+3^{1/2^j}}{2}$。取七个因子得 0.906，四舍五入后是 0.91（真确值是 0.9102）。这里的因子趋近 1 的方式如同 $1+\frac{\ln 3}{2^{j+1}}$，所以每多一个因子只能把误差减半（约 0.3 位数字）；而韦达（Viète）的因子趋近 1 的方式如同 $1-\frac{\pi^2}{2\cdot 4^{j+1}}$，每次把误差缩小至四分之一。

2.6 算术几何平均

1. $x_{n+1}-y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2 = \frac{(x_n-y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$，而 $(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2 \geq 4y_n \geq 4y_0$。
2. $M(2,1) = 1.456791$；三步之后，x_3 与 y_3 已经有七位小数相同。
3. 迭代（iteration）的每一步都按 λ 的比例缩放，所以 $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda M(x,y)$。在积分中代入 $x = \lambda u$，得 $\mathrm{I}(\lambda p, \lambda q) = \lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$。$\mathrm{I} = \frac{\pi}{2M}$ 的两边都按 λ^{-1} 的比例缩放。
4. $M(1, \cos 30^\circ) \approx 0.9318$，所以周期变长至原来的 1.073 倍：即长了约 7.32%。

2.7 六位还是六百位

1. $(p^2+2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = (p^2-2q^2)^2 = 1$；并且 $577^2 - 2\times 408^2 = 332\,929 - 332\,928 = 1$。
2. $y_{n+1} = \frac{2y_n^3+2}{3y_n^2}$，而 $y_{n+1}-\alpha = \frac{2y^3-3\alpha y^2+\alpha^3}{3y^2} = \frac{(y-\alpha)^2(2y+\alpha)}{3y^2}$。若 $y > \alpha$，则 $\frac{2y+\alpha}{3y^2} < \frac{3y}{3y^2} = \frac{1}{y} < \frac{1}{\alpha}$。
3. $y - \frac{1/y-a}{-1/y^2} = y + y - ay^2 = y(2-ay)$，而 $1-ay(2-ay) = (1-ay)^2$。
4. $y - \frac{y^{1/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3}} = y - 3y = -2y$。误差公式要求在根的附近 f′ 不等于零，而且 f″ 有界（bounded）；但这里 f′ 在 0 处是无限大。

2.8 平方再减二

1. $(2\cos u)^2 - 2 = 2\cos 2u$，所以由归纳法得 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$。$x_3 = a$ 需要 $4\theta \equiv \pm\theta$：即 3θ 或 $5\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$。排除 $x_2 = a$ 的情况（不动点 $a = 2$ 和 $a = -1$）后，剩下 $\theta = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$：即 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $a = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，也就是一个 2-循环（cycle）的两个点。
2. 对于 M_5，数列是 4，14，$194 \equiv 8$，$62 \equiv 0$：是质数（prime）。对于 M_{11}，数列是 4，14，194，788，701，119，1877，240，282，$1736 \neq 0$：是合成数（composite），而事实上 $2047 = 23\times 89$。
3. 由 $A = t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$ 得 $t = 2$ 和 $a = \frac{5}{2}$。于是 $x_2 = \frac{17}{4}$，$y_1 = \frac{Ax_1}{x_2} = \frac{15}{17}$，而 $\frac{\sqrt{x_2^2-4}}{x_2} = \frac{15/4}{17/4} = \frac{15}{17}$。
4. $x_k = t^{2^{k-1}} + t^{-2^{k-1}}$，而把 $x_1\cdots x_n$ 乘以 $t-t^{-1}$ 后，逐项相消得 $t^{2^n} - t^{-2^n}$。所求之

和变成 $(t-t^{-1})\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{t^{2^n}-1}-\frac{1}{t^{2^{n+1}}-1}\right)=\frac{t-t^{-1}}{t^2-1}=\frac{1}{t}$。当 $a=3$ 时，$t=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 而 $\frac{1}{t}\approx0.3820$；级数 $\frac{1}{3}+\frac{1}{21}+\frac{1}{987}+\cdots$ 与此吻合。

2.9 逐步逼近 e 的分数

1. $T_0=e-1$，$T_1=3-e$，$T_2=7e-19$，$T_3=193-71e$，$T_4=1001e-2721$，由此得到 $\frac{19}{7}$，$\frac{193}{71}$，$\frac{2721}{1001}$。由于 $b_n=b_{n-2}-2(2n-1)b_{n-1}$，而（按归纳法）$b_{n-1}$ 与 b_{n-2} 异号，所以 b_n 与 b_{n-2} 同号。

2. $t(1-t)\le\frac{1}{4}$，所以 $T_n<\frac{e}{4^n n!}$；$-a_n/b_n$ 的误差是 $T_n/|b_n|$，现在改进了 4^n 倍。

3. 若 $e=\frac{p}{q}$，则 $qT_n=qa_n+pb_n$ 是整数。由 $T_n>0$ 可知它是正整数，所以至少是 1；但当 n 足够大时，$qT_n<\frac{qe}{n!}<1$。

4. 分部积分（integration by parts）两次（边界项为零），得 $U_n=\frac{1}{4}\bigl(U_{n-2}-2(2n-1)U_{n-1}\bigr)$，其中 $U_0=\frac{e^2-1}{2}$ 和 $U_1=\frac{1}{2}$。所以 $2^{2n+1}U_n=A_n+B_ne^2$，其中 A_n，B_n 为整数，而 $0<U_n<\frac{e^2}{4^n n!}$。若 $e^2=\frac{p}{q}$，则 $q2^{2n+1}U_n$ 是一个小于 $\frac{2qe^2}{n!}$ 的正整数，当 n 足够大时这是不可能的。所以这个论证确实证明了 e^2 是无理数（irrational）。

Beyond STEP

STEP 是大多数中学生一生中应考过最艰深的数学考试，也是最出色的考试之一：题目简短、陌生而深刻，当中最精彩的，其实是乔装了的大学数学小品。

本书精选最有趣的 STEP 试题，由 1987 年首次开考之前的样本试卷（specimen papers），到 2025 年的试卷，并以每一道题目作为一扇门。每道题目都会仔细解答，沿途提出优秀学生会问的问题，然后带你穿过这扇门：这个想法从何而来，到了大学会演变成甚么，以及接下来该读些甚么。

本书为正在准备 STEP、有天分又有志投身数学的学生而写。他们想要的不止是模拟试卷：他们想开始像数学系本科生那样思考，并一探前方有甚么正等着自己。

- 共 13 章，涵盖纯数学（pure mathematics）、力学（mechanics）、概率（probability）与统计（statistics）
- 136 道 STEP 历届试题，每题均附引导式解答
- 每道题目背后的大学数学
- 附答案的延伸练习，以及延伸阅读

全书共 13 章，本册为第 2 章。 全书各章及所有详细解答均可免费阅读、下载及分享，网址为

beyondstep.keithmcnulty.org

文字内容已贡献予公有领域（CC0 1.0）。STEP 试题 © Cambridge University Press & Assessment。

