Beyond STEP

数学符号

数学写作往往以寥寥几个记号承载丰富的意思，而大学讲师所用的许多符号，在中学课本里甚少出现。下面各表按主题列出本书用到的符号，并说明每个符号的含义和读法。入读大学后不出几个星期，其中大部分都会变得习以为常；在此之前，这里可供你随时查阅。

有两项惯例值得一开始就知道。第一，本书依照 STEP 的做法，把某些具有固定含义的字母印成正体而非斜体：e 表示自然对数的底，i 表示 $\sqrt{-1}$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 中的 d，以及函数的名称，例如 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{P}(A)$。斜体字母则表示变量。第二，同一个符号在不同场合有时会有不同的意思；$\equiv$ 和 $\sim$ 是最常见的例子，表中会在相应位置指出。

逻辑与证明

符号	含义	例子或读法
$P \Rightarrow Q$	P 蕴含（implies）Q：若 P 成立，则 Q 亦成立	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$；“$P$ 蕴含 Q”
$P \Leftarrow Q$	P 由 Q 所蕴含	“只要 Q 成立，P 就成立”
$P \iff Q$	P 当且仅当（if and only if）Q：两者互相蕴含	$x^2 = 4 \iff x = \pm 2$；亦写作“iff”
$\forall$	对所有、对每一个	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$
$\exists$	存在	$\exists n \in \mathbb{Z}$ 使得 $n^2 = 9$
$\neg P$	非 P，即 P 的否定（negation）	“$\forall x,\ P(x)$”的否定是“$\exists x$ 使得 $\neg P(x)$”
$:=$	定义为	$\mathrm{f}(x) := x^2 + 1$
■	证明完毕；亦写作 QED	源自拉丁文 *quod erat demonstrandum*，意即“这就是所要证明的”

集合与数系

符号	含义	例子或读法
$\{\dots\}$	由所列元素组成的集合（set）	$\{1,2,3\}$
$\{x:\dots\}$	所有满足 ... 的 x 所组成的集合；亦写作 $\{x \mid \dots\}$	$\{x:x^2<2\}$；“满足 $x^2<2$ 的 x 所组成的集合”
$x \in A$	x 是 A 的元素（element）	$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$；“$\sqrt{2}$ 属于 $\mathbb{R}$”
$x \notin A$	x 不是 A 的元素	$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$
$A \subseteq B$	A 是 B 的子集（subset）：A 的每个元素都在 B 之内	$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$
$A \cup B$	并集（union）：属于 A 或 B（或同时属于两者）的元素	$\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$
$A \cap B$	交集（intersection）：同时属于 A 和 B 的元素	$\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$
$A \setminus B$	属于 A 但不属于 B 的元素	$\{1,2,3\}\setminus\{2\}=\{1,3\}$
A'	补集（complement）：所有不属于 A 的元素	亦写作 A^{c} 或 $\bar{A}$
$\varnothing$	空集（empty set），不含任何元素	$\{x\in\mathbb{R}:x^2<0\}=\varnothing$
$\lvert A\rvert$	有限集 A 的元素个数	$\lvert\{a,b,c\}\rvert=3$
$A \times B$	所有数对 (a,b) 所组成的集合，其中 $a\in A$，$b\in B$	$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 就是平面，亦写作 $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{N}$	自然数（natural numbers）$1,2,3,\dots$	有些作者把 0 也算在内
$\mathbb{Z}$	整数（integers）$\dots,-2,-1,0,1,2,\dots$	源自德文 *Zahlen*，意即“数”
$\mathbb{Q}$	有理数（rational numbers），即分数	源自 *quotient* 一字
$\mathbb{R}$	实数（real numbers）	
$\mathbb{C}$	复数（complex numbers）	
$\mathbb{H}$	四元数（quaternions）	以哈密顿（Hamilton）命名（Section 6.7）
$\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$	形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数，其中 $a,b\in\mathbb{Z}$	高斯整数（Gaussian integers）（Section 1.6）
$[a,b]$	闭区间（closed interval）：$a\le x\le b$	包含端点
(a,b)	开区间（open interval）：$a<x<b$	不包含端点；亦可表示数对或点

数、整除性与近似

符号	含义	例子或读法
$a \mid b$	a 整除（divides）b：b 是 a 的整数倍	$3 \mid 12$；“3 整除 12”
$a \nmid b$	a 不整除 b	$5 \nmid 12$
$a \equiv b \pmod{n}$	a 与 b 除以 n 所得的余数相同	$17 \equiv 2 \pmod{5}$；“17 与 2 模 5 同余（congruent）”
$\equiv$	（不带模时）恒等于：对所有值都成立	$(x+1)^2 \equiv x^2 + 2x + 1$
$\lfloor x \rfloor$	下取整（floor）：$\le x$ 的最大整数	$\lfloor 3.7 \rfloor = 3$，$\lfloor -3.7 \rfloor = -4$
$\lceil x \rceil$	上取整（ceiling）：$\ge x$ 的最小整数	$\lceil 3.2 \rceil = 4$
$n!$	n 的阶乘（factorial），即 $1 \times 2 \times \cdots \times n$	按惯例 $0! = 1$
$\binom{n}{r}$	二项式系数（binomial coefficient）$\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$	读作“n choose r”；亦写作 ${}^{n}\mathrm{C}_{r}$
$\approx$	约等于	$\pi \approx 3.1416$
$\sim$	渐近于（asymptotic to）：两者之比趋向 1	$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$（但另见概率部分）
$\propto$	与……成正比	$v \propto 1/d$
$\pm, \mp$	正负；负正	$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
$0.\overline{01}$	循环数字	$0.\overline{01} = 0.010101\ldots$

函数

符号	含义	例子或读法
$\mathrm{f} : A \to B$	f 是由集合 A 到集合 B 的函数（function）	$\mathrm{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \ldots$	x 被送到 ...	$x \mapsto x^2 - 2$；“x 映射到 $x^2 - 2$”
$\mathrm{f} \circ \mathrm{g}$	复合（composition）：先作 g，再作 f	$(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})(x) = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$
f^{-1}	f 的反函数（inverse function）	并非 $1/\mathrm{f}$
f^n	在本书中，通常指把 f 施行 n 次	$\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$；但 $\sin^2 x$ 表示 $(\sin x)^2$
$\lvert x \rvert$	模（modulus），或绝对值	$\lvert -3 \rvert = 3$
$\exp x$	指数函数（exponential function）e^x	
$\ln x$	自然对数（natural logarithm），以 e 为底	在大学里常写作 $\log x$
sec, cosec, cot	$1/\cos$, $1/\sin$, $1/\tan$	
arcsin, arccos, arctan	反三角函数	亦写作 $\sin^{-1}$ 等
sinh, cosh, tanh	双曲函数（hyperbolic functions）：$\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$，$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$，$\tanh = \sinh / \cosh$	读作“shine”（或“sinch”）、“cosh”和“than”（或“tanch”）
artanh	tanh 的反函数	$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$
max, min	当中最大者、最小者	$\max(3, 7) = 7$
$\Gamma(x)$	伽玛函数（gamma function）	$\Gamma(n+1) = n!$（Section 4.4）

求和、极限与微积分

符号	含义	例子或读法
$\sum$	求和	$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$
$\prod$	求积	$\prod_{k=1}^{n} k = n!$
∞	无穷大：并不是一个数，而是“没有界限”的简写	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$x \to a$	x 趋向 a	当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n} \to 0$
$\lim$	极限（limit）	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\mathrm{f}'(x)$, $\mathrm{f}''(x)$	一阶及二阶导数（derivative）	读作“f dash”或“f prime”
$\dot{x}$, $\ddot{x}$	对时间的导数	$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$；读作“$x$ dot”、“x double dot”
$\frac{\partial f}{\partial x}$	偏导数（partial derivative）：对 x 求导，其他变量保持不变	读作“partial f by partial x”
$\int_a^b$	由 a 到 b 的定积分（definite integral）	
$\oint$	沿闭合回路的积分	$\oint p\,\mathrm{d}q$（Section 10.4）
δx, Δx	x 的微小变化；x 的变化	
ε, δ	分析学中惯常用来表示细小正数的记号	“对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得 ...”

复数

符号	含义	例子或读法
i	-1 的一个平方根	工程师写作 j
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	实部与虚部	若 $z = 3 + 4\mathrm{i}$，则 $\operatorname{Re} z = 3$，$\operatorname{Im} z = 4$
z^*, $\bar{z}$	共轭复数（complex conjugate）	$(3+4\mathrm{i})^* = 3 - 4\mathrm{i}$；两种记法都有人使用
$\lvert z \rvert$	模：与 0 的距离	$\lvert 3 + 4\mathrm{i} \rvert = 5$
$\arg z$	辐角（argument）：由正实轴量起的角	$\arg \mathrm{i} = \frac{\pi}{2}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$	$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$
ω	惯常表示 1 的一个复立方根（cube root of unity）	$\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$，$1 + \omega + \omega^2 = 0$

向量与矩阵

符号	含义	例子或读法
$\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}$	向量（vector）；由 A 到 B 的向量	手写时作 $\underline{a}$
$\hat{\mathbf{n}}$	单位向量（unit vector），长度为 1	读作“n hat”
$\lvert\mathbf{a}\rvert$	$\mathbf{a}$ 的长度（大小）	
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	纯量积（scalar product），又称点积（dot product）	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\theta$
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	向量积（vector product），又称叉积（cross product）	同时垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$
$\mathbf{M}$	矩阵（matrix）	
$\mathbf{I}$	单位矩阵（identity matrix）	对每个 $\mathbf{v}$ 都有 $\mathbf{Iv}=\mathbf{v}$
$\mathbf{M}^{-1}$	逆矩阵（inverse matrix）	$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{I}$
$\det\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$ 的行列式（determinant）	$\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=ad-bc$
$\operatorname{tr}\mathbf{M}$	迹（trace）：对角线上各元素之和	$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a+d$
λ	惯常表示特征值（eigenvalue）	$\mathbf{Mv}=\lambda\mathbf{v}$

概率与统计

符号	含义	例子或读法
$\mathrm{P}(A)$	事件 A 的概率（probability）	
$\mathrm{P}(A \mid B)$	已知 B 发生时 A 的概率	$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A \cap B)/\mathrm{P}(B)$；读作“$A$ given B”
$\mathrm{E}(X)$	X 的期望值（expectation），即平均值	亦写作 μ
$\mathrm{Var}(X)$	X 的方差（variance）	$\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$；亦写作 σ^2
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	协方差（covariance）	$\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$
$\mathrm{Corr}(X, Y)$	相关系数（correlation）	$\mathrm{Cov}(X, Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$；亦写作 ρ
$X \sim \ldots$	X 的分布为 ...	$X \sim \mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$；“$X$ 的分布为 ...”
$\mathrm{B}(n, p)$	二项分布（binomial distribution）	n 次试验中成功的次数
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	正态分布（normal distribution），平均值为 μ，方差为 σ^2	
$\mathrm{f}(x), \mathrm{F}(x)$	概率密度函数（probability density function）；累积分布函数（cumulative distribution function）	$\mathrm{F}(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$
$\mathrm{G}(t)$	概率生成函数（probability generating function）	$\mathrm{G}(t) = \mathrm{E}(t^X)$
$\mathrm{M}_X(\theta)$	矩生成函数（moment generating function）	$\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$
$\bar{x}$	样本的平均值	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$
$\hat{\theta}$	未知量 θ 的估计值	读作“theta hat”

希腊字母

希腊字母在数学中随处可见，而且往往有约定俗成的含义。下表列出各字母的小写和大写形式（与罗马字母外形相同的大写字母，例如 alpha 的大写 A，不会用作独立的符号，故此从略）、名称，以及一些常见用途。

字母	名称	常见用途
α	alpha	角；方程的根
β	beta	角；方程的根；贝塔函数（beta function）
γ, Γ	gamma	欧拉（Euler）常数 $\gamma \approx 0.5772$；伽玛函数 Γ；在相对论中，$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$
δ, Δ	delta	微小的量；Δ 表示变化，或表示三角形、判别式（discriminant）
ε, ϵ	epsilon	微小的正数量；在力学中表示相位角
ζ	zeta	黎曼（Riemann）zeta 函数，当 $s > 1$ 时 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$（以更高深的方法可推广至 $s = 1$ 以外的其他值）
η	eta	效率；微小的量
θ, Θ	theta	角；统计学中的未知参数
ι	iota	甚少使用
κ	kappa	曲率；常数
λ, Λ	lambda	特征值；参数，例如泊松（Poisson）分布的率；波长
μ	mu	平均值；摩擦系数
ν	nu	频率
ξ, Ξ	xi	变量或随机量
π, Π	pi	$\pi \approx 3.14159$；Π 表示求积
ρ	rho	密度；相关系数；与原点的距离
σ, Σ	sigma	标准差；Σ 表示求和
τ	tau	时间；力矩
υ, Υ	upsilon	甚少使用
ϕ, φ, Φ	phi	角；黄金比 $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$；快度（rapidity）；$\Phi$ 表示标准正态分布函数
χ	chi	χ^2（卡方，chi-squared）分布
ψ, Ψ	psi	量子力学中的波函数
ω, Ω	omega	角速度或角频率；1 的立方根；Ω 表示样本空间

力学

符号	含义	例子或读法
g	重力加速度	在地球表面约为 $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
G	万有引力常数	两个质量之间的力为 Gm_1m_2/r^2
e	恢复系数（coefficient of restitution）（以斜体印刷，切勿与 e 混淆）	沿碰撞线方向，分离速率 $= e\times$ 接近速率
ω	角速度；角频率	简谐运动（simple harmonic motion）中 $\ddot{x} = -\omega^2 x$
I	转动惯量（moment of inertia）	转动动能 $\frac{1}{2}I\omega^2$（Section 11.7）
c	光速	约为 $3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$\hbar$	普朗克（Planck）常数除以 2π	读作“h bar”（Section 8.6）