引言

> 我无法靠这本书教会你数学，但我相信，只要你肯下苦功，一点一点地凿开这些题目，终会让你内在的那位数学家显露出来。
>
> — Stephen Siklos，*Advanced Problems in Mathematics*

这是一本关于难题的书，也是一本关于难题背后有甚么的书。全书 136 节，每一节都由一道 STEP 历届试题开始。但题目只是入口。几乎每一道好的 STEP 题目背后，都有一片你将会在大学里正式学到的数学，而本书的目的，就是带你穿过这道门，让你看看门后的风景。

STEP 是甚么，为何存在

STEP，即 Sixth Term Examination Paper，是一组在中学最后一年夏天应考的数学考试。它由剑桥大学（University of Cambridge）于 1987 年设立，作用是协助决定谁适合到那里修读数学：剑桥数学系发出的取录通知，几乎全部以 STEP 成绩为条件，多年来其他大学亦有采用，当中以华威大学（Warwick）最为人熟知。起初 STEP 设有多个科目的试卷，但到了 2001 年，就只剩下数学一科。在它大部分的历史里，考试共有三份试卷，即 I、II 和 III；Paper I 最后一次开考是在 2019 年，现时考生应考 Paper II 和 Paper III。这项考试多年来由剑桥大学考评部（Cambridge Assessment）主办，自 2024 年起改由 OCR 负责。

STEP 试卷与学校的考试截然不同。卷上不是十道必答的短题，而是十多道长题，考生从中选答六题，而一位实力强的考生只要在四题上取得实质进展，成绩已经非常好。题目不会告诉你每一部分占多少分，也很少要你做一些你练习过的东西。它们要你把已经懂得的数学，用在全新的地方。

对 STEP 的认识无人能及的 Stephen Siklos，曾这样形容它的用途。它是一道门槛：事实证明，STEP 的成绩能相当准确地预示学生在大学数学学位课程中的表现（据他所述，STEP 名次与剑桥一年级考试名次的相关系数达 0.63，以这类数据的标准而言非常高）。它是一种准备：STEP 所奖励的思考方式，正是大学本科数学的思考方式。它也是对动力的考验：准备 STEP 要下真功夫，一个不愿付出这份努力的学生，大概也不会享受要求严格的数学学位课程。

Stephen Siklos

谈 STEP 而不谈 Stephen Siklos，是不可能的。他是剑桥的数学家，曾是霍金（Stephen Hawking）的研究生，研究早期宇宙和引力波的数学，在应用数学及理论物理系任讲师，其后出任耶稣学院（Jesus College）的高级导师（Senior Tutor），再担任该学院的 President。1987 年 STEP 数学科创办时，他出任首席考官（Senior Examiner），并担任此职三十二年，直至 2019 年 8 月离世为止。这些年间，他草拟题目，“把别人的题目修整成形”（这是他自己的说法，他说这件事长久以来都是他兴趣和乐趣的来源），逐一审阅每份试卷，并督导评卷工作。他也是 STEP 复活节学校（STEP Easter School）和 STEP 支援计划（STEP Support Programme）背后的推手，这两个项目为学校无法提供协助的学生免费提供帮助。有一篇讣闻说，在令剑桥数学入学试向不同学校背景的学生开放这件事上，没有人比他做得更多。

他的著作 *Advanced Problems in Mathematics: Preparing for University*（《高等数学难题：为大学作准备》）由 Open Book Publishers 在网上免费出版，至今仍是认识 STEP 的最佳入门书，我极力推荐。他在书中写下的两点，塑造了本书的面貌。第一点是他对甚么才算一道好的 STEP 题目的看法：题目的第一部分向你展示一个陌生的想法，其后的部分则要你在更难的情境中再次运用它，以证明你确实明白；又或者题目的答案取决于一个要你自己去发现的参数；又或者题目由特殊情况开始，以一般结果作结。正是这类题目才会引领你到达某处，而本书的题目大多属于这几类。第二点是他坚持解答应该是“跳板，而不是羽毛床”。一份解答，如果你未曾先自己与题目搏斗过就去读，是学不到任何东西的。

我与 STEP 的相遇

我第一次接触 STEP 是在 1990 年代初，当时我的数学老师给了我几份试卷，作为额外的挑战。我做这些试卷是为了乐趣，而不是为了取录资格，也从未真正应考，但我记得那些试卷难得出奇：题目看似与我学过的任何东西都毫无关系，一道题就写满一页，我能够起步，却很少能做完。我也记得，在终于做通了的那些时刻，我感到自己看见了一些学校数学从未让我看见的东西。

许多年后，我从另一边回到 STEP：协助学生准备应考。与他们一起做过数百道题目之后，我对这些试卷有了不同的看法。并非每一道题都是瑰宝。坦白说，有些题目只是漫长的耐力测试：一整页要小心处理的代数，一段要求很高却属例行公事的计算，到最后既没有多少洞见，也没有多少乐趣。耐力固然重要，大学数学也需要它，但令 STEP 与别不同的并不是这些题目。

令它与别不同的是，在 1987 年以来所出的 1,500 多道题目之中，散落着数百道真正优美的题目。要解释我的意思，最好的方法就是给你看几道。

几颗瑰宝

以下是你稍后会在书中遇到的七道题目，我特意选来展示本书涵盖的范围：两道来自组合数学（combinatorics），两道来自动力系统（dynamical systems），两道来自力学（mechanics），一道来自概率（probability）。每一道都由你能想像得到的东西开始，以你可能难以置信的结果作结，并通往一片在大学里会认真研究的数学。

藏在混乱中的秩序。在纸上画六个点，把每两点用一条线连起来，合共十五条线，每条线随你喜欢涂成金色或银色。现在试试避免出现三边同色的三角形。你每一次都会失败。五个点是做得到的（把五边形的边涂成金色，五条对角线涂成银色），但六个点就不可能，无论你的涂法多么巧妙。1989 年 STEP I 的一道题目要你证明这件事，而且只给一个提示：看看从其中一点出发的五条线。其中三条必定同色，由此出发，证明只需寥寥数行。线的涂色方法共有 $2^{15} = 32\,768$ 种，而这个论证一次过处理了全部情况，连一个个案也不用检查。

这个结果是拉姆齐定理（Ramsey's theorem）最小的情况。这条定理由拉姆齐（Frank Ramsey）于 1928 年证明，它说的是：彻底的无序是不可能的；任何足够大的结构，无论拼凑得多么杂乱无章，都必定包含一小块完美的秩序。多大才算“足够大”？要保证有四个点彼此全以同一颜色相连，你需要 18 个点，这是 1955 年证明的事实。至于五个点，没有人知道：答案介乎 43 与 46 之间，而上界到 2024 年才获证明。艾狄胥（Paul Erdős）曾开玩笑说，如果外星人威胁要毁灭地球，除非我们说出这个数，我们就应该动员所有电脑和数学家去找；但如果他们问的是六个点的答案，我们就应该设法消灭外星人。你会在大学的组合数学或图论（graph theory）课程中遇到拉姆齐理论，而推动这个 STEP 证明的鸽巢原理（pigeonhole principle），则几乎在你修读的每一门课都会出现（Section 9.2）。

奇怪的骰子。掷两颗普通骰子，总和为 7 的机会最大，总和为 2 和 12 的机会最小，各总和的掷法数目依次为大家熟悉的 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$。用正整数为一对骰子编号，还有没有别的方法，使每个总和出现的机会完全相同？看来不大可能，但这样的方法恰好有一个：一颗骰子写上 $1, 2, 2, 3, 3, 4$，另一颗写上 $1, 3, 4, 5, 6, 8$。这就是 *Sicherman* 骰子，以发现它们的 George Sicherman 命名，并因马丁·加德纳（Martin Gardner）于 1978 年的介绍而广为人知。在任何只取决于所掷总和的游戏中，你大可用它们换掉普通骰子，而永远不会有人察觉。

1993 年的一道题目从另一端切入这个想法。它给你一个表，列出用两颗编号古怪的骰子掷出每个总和的方法数目，然后要你推算出骰子的编号，就像侦探根据遗下的痕迹重组案情一样。该节接着介绍令整个课题变得简单的想法：把每颗骰子变成一个多项式（polynomial），每一个点数为 k 的面对应一项 x^k。掷两颗骰子相当于把它们的多项式相乘，因为 $x^i \times x^j = x^{i+j}$ 正好把两面的数字相加。于是，寻找总和分布相同的新骰子，就变成用另一种方式把一个多项式因式分解，情况有点像 36 可以拆成 4×9 而不是 6×6。又因为多项式与整数一样，分解成不能再拆的因子时只有一种方式，这个因式分解同时证明

了 Sicherman 骰子是唯一的另类选择。把计数问题编码成多项式，即*生成函数*（generating function），这个技巧是组合数学中最强大的工具之一，而背后的唯一分解（unique factorisation），则是大学第一门代数课的中心主题（Section 9.6）。

有公式的混沌。取一个介乎 0 与 1 之间的数，把它乘以 4，再乘以一减去它本身，然后不断重复：$u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$。这就是*逻辑斯谛映射*（logistic map），一个粗略的模型，描述一个不断增长但受粮食供应限制的种群。这条规则简单得不能再简单，但它产生的数却跳来跳去，看不出任何规律，而两个小数点后十位都相同的初始值，通常在数十步之内就会给出完全不同的数列（sequence）。生物学家 Robert May 于 1976 年在一篇著名的论文中引起大家对它的注意，论文题为“Simple mathematical models with very complicated dynamics”（具有非常复杂动态的简单数学模型），它自此成为混沌（chaos）的标准例子，通常藉电脑来探索。

2014 年的一道题目揭示了一件出人意表的事：这个数列有一条精确的公式。如果初始值是 $\sin^2\theta$，那么 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，而你只需用倍角公式（double angle formulae）和归纳法（induction）就能证明。（乌拉姆（Stanisław Ulam）和冯·诺伊曼（John von Neumann）在 1940 年代已经知道这条公式。）你也许以为有了精确的公式，混沌就会被驯服。事实上，公式反而把混沌解释得一清二楚。每一步都把角加倍，所以角上任何微小的不确定性每一步都会加倍，而初始值的误差平均而言也以同样的速度增长：五十步之后，误差已增大了约一千万亿倍。把这个角表示成 π 的分数倍，再写成二进制（binary），就看得格外分明：映射的每一步都把二进制数字向左移一位，并丢掉第一位，所以数列是把初始值的数字逐个读出来，而要预测一百步之后的情况，你就要知道初始值准确至一百个二进制位。同一条公式还能找出这个映射的所有循环（cycle），并显示每一种长度的循环都存在，它们稠密地挤在 $[0,1]$ 之内，而且每一个都不稳定。这就是动力系统这门学问，你会在大学的微分方程（differential equations）课程中遇到它，其后还会在专门讲混沌的课程中再遇上（Section 8.7）。

周期三意味着混沌。取函数 $f(x) = 7 - 2|x|$，由一个数开始，不断把答案代回去。由 1 开始，得到 $1, 5, -3, 1, 5, -3, \ldots$：一个长度为三的循环。2025 年的一道题目要你寻找这类循环，方法是描绘 f、$f(f(x))$ 和 $f(f(f(x)))$ 的图像，找出它们与直线 $y = x$ 相交的位置。每多应用一次 f，图像中的锯齿数目就加倍，而该节把这个观察化为一个证明，说明这个函数具有*每一种*长度的循环：二、三、四、一百、一百万。

这并不是这个函数独有的特点。1975 年，李天岩（Tien-Yien Li）和 James Yorke 证明了任何具有长度为三的循环的连续函数（continuous function），都必定具有其他每一种长度的循环，论文的题目令人难以抗拒：“Period three implies chaos”（周期三意味着混沌）。证明所需的不过是介值定理（intermediate value theorem），也就是每当你论证一个变号的连续函数必定穿过零时已经在用的定理，再加上一幅巧妙的图，显示函数把哪些区间拉伸覆盖到哪些区间之上。后来人们才发现，乌克兰数学家沙可夫斯基（Oleksandr Sharkovsky）早在 1964 年已证明了一个更强的结果：他找到了正整数的一种奇特排序，

以 $3, 5, 7, 9, \ldots$ 开始，使得任何一种长度的循环，都会迫使排在它后面的每一种长度的循环出现。介值定理是大学分析（analysis）课程中最先严格证明的结果之一；这道题目显示了它能做到多少事情（Section 8.8）。

单车气泵为何会发热。替单车轮胎打气，然后摸一摸气泵：它是暖的。挤压气体会令它升温，柴油引擎正是这样不靠火花就点燃燃料。但为甚么呢？2002 年的一道题目这样回答：追踪单独一个空气分子，看它在气泵末端与正被推入的活塞之间来回弹跳。分子每次从推进中的活塞反弹，都会加快一点点，就像网球被移动中的球拍击中一样。题目要你准确描述一次反弹，把它化成每次碰撞时气缸长度的递归关系（recurrence），然后解出这个递归关系。

解答揭示了一条隐藏的定律：分子的速率乘以气缸的长度，几乎不变。把长度减半，速率就加倍，而由于温度量度的是分子的能量，气体便会升温。像这样在系统缓慢改变时几乎保持不变的量，称为*绝热不变量*（adiabatic invariants），而只要再多下一点功夫，同一个论证就能导出气体的绝热压缩定律，你会在大学的热力学中学到它。这个想法影响深远。费米（Enrico Fermi）于 1949 年提出，宇宙射线正是以这种方式获得巨大的能量，即在太空中移动的磁场之间反复弹跳；而埃伦费斯特（Paul Ehrenfest）则于 1916 年指出，绝热不变量正是量子力学必须加以量子化的量。一道关于单车气泵的题目，原来触及统计物理、天体物理和量子理论的开端（Section 10.4）。

会回来的球。把一个球轻轻向前抛，它会稳定地远离你，直至落地。常识告诉我们事情总是如此：球一直向前移动，又怎会靠近你呢？但只要抛得够陡，与水平所成的角大于约 $70.5°$，怪事就会发生。在飞行的某一段，当球下降时，它会离你*更近*，尽管它在水平方向上仍然远离你。它的高度下降得比水平距离增长得更快。

2019 年的一道题目要你证明这件事，并求出临界角的准确值。所用的方法你日后会一用再用：不对距离本身求导，而对距离的平方求导，这样就避开了平方根；所得的导数（derivative）原来是时间的二次式（quadratic），于是距离会否减少的问题，就变成这个二次式有没有实根的问题。它的判别式（discriminant）给出了答案，而临界角原来就是正弦值恰好等于 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 的那个角。这一课的意义远远超出抛体运动。许多“显然”递增的量其实并非如此，而在大学里，通过求出导数的正负号来证明某个量是单调（monotonic）的，是证明不等式、证明数列收敛（converge），以及证明微分方程的解趋于稳定的关键一步（Section 11.10）。

最后一位乘客。一班列车全部满座。第一位上车的乘客不理会自己的车票，随机选了一个座位坐下。其后每一位乘客，如果自己的座位空着就坐自己的座位，否则就在空座位中随机选一个。最后一位上车的乘客发现自己的座位空着的机会有多大？如果有一百个座位，各种可能性的分支令人眼花缭乱：一位被占了座位的乘客可以占去另一位的座位，后者又占去另一位的，形成一条任意长度的链。直接计算看来毫无希望。然而，无论座位数目是多少，答案都恰好是 $\frac{1}{2}$。

2021 年的一道题目一步一步地得出这个答案：它要你求出两个和三个座位时的答案，再按第一位乘客所坐的位置取条件（conditioning）来建立递归关系，然后用归纳法证明答案永远是 $\frac{1}{2}$。这是一个完全妥当的证明，但它令你不禁要问，答案为甚么如此简单，而该节接着给出一个一句话的论证来解释。每当有乘客要随机选择时，第一位乘客的座位和最后一位乘客的座位所受的对待完全相同；在其中一个被占之前，整个过程无法分辨它们。所以最后剩下的空座位是两者之一的机会均等，而它必定是两者之一，因为其他每个座位，在最后一位乘客上车之前，都已被它的主人或某位被占了座位的乘客坐了。像这样利用对称（symmetry）的论证，以一个观察取代好几页的计算，贯穿整个大学概率论（Section 12.5）。

综合来看，这类题目触及数学学位一年级的每一个主要范畴：数论（number theory）、分析、微积分（calculus）、复数（complex numbers）、代数、线性代数（linear algebra）、微分方程、组合数学、力学、概率与统计。

本书的用途

这个观察正是本书的缘起。大多数的 STEP 备试，都以通过考试为目标，这十分合理：学习技巧，操练试卷，锻炼速度和耐力。本书也以此为目标，而读完它会令你更擅长应付 STEP。但它真正的目的并不在此，而在于帮助你心怀大学数学去准备 STEP：把每道题目看成一份邀请，而不是一个要清除的障碍，并且循着这份邀请一直走到尽头。

在 STEP 中表现最好、其后在大学里如鱼得水的学生，几乎总是那些为数学本身而热爱数学的人。他们享受难题终于被攻破的那一刻。他们想知道一个技巧为何行得通，而不仅仅是知道它行得通。当答案简单得令人起疑，例如 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{e}$ 或 $\pi^2/6$，他们会怀疑背后另有更深的道理，并且动身去找。本书想培养的正是这些习惯。每一道题目之所以入选，都是因为它通往一个发现：一个比题目本身更大的想法、定理或思考方式。

思考方式与定理同样重要。大学数学要求你用学校数学很少用到的方式思考：去证明而不是去计算，用反证法（proof by contradiction）或无穷递降法（infinite descent）来论证，用两种方法数算同一样东西，找出一个永不改变的量，构造一个反例（counterexample），在不把某样东西找出来的情况下证明它存在。STEP 题目训练的正是这些习惯，而且往往不加明言。本书的每一节都会点明该节核心的思维技巧，好让你再次遇上时能够认出它。

本书的编排

本书共有十三章，按题目所通往的大学数学范畴编排，而不是按题目所出自的 STEP 试卷编排。

- **纯粹数学**（第 1 至 9 章）：数论与证明；数列、级数（series）与收敛；函数、不等式与严谨性；正正式式的微积分；复数；代数与结构；线性代数与几何；微分方程与动力系统；以及计数与机会，当中亦取材自概率卷的组合题。

- **力学**（第 10 和 11 章）：守恒定律、碰撞与引力；以及振动、转动与运动参考系，最后以一组出人意表的轨迹作结。
- **概率与统计**（第 12 和 13 章）：概率，由关于取条件的清晰思考到中心极限定理（central limit theorem）；以及现实世界中的统计与随机性。

每章以一篇短文开始：这个范畴为何重要，你在大学里会在其中遇到甚么，以及贯穿全章的三个大问题。每章以一篇总结收结，当中会重温这些问题，并附上所用方法的工具箱、通往其他章节的指引，以及入读大学前的阅读建议。每章末尾载有练习的简短答案。第 1 章之前有一个词汇表，收录书中那些在学校不大可能接触过的术语，还有一个列出书中所用数学符号的表；如果有哪个词或哪个符号难倒了你，就到那里查一查。

每一节都依循同一个模式。它以*题目*开始：一条连结，通往该道 STEP 题目在官方来源的原文，与当年所出的一字不差。*引子*解释这道题目为何比表面看来更有趣。*动笔之前*给你第一个立足点。*逐步解题*是分阶段的引导式解答，中间穿插着以*问问自己*和*停下来试试*为题的方框，那些都是一位好老师会在那一刻向你提出的问题；它们是用来回答的，不是用来跳过的。*回顾*挑出关键的几步。*背后的数学*是该节的核心：题目背后的大学数学，它的历史和它的惊喜。*思维技巧*点明这道题目所锻炼的思考习惯。*延伸练习*提供后续的题目，当中常有相关的 STEP 题目，而*延伸阅读*则推介一些书籍和文章，程度是实力强的中学生或大学一年级生应付得来的。

本书详细讨论了 136 道题目，但 STEP 所出的题目超过 1,500 道。网站为其中每一道都提供了详细解答，由样本试卷直至 2025 年。它们的写作精神与本书一致，但篇幅短得多。每一份解答都给出解开题目的关键思路、逐部分的完整解答、几项你可以对答案作出的验算、容易犯的错误，以及该题所触及的大学数学的指引。如果某道题目在本书中有完整的讨论，它的解答会注明，并附上连结。

有几节用到现行 STEP 课程纲要以外的课题，例如群（groups）、转动惯量（moments of inertia）和矩母函数（moment generating functions）。收录它们，是因为那些题目好得不容割舍，而每一节都会给出它所需要的事实。

学生如何使用本书

- **先做题目。**从该节开首的连结打开题目，阅读时把它放在手边，因为解答会不时提到题目的各个部分和用字。每道题目至少认真地花半小时，然后才往下读。卡住了并不代表失败；学习正是在这里发生的。如果你完全卡住了，先读*动笔之前*，然后再试。
- **回答方框里的问题。**当正文向你提问时，请停下来，在纸上作答。这些引导式解答，是写给手里拿着铅笔的读者看的。
- **不要跳过“背后的数学”各节。**它们不在考试范围之内，却是这本书存在的理由，也是你日后会记得的东西。

- **各节可按任何次序阅读。**每一节都自成一体，而交叉引用会指引你到别处的相关想法。跟着你的好奇心走。
- **先做练习，再对答案。**每章末尾的答案很简短：只给出结果和关键的一步，而不是完整的解答过程。
- **把详细解答当作跳板。**用历届试卷练习时，先认真尝试每道题目，然后才打开网站上的解答，而且只读到足以让你重新起步的地方为止。如果关键思路已经足够，就关上解答，自己把题目做完。
- **善用工作纸。**网站为每一节提供可列印的工作纸，载有题目的连结、依次排列的提示、*背后的数学*部分和练习，方便你离开屏幕来做。
- **在本书以外多读。**Siklos 的书、STEP 支援计划和历届试卷本身，全部都可以免费取得。每一节的延伸阅读，都是挑选入读大学前已能读懂的材料。

教师如何使用本书

- **作为延伸教材的来源。**每一节都是一堂自成一体的课：题目、一条贯穿题目的引导路径，以及做完之后一个值得一去的地方。各项思维技巧很适合用作一连串课堂的主题。
- **作为讨论指引。***问问自己*和*停下来试试*的方框，是全班或小组讨论的现成引子。先提出这些问题，然后才揭示下一阶段。
- **配合工作纸使用。**每张工作纸都载有题目的连结、依次排列的提示、*背后的数学*部分和后续练习；学生可以自行决定要看多少个提示。
- **用于 STEP 备试。**书中收录了全部三份试卷的题目，由样本试卷直至 2025 年，其中不少在练习中附有相关题目。各章的总结和工具箱有助学生看到不同课题之间的联系。
- **给没有 STEP 支援的学生。**本书的写法，是要让一个有决心的学生能够独力读完。如果你的学校不提供 STEP 备试，本书可以承担其中大部分的工作。

版权与勘误

本书中凡属我本人创作的内容，包括正文、引导式解答、插图、练习和答案，均按照 Creative Commons CC0 1.0 Universal 授权条款贡献予公有领域：你可以为任何目的复制、改编和分享，无须征求许可。STEP 题目本身的版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有，不在该授权条款的涵盖范围之内。因此，本书并没有转载这些题目。取而代之，每一节都连结到题目的官方来源：样本试卷和 1987 至 2018 年的试卷，连结到 STEP 支援计划的题目资料库；2019 年起的试卷，则连结到 OCR 提供下载的各年试卷。用到其他 STEP 题目的练习，也以同样的方式连结。

我已尽力确保书中的数学正确无误，但这样篇幅的一本书必定会有错误。如果你发现错误，

无论多么细微,请到本书的GitHub 储存库 `github.com/keithmcnulty/step_book_mcnulty` 以 issue 的形式提出。收到勘误后，本书的网站会随即更正。

动笔之前的最后几句话

Siklos 以米高安哲罗（Michelangelo）的大卫像的故事，为他那本书的引言作结：这座雕像是用一块数十年来无人问津的大理石雕成的。他说，他无法教会你数学，但下苦功一点一点地凿开题目，会让你内在的那位数学家显露出来。这番话我无法说得更好。本书为你提供大理石、一些工具，以及几幅图画，让你看看别人在石头里找到了甚么。凿石的功夫，就要靠你自己了。我希望你乐在其中，一如我编写这本书时那样乐在其中。

Keith McNulty
2026 年 11 月