词汇表

大学数学有自己的一套词汇，其中不少你大概从未见过。本词汇表收录了书中那些你在中学不大可能遇过的用语，每个词附上简短的解释，并在有帮助的地方指出哪一节用到或详细说明了这个概念。这些解释只为帮你入门，并非精确的定义；凡有严格定义的词，所指的那一节都会给出。

有几个词，例如*集合*、*函数*和*证明*，你早已熟悉，但大学里使用它们时比中学更为讲究，所以也一并收录。词条内以*斜体*标示的词，本身另有词条。

A

绝热不变量（Adiabatic invariant） 当系统缓慢改变时几乎保持不变的量。一个分子在缓慢压缩的气缸内来回弹跳时，它的速率乘以气缸长度几乎固定不变（Section 10.4）。

代数数（Algebraic number） 某个整数系数（可正、可负、可为零，但不全为零）多项式方程的根。$\sqrt{2}$、i 和 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 都是代数数；不是代数数的数称为*超越数*（transcendental）（Section 6.3）。

分析（Analysis） 为微积分奠定严格基础的数学分支：极限、连续性、微分、积分和无穷级数，全都精确地定义，并从基本原理出发加以证明。第 2 至 4 章是这门学问的入门。

角动量（Angular momentum） 动量在转动中的对应量。对于绕轴自转的物体，它等于*转动惯量*（moment of inertia）乘以角速度；只要没有外来的转动效应，角动量便守恒（Section 11.6）。

算术几何平均（Arithmetic–geometric mean） 把一对数反复换成它们的算术平均和几何平均，由此得到两个数列，它们的共同极限就是算术几何平均。其收敛速度快得惊人（Section 2.6）。

结合律（Associative） 若对所有 a、b、c 都有 $(a*b)*c = a*(b*c)$，则运算 $*$ 满足结合律，括号因而可以省去。数的加法和乘法都满足结合律；减法则不然。

渐近（Asymptotic） 若两个式子之比当 $n \to \infty$ 时趋向 1，则称它们渐近相等，记作 $f(n) \sim g(n)$。斯特灵公式（Stirling's formula）指出 $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$，尽管两边之差会无止境地增大（Section 12.23）。

公理（Axiom） 不加证明而视为出发点的命题，其他一切都由它推导出来。大学代数有

很大部分都是从一张简短的公理清单出发，探究由此可以推出甚么（Section 7.3、Section 6.5）。

B

基础步骤（Base case） *归纳法*（induction）证明的第一步：验证命题对最小的值成立，通常是 $n = 0$ 或 $n = 1$。其后的*归纳步骤*（inductive step）则证明：命题对某个值成立，便对下一个值也成立。

基本比率谬误（Base-rate fallacy） 只凭证据判断某事的概率（probability），却忽略它本来有多常见，这种错误就是基本比率谬误。如果某种疾病足够罕见，即使准确的测试得出阳性结果，它是虚惊一场的可能性也可以比真正患病更大；实际是否如此，取决于疾病有多罕见和测试有多准确（Section 12.2）。

基（Basis） 一组向量，使得空间中每个向量都能以唯一的方式写成它们的组合。在平面上，**i** 和 **j** 构成一个基；任何一对不平行的向量也是如此。一个基所含向量的数目就是空间的*维数*（dimension）（Section 6.3）。

贝叶斯定理（Bayes' theorem） 把一个条件概率倒转过来的法则：$\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(B \mid A)\,\mathrm{P}(A)/\mathrm{P}(B)$。它告诉你怎样根据证据修正原有的判断（Section 12.2）。

偏差（Bias） 若一个*估计量*（estimator）在大量样本上平均而言偏高或偏低，它便是有偏的；若它的期望值恰好等于所估计的量，它便是*无偏*（unbiased）的（Section 13.3）。

双射（Bijection） 一一对应：一种把一个集合的每个成员与另一个集合的恰好一个成员配对的规则，而且两边都没有剩余。两个有限集合大小相同，恰好就是它们之间存在双射的时候；无限集合的大小正是这样定义的（Section 1.8、Section 9.10）。

二元运算（Binary operation） 把两个对象结合而得出第三个对象的规则，例如数的加法、矩阵的乘法或函数的复合。

界（Bound） 一个数集或数列的上界，是其中没有任何数超过的数；下界则是其中没有任何数低于的数。若数列两者皆有，便称为*有界*（bounded）（Section 2.2）。

分支过程（Branching process） 一种族群模型，其中每个个体各自独立地产生随机数目的后代。核心问题是这个家族会否绝后，而答案来自*概率生成函数*（probability generating function）（Section 12.15）。

C

变分法（Calculus of variations） 研究这样一类问题的学问：未知的是整个函数或整条曲线，要选取它使某个量尽可能小或尽可能大，例如最短的路径、最快的滑道、围出最

大面积的曲线（Section 4.7）。

悬链线（Catenary） 悬挂的链条所呈的形状，即 $y = a\cosh(x/a)$ 的图像。它看似抛物线，其实不是（Section 11.14）。

柯西分布（Cauchy distribution） 一种连续分布，图像呈钟形，但尾部极厚，以致没有平均值。从中抽取样本，样本的平均值并不比单独一个观测值可靠（Section 12.22）。

中心极限定理（Central limit theorem） 这个定理指出：大量独立、同分布而方差有限的随机量之和，经适当平移和缩放后，近似服从正态分布，不论那个共同的分布是甚么。对于分布各不相同的随机量也有相应的版本，条件是其中没有少数几个量主导整个和。它解释了为何钟形曲线无处不在（Section 12.24）。

混沌（Chaos） 确定性系统的一种行为：它对起点极为敏感，以致实际上无法作长期预测——两个非常接近的起点，会导向截然不同的未来（Section 8.7、Section 8.8）。

封闭（Closed） 若把集合中两个成员结合起来，所得的总是集合中的另一个成员，则该集合在这个运算下封闭。偶数在加法下封闭；奇数则不然。

交换律（Commutative） 若 $a * b = b * a$ 恒成立，则运算 $*$ 满足交换律。数的乘法满足交换律；矩阵的乘法和*四元数*（quaternions）的乘法则不满足（Section 7.1、Section 6.7）。

完备性（Completeness） 实数没有空隙这一性质：每个有上界的递增数列都收敛于某个实数。有理数并无这个性质，因为一列分数可以逐步逼近 $\sqrt{2}$。*分析*有很大部分建基于此（Section 2.2）。

同余（Congruence） $a \equiv b \pmod{n}$，读作“a 与 b 模 n 同余”，意思是 a 和 b 除以 n 所得的余数相同；等价地说，n 整除 $a - b$。用同余式进行的运算称为*模算术*（modular arithmetic）（Section 1.5）。

猜想（Conjecture） 人们相信为真但尚未证明的命题。

守恒定律（Conservation law） 指出某个量（例如能量、动量或角动量）在系统演变过程中保持不变的命题。有了守恒定律，往往不必追踪细节便能解决问题（Section 10.1）。

连续（Continuous） 若输入的微小改变只引致输出的微小改变，则函数是连续的；通俗地说，就是笔不离纸也能画出它的图像。精确地说，若当 $x \to a$ 时 $\mathrm{f}(x) \to \mathrm{f}(a)$，则 f 在 a 连续（Section 3.1、Section 8.8）。

反证法（Contradiction, proof by） 先假设命题不成立，再由此推出不可能的结论，这样的证明称为反证法。经典的例子是 $\sqrt{2}$ 为无理数的证明（Section 1.3）。

逆否命题（Contrapositive） “若 P 则 Q”的逆否命题是“若非 Q 则非 P”。两个命题在逻辑上等价，而证明逆否命题往往较为容易。它与*逆命题*（converse）“若 Q 则 P”并

不相同，后者很可能不成立。

收敛（Converge） 若数列各项能够任意接近某个固定的数，并一直保持接近，则数列收敛，该数就是它的*极限*（limit）。若级数的*部分和*（partial sums）收敛，则级数收敛。不收敛的数列或级数称为*发散*（diverge）（Section 2.1、Section 2.3）。

凸（Convex） 若连接函数图像上任意两点的弦都位于图像之上或与图像重合，则函数是凸的，例如 x^2 或 e^x。许多不等式，包括 AM–GM 不等式，都是凸性的推论（Section 3.3）。

推论（Corollary） 由刚证明的*定理*（theorem）很快便能得出的结果。

相关系数（Correlation） 一个介乎 -1 与 1 之间的数，量度两个随机量之间的关系有多接近直线关系。它是*协方差*（covariance）除以两个标准差所得的值（Section 13.7）。

可数（Countable） 若集合的成员可以排成第一个、第二个、第三个……这样列下去（可能永无止境），则该集合是可数的。整数是可数的，而令人意外的是，分数也是可数的；实数则不可数（Section 1.8）。

反例（Counterexample） 显示某个一般性命题不成立的单一例子。不论有多少例子支持某个论断，一个反例已足以把它推翻。

协方差（Covariance） $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{E}(XY) - \operatorname{E}(X)\operatorname{E}(Y)$，量度两个随机量如何一同变化。独立的随机量协方差为零，但协方差为零并不代表独立（Section 12.4、Section 13.7）。

循环（Cycle） 反复施行某个函数时依次到访的一组点：$x_1 \mapsto x_2 \mapsto \cdots \mapsto x_n \mapsto x_1$。数 n 是它的*周期*（period），而这些点称为*周期点*（periodic points）（Section 8.8）。

摆线（Cycloid） 滚动的轮子边缘上一点所描出的曲线。把它上下倒转，它既是最速降线，也是无论从哪里滑下所需时间都相同的曲线（Section 11.4）。

分圆多项式（Cyclotomic polynomial） 以全部*本原*（primitive）n 次*单位根*（roots of unity）为根、且别无其他根的多项式 $\Phi_n(x)$。它的系数都是整数，而且*不可约*（irreducible）；$x^n - 1$ 等于 n 的所有因数 d 所对应的 $\Phi_d(x)$ 之积：例如 $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$（Section 6.1）。

D

错排（Derangement） 把一列东西重新排列，使得没有任何一项留在原来的位置（Section 9.8）。

导子（Derivation） 作用于函数（或其他对象）的运算 D，满足 $D(f+g) = Df + Dg$ 和乘积法则 $D(fg) = f\,Dg + g\,Df$。求导是标准的例子，而它的许多性质单凭这两条法则便可推出（Section 6.5）。

行列式（Determinant） 由方阵算出的一个数，量度相应的变换把面积或体积放大多少倍。它等于零，恰好就是矩阵没有逆矩阵的时候（Section 7.3）。

可微（Differentiable） 若函数的图像在某点有明确的切线，即定义导数的那个极限存在，则函数在该点可微。每个可微函数都是*连续*的，但反之不然：$|x|$ 在 0 连续但不可微。

维数（Dimension） 一个基所含向量的数目，即*向量空间*（vector space）中独立方向的数目。

发散（Diverge） 见*收敛*。

动力系统（Dynamical system） 描述系统状态如何随时间改变的规则，可以是逐步改变（由 $x_{n+1} = \mathrm{f}(x_n)$ 定义的数列），也可以是连续改变（微分方程）。第 8 章以此为主题。

E

特征值、特征向量（Eigenvalue, eigenvector） 若对某个数 λ 有 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$，则非零向量 $\mathbf{v}$ 是矩阵 $\mathbf{M}$ 的特征向量，而该数就是它的特征值：这个变换只把 $\mathbf{v}$ 拉伸，而不把它转动（Section 7.2）。

包络线（Envelope） 与一族曲线中每一条都相切的曲线。以固定速率抛出的球，其所有轨迹的包络线就是*安全抛物线*（safety parabola），即球所能到达的区域的边界（Section 11.9）。

平衡（Equilibrium） 系统不再改变的状态。若微小的扰动始终保持微小，平衡便是*稳定*（stable）的；若扰动还会逐渐消失，便是*渐近稳定*（asymptotically stable）的，有摩擦的摆就是这样；没有摩擦而垂直下垂的摆是稳定的，但轻轻一推便会令它永远摆动下去。若有些微小的扰动会增大，平衡便是*不稳定*（unstable）的（Section 8.3、Section 11.8）。

估计量（Estimator） 根据数据计算出某个未知量（例如族群的大小或分布的平均值）的估计值的规则（Section 13.3）。

欧拉示性数（Euler characteristic） 对于有 V 个顶点、E 条棱和 F 个面的多面体，指 $V - E + F$ 这个数；没有洞的多面体，这个数永远是 2（Section 7.9）。

存在性证明（Existence proof） 证明某物存在，却不一定说明怎样把它找出来的证明。*鸽巢原理*（pigeonhole principle）和*介值定理*（intermediate value theorem）都能给出存在性证明。

期望值（Expectation） 随机量 X 的平均值，记作 $\mathrm{E}(X)$：即多次独立重复试验的长期平均。期望值具有可加性，$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$，不论 X 与 Y 是否独立（Section 9.11）。

极端原理（Extremal principle） 一种策略：考察某类对象中最小、最大、最先或最后的一个，并证明它具有某种性质，从而得出所求的结果或导出矛盾（Section 1.3）。

F

域（Field） 可以进行加、减、乘、除（除数不为零）而且所有惯常法则都成立的数系。有理数、实数和复数都是域；模质数的整数也是。整数不是域，因为并非总能相除（Section 6.3）。

域扩张（Field extension） 包含一个较小的域的较大的域，例如所有形如 $a + b\sqrt{2}$（其中 a、b 为有理数）的数，它们包含了有理数。域扩张的*次数*（degree），就是把它看成较小的域上的*向量空间*时的*维数*（Section 6.3）。

不动点（Fixed point） 满足 $\mathrm{f}(x) = x$ 的点 x，即函数让它留在原处的点。在图像上，不动点就是 $y = \mathrm{f}(x)$ 与 $y = x$ 相交之处（Section 2.2、Section 8.8）。

参考系（Frame of reference） 量度位置和运动时所采取的观点。*惯性*（inertial）参考系是牛顿（Newton）第一定律成立的参考系；在加速的参考系中，例如正在加速的火车上，看起来会多出一些力（Section 11.5）。

函数（Function） 一种规则，把一个集合（*定义域*（domain））的每个成员对应到另一个集合（*上域*（codomain））的恰好一个成员。在大学里，函数并不等同于公式：许多重要的函数没有公式，而有些公式并不定义函数。

函数方程（Functional equation） 以函数为未知量的方程，例如 $\mathrm{f}(x+y) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$（Section 3.8）。

代数基本定理（Fundamental theorem of algebra） 每个次数至少为 1 的复系数多项式都有一个复数根，因而可以在复数范围内完全分解成一次因式。

G

伽玛函数（Gamma function） 把阶乘推广至非整数的函数 Γ：对整数 n 有 $\Gamma(n+1) = n!$，而且 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，在某种意义上这是说 $(-\frac{1}{2})! = \sqrt{\pi}$（Section 4.4）。

高斯整数（Gaussian integer） 形如 $a + b\mathrm{i}$ 的复数，其中 a 和 b 为整数。它们的表现与普通整数十分相似，有自己的质数，也有唯一分解（Section 1.6）。

生成函数（Generating function） 以某个数列各项为系数的幂级数 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$。对级数所作的运算（例如乘法）对应于对数列所作的有用运算（Section 9.4）。*概率生成函数*是对取整数值的随机量的各个概率这样做（Section 9.6、Section 12.15）；*矩生成函数*（moment generating function）则是它的近亲（Section 12.24）。

群（Group） 一个集合连同一个*二元运算*，这个运算满足*结合律*，有*单位元*（identity），并且每个元素都有*逆元*（inverse）。一个图形的所有对称构成一个群，非零复数在乘法下也构成一个群。群是描述对称的语言（Section 6.6、Section 6.7）。

H

双曲几何（Hyperbolic geometry） 一种几何，其中过已知直线外一点有无穷多条直线永不与该直线相交，而三角形的内角和小于 π。配上适当的距离量度方法的圆盘，就是它的一个模型（Section 5.8）。

I

单位元；恒等式（Identity） 运算 $*$ 的单位元是这样的元素 e：对每个 a 都有 $e * a = a * e = a$。加法的单位元是 0，乘法的是 1，矩阵乘法的是单位矩阵 $\mathbf{I}$。另一个意思是恒等式，即对变量的每个值都成立的等式，例如 $\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$。

当且仅当（If and only if） “P 当且仅当 Q”，常写作“P iff Q”或 $P \iff Q$，意思是 P 和 Q 要么同时为真，要么同时为假。证明它需要两个论证，每个方向各一个。

独立（Independent） 若知道其中一个事件已经发生并不改变另一个事件的概率，则两个事件独立：$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$。三个或更多事件可以两两独立，却并非整体独立（Section 12.4）。

归纳法（Induction） 证明某个命题对每个整数 n 都成立的方法：先证明它对第一个值成立（*基础步骤*），再证明只要它对某个值成立，便对下一个值也成立（*归纳步骤*）。在*强归纳法*（strong induction）中，归纳步骤可以使用命题对所有较小的值都成立这一点，而不只是对前一个值（Section 1.2）。

无穷递降法（Infinite descent） 反证法的一种形式：证明某个整数问题的任何一个解都会引出一个更小的解，从而得到一列无穷递减的正整数，而这是不可能的（Section 1.5）。

介值定理（Intermediate value theorem） 若*连续*函数取到 a 和 b 这两个值，它便取到两者之间的每一个值。因此，变号的连续函数必定有根（Section 8.8）。

不变量（Invariant） 在某个过程进行期间，或在某种变换之下，保持不变的量。要证明某事不可能，或者不必追踪每一步便解决问题，寻找不变量是最有力的方法之一（Section 7.7、Section 10.4）。

逆元；反函数（Inverse） 对于具有*单位元* e 的运算，元素 a 的逆元是满足 $a * b = b * a = e$ 的元素 b。反函数则把函数的作用还原：$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$。

无理数（Irrational） 不能写成分数 $\frac{p}{q}$（其中 p 和 q 为整数，$q \neq 0$）的实数，例如 $\sqrt{2}$、π 或 e（Section 1.4）。

不可约（Irreducible） 若多项式不能写成两个次数较低、系数属同一类的多项式之积，则它是不可约的。$x^2 - 2$ 在有理数范围内不可约，但在实数范围内可分解为 $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$（Section 6.1）。

同构（Isomorphic） 若两个结构（例如两个群）之间存在一个双射，使它们的运算完全对应，则这两个结构同构：它们是同一个结构，只是标签不同（Section 6.7、Section 6.8）。

迭代（Iteration） 反复施行同一个函数，于是 $x_1 = f(x_0)$，$x_2 = f(x_1)$，如此类推。数列 x_0、x_1、x_2、… 称为 x_0 的轨道（orbit）（Section 8.7）。

L

大数定律（Law of large numbers） 这个定理指出：只要期望值存在，一个随机量多次独立重复所得的平均值便趋向它的期望值（Section 12.22）。

引理（Lemma） 主要为了证明某个更大的定理而先行证明的结果。

极限（Limit） 数列或函数任意接近、并一直保持接近的那个值。把这个想法精确化，是十九世纪数学的伟大成就之一，也是分析的起点（Section 2.1）。

极限环（Limit cycle） 系统运动中的一个闭合回路，邻近的运动会螺旋地趋近（或远离）它，例如心跳或时钟的稳定节奏（Section 8.4）。

线性映射（Linear map） 向量空间之间满足 $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ 和 $T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T(\mathbf{u})$ 的函数 T。每个线性映射都可以用矩阵表示，而线性代数就是研究线性映射的学问（Section 7.2）。

逻辑斯谛映射（Logistic map） 规则 $u_{n+1} = ru_n(1-u_n)$，是受食物供应限制的族群的简单模型，也是混沌的标准例子（Section 8.7）。

M

马可夫链（Markov chain） 一种在各个状态之间逐步转移的随机过程，其中下一步的概率只取决于当前的状态，而与过程怎样到达这个状态无关（Section 12.16）。

最大似然法（Maximum likelihood） 估计未知量的一种方法：选取使观测所得数据出现的概率最大的那个值（Section 13.2）。

无记忆性（Memoryless） 若不论你已经等了多久，余下的等候时间的分布都与开始时相同，则这个随机等候时间具有无记忆性。指数分布是唯一具有无记忆性的连续分布（Section 12.18）。

最小多项式（Minimal polynomial） 以某个已知代数数为根、系数为有理数而首项系数为 1 的多项式之中，次数最低的一个。$\sqrt{2}$ 的最小多项式是 $x^2 - 2$（Section 6.3）。

模算术（Modular arithmetic） 见同余。

转动惯量（Moment of inertia） 质量在转动中的对应量：量度要改变物体绕某轴转动的快慢有多困难。它取决于质量离轴有多远，而不只取决于质量有多少（Section 11.7）。

单调（Monotonic） 若数列或函数从不下降（递增）或从不上升（递减），则它是单调的。有界的单调数列必定收敛（Section 2.2、Section 11.10）。

N

必要及充分（Necessary and sufficient） 若没有 P 则 Q 不可能成立（$Q \Rightarrow P$），则 P 是 Q 的必要条件；若 P 保证 Q 成立（$P \Rightarrow Q$），则它是充分条件。既必要又充分的条件与 Q 等价。

简正模态（Normal modes） 系统的一些特殊振动形态，其中每个部分都以相同的频率同步运动。系统的任何振动都是它的简正模态的组合（Section 11.2）。

O

阶（Order） 群中元素 g 的阶，是使 g^n 等于单位元的最小正整数 n：即必须把它施行多少次才回到起点（Section 7.4）。若不存在这样的 n，例如整数加法群中的数 1，则称 g 的阶为无限（infinite order）。有限群的阶是它所含元素的数目。

正交（Orthogonal） 即垂直。在大学里，这个词的用法推广至向量以外：若在适当的范围上 $\int f(x)g(x)\,dx = 0$，则两个函数 f 和 g 可称为正交（Section 8.6）。

P

参数（Parameter） 在某一个问题之内固定不变、但在不同问题之间可以改变的量，例如逻辑斯谛映射中的 r。许多 STEP 题目都会问答案怎样随参数而变。

部分和（Partial sum） 级数首 n 项之和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。若部分和收敛，则级数收敛（Section 2.3）。

鸽巢原理（Pigeonhole principle） 若把多于 n 件物件放进 n 个盒子，则必有某个盒子装有至少两件。它虽然简单，却能证明一些出人意表的存在性结果（Section 9.2）。

泊松过程（Poisson process） 一种模型，描述在时间或空间中以恒定的平均率随机而独立地发生的事件：放射性衰变、电话来电、天上的星星（Section 12.19、Section 12.18）。

本原单位根（Primitive root of unity） 一个 n 次单位根，其各次幂恰好给出全部 n 个 n 次单位根；等价地说，对任何较小的 m，它都不是 m 次单位根（Section 6.1）。

概率密度函数（Probability density function） 对于连续的随机量，指这样的函数 f：它在某个区间上的积分，就是随机量落在该区间内的概率。

证明（Proof） 从定义、公理和已经证明的结果出发，说明某个命题为真的完整逻辑论证。在大学里，即使一段计算得出正确答案，除非每一步都有理据，否则不算证明。

Q

四元数（Quaternions） 哈密顿（William Rowan Hamilton）于 1843 年发现的数系，它把复数加以扩充，包含 -1 的三个平方根，记作 i、j、k，满足 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$。四元数的乘法不满足*交换律*。它们用于描述三维空间中的旋转（Section 6.7、Section 7.5）。

R

随机变量（Random variable） 其值由随机试验的结果决定的量，例如掷十次硬币所得正面的次数。

随机游走（Random walk） 由接连的随机步伐组成的路径，例如一枚棋子按掷硬币的结果向左或向右移动一格（Section 9.10、Section 12.17）。

快度（Rapidity） 狭义相对论中量度快慢的一个量；与速度不同，当一个运动与另一个同方向的运动合成时，快度只需直接相加。若 c 为光速，则速度 v 对应的快度为 $\operatorname{artanh}(v/c)$（Section 7.6）。

递推关系（Recurrence relation） 以数列中较前的项表示每一项的等式，例如斐波那契（Fibonacci）数所满足的 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$。

共振（Resonance） 系统受到周期性的推动，而推动的频率等于或接近系统本身的固有频率时所产生的强烈反应，就像配合秋千的节奏去推秋千上的小孩那样（Section 11.1）。

黎曼积分（Riemann integral） 积分的精确定义：把积分定为许多细长矩形面积之和的极限（当这个极限存在时）（Section 4.1）。

严谨性（Rigour） 一种论证的标准：每一步都要有理据，不会因为某事看来显然、或者在你试过的例子中都成立，便视为理所当然（第 3 章）。

单位根（Root of unity） 对某个正整数 n 满足 $z^n = 1$ 的复数 z。全部 n 次单位根是 $e^{2\pi ik/n}$，其中 $k = 0、1、\ldots、n-1$，它们在单位圆上构成一个正 n 边形（Section 5.2）。

S

样本空间（Sample space） 一个随机试验所有可能结果组成的集合。事件是它的子集（Section 12.1）。

集合（Set） 一批对象（称为它的*元素*（elements））合起来看成的单一整体。元素的次序无关重要，重复与否也无关重要：$\{1,2,3\}$ 和 $\{3,1,2,2\}$ 是同一个集合。

简谐运动（Simple harmonic motion） 加速度与相对某固定点的位移成正比、并且指向该点的运动，$\ddot{x} = -\omega^2 x$。它的解是 $x = A\cos(\omega t + \varepsilon)$，而周期 $2\pi/\omega$ 与摆动的幅度无关（Section 11.4）。

稳定、不稳定（Stable, unstable） 见*平衡*。

斯特灵公式（Stirling's formula） 近似式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$，其百分误差随 n 增大而趋向零（Section 12.23）。

子群（Subgroup） *群*的一个子集，它在同一运算下本身也是一个群（Section 6.6）。

对称性论证（Symmetry argument） 这样的一种论证：由于问题中没有任何东西能把两个量区分开来，所以它们必定相等。一个好的对称性论证可以取代好几页的计算（Section 12.5）。

T

定理（Theorem） 已获证明的重要命题。较次要的结果常称为*命题*（propositions），在通往定理的途中证明的称为*引理*，而很快便能得出的结果则称为*推论*。

迹（Trace） 方阵主对角线上各元素之和。与*行列式*一样，把矩阵改用另一个*基*来表示时，它并不改变；它还等于各*特征值*之和（Section 7.4、Section 7.7）。

超越数（Transcendental） 不是*代数数*的数：它不是任何整数系数（不全为零）多项式方程的根。e 和 π 都是超越数，不过要证明这一点并不容易（Section 1.4）。

三角不等式（Triangle inequality） $|a+b| \le |a| + |b|$，对实数、复数或向量都成立：三角形的一边永远不会比另外两边加起来更长。

U

唯一分解（Unique factorisation） 每个大于 1 的整数都只能以一种方式写成质数之积(不计因数的次序）这一性质。它并不如看起来那么显然：在有些数系中它并不成立（Section 1.7）。

唯一性定理（Uniqueness theorem） 指出某个问题只有一个解的定理。对于微分方程，当方程的性质不够良好时，唯一性可能失效，以致同一个起点会导向几个不同的未来（Section 8.1）。

V

向量空间（Vector space） 一批称为向量的对象，它们可以相加，也可以乘以数，并遵从平面上箭头所满足的那些熟悉法则。多项式、函数以及许多微分方程的解都构成向量

空间，所以线性代数的方法对它们都适用（Section 6.3）。

W

良定义（Well-defined） 若某个对象或规则的定义确实指明了单独一个毫不含糊的东西，例如不取决于过程中所作的任意选择，它便是良定义的。

良序原理（Well-ordering principle） 每个非空的正整数集合都有最小的成员。它与*归纳法*原理等价，而每一个以“取最小的反例”开始的论证，背后都是这个原理（Section 1.3）。

不失一般性（Without loss of generality） 常简写为 WLOG 的一句用语，意思是论证只考虑其中一种情况，因为其他情况除了要重新标记之外并无分别。“不失一般性，设 $a \leq b$”的意思是：如果 $a > b$，把两者的名称对调便可。