풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 9

순수수학 • 행렬의 군

> **STEP III 견본 문제지, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q9

핵심 아이디어

모든 것은 한 번의 계산에서 나온다. 이런 모양의 일반적인 행렬 두 개를 곱해서 무엇이 나오는지 보는 것이다. 곱은 같은 모양이 되고 성분은 간단한 공식으로 주어진다. 이 공식만 있으면 닫혀 있음(closure), 항등원(identity), 역원(inverse), 정수 부분군(subgroup), 그리고 교환 조건이 거의 저절로 얻어진다. 다음과 같이 쓰자.

$$M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix}.$$

풀이

G는 군이다

곱셈 공식. 행과 열을 곱하면

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+x & 1 & 0 \\ b+cx+y & c+z & 1 \end{pmatrix},$$

즉

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z) = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z). \qquad (*)$$

이다.

닫혀 있음. 성분 $a+x, b+cx+y, c+z$가 모두 실수이므로 곱은 G에 속한다.

결합법칙(associativity). 행렬의 곱셈에 대해서는 이것을 가정해도 된다.

항등원. 단위행렬 $I = M(0,0,0)$은 G에 속하고, 모든 행렬 M에 대해 $IM = MI = M$이다.

역원. $M(a,b,c)$가 주어졌을 때, 곱이 $M(0,0,0)$이 되는 $M(x,y,z)$를 찾는다. $(*)$에 의해 $a+x=0$, $c+z=0$, $b+cx+y=0$이어야 하므로 $x=-a$, $z=-c$, $y=-b-cx=ac-b$이다. 행렬의 곱셈은 교환법칙(commutative law)이 성립하지 않으므로 반대 순서도 확인한다.

$$M(-a,\ ac-b,\ -c)\,M(a,b,c) = M(0,\ (ac-b)+(-c)a+b,\ 0) = M(0,0,0).$$

따라서 $M(a,b,c)^{-1} = M(-a,\ ac-b,\ -c)$이고, 이것은 G에 속한다.

군의 네 가지 공리가 모두 성립하므로 G는 행렬의 곱셈에 대하여 군(group)이다.

정수 행렬

$x,y,z \in \mathbb{Z}$인 $M(x,y,z)$ 전체의 집합을 H라 하자. 이것은 G의 부분집합이고 $I = M(0,0,0)$을 포함한다. a,b,c,x,y,z가 정수이면 $a+x$, $b+cx+y$, $c+z$도 정수이므로, $(*)$에 의해 H는 곱셈에 대하여 닫혀 있다. 역원 $M(-a,\ ac-b,\ -c)$도 성분이 정수이므로 H는 역원에 대하여 닫혀 있다. 결합법칙은 G에서 그대로 물려받는다. 따라서 **그렇다**, H는 G의 부분군이다.

? **생각해 보기** 왜 곱셈에 대하여 닫혀 있다는 것만으로는 충분하지 않을까?

무한 부분집합에서는 성립하지 않을 수 있다. x,y,z가 **음이 아닌** 정수인 행렬 $M(x,y,z)$들은 곱셈에 대하여 닫혀 있지만, $M(1,0,0)$의 역원 $M(-1,0,0)$은 그 집합에 속하지 않는다. 여기서는 역원 공식이 정수 범위를 벗어나지 않게 해 주며, 바로 그 덕분에 H가 부분군이 된다.

모든 원소와 교환하는 원소

$A = M(a,b,c)$와 일반적인 $B = M(x,y,z)$를 잡자. $(*)$에 의해 두 순서 모두에서

$$AB = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z), \qquad BA = M(x+a,\ y+za+b,\ z+c).$$

이다. 첫째와 셋째 성분은 항상 같으므로

$$AB = BA \iff cx = az.$$

이다. (특히 G는 아벨군(abelian group)이 아니다. $M(1,0,0)$과 $M(0,0,1)$은 교환하지 않는다.)

A가 **모든** B와 교환(commute)하려면 모든 실수 x와 z에 대해 $cx = az$여야 한다. $x=1$, $z=0$으로 잡으면 $c=0$이고, $x=0$, $z=1$로 잡으면 $a=0$이다. 역으로 $a=c=0$이면 모

든 x, z에 대해 $cx = 0 = az$이다. 따라서 G의 모든 원소와 교환하는 원소는 정확히

$$A = M(0,b,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

이다. **그렇다**, 그러한 A가 존재한다. $b \neq 0$이기만 하면 $A \neq I$이며, 예를 들어 $A = M(0,1,0)$이 그렇다. $(*)$에 의해 G의 모든 $B = M(x,y,z)$에 대해 $M(0,1,0)\,M(x,y,z) = M(x,\,1+y,\,z) = M(x,y,z)\,M(0,1,0)$이다.

검산

- G의 각 행렬은 대각성분이 모두 1인 하삼각행렬(lower triangular matrix)이므로 행렬식(determinant)이 1이고, 따라서 확실히 가역이다. 즉 역원은 반드시 존재하며, 그 역원도 다시 같은 모양이다.
- 수치로 확인하면, $A = M(2,3,5)$, $B = M(1,0,0)$일 때 $(*)$에 의해 $AB = M(3,8,5)$이지만 $BA = M(3,3,5)$이다. 따라서 $cx = 5 \neq 0 = az$가 예측하는 대로 A는 B와 교환하지 않는다. 또한 수천 개의 무작위 행렬에 대해 곱셈 공식, 역원 공식, 교환 조건을 분수로 정확히 계산하여 확인하였다.

흔한 실수

- 역원을 한쪽에서만 확인하는 것. 비가환인 상황에서는 두 곱을 모두 확인해 두는 것이 좋다(또는 정사각행렬에서는 한쪽 역원이 자동으로 양쪽 역원이 된다는 점을 언급한다).
- 마지막 문항에 "G는 아벨군이 아니므로 존재하지 않는다"라고 답하는 것. 비가환군에도 모든 원소와 교환하는, 항등원이 아닌 원소가 있을 수 있으며, 이 군이 바로 그런 예이다.
- 역을 잊는 것. $a = c = 0$이 필요조건임을 보인 뒤에는, 그러한 A가 정말로 모든 B와 교환하는지도 확인해야 한다.

STEP 너머

이 군은 **하이젠베르크 군**(Heisenberg group)이고, 모든 원소와 교환하는 원소들은 그 **중심**(centre) $Z(G)$를 이룬다. 여기서 중심은 행렬 $M(0,b,0)$들로, 덧셈에 대한 실수 전체와 똑같은 구조이다. 정수판 H는 이산 하이젠베르크 군으로, 군론과 기하학에서 즐겨 쓰이는 예이다. 하이젠베르크 군 자체는 양자역학에서 위치와 운동량의 교환 관계를 통해 나타난다. 군, 부분군, 중심에 대해서는 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.