풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 8

순수수학 • 벡터와 코시-슈바르츠 부등식

STEP III 견본 문제지, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q8

핵심 아이디어

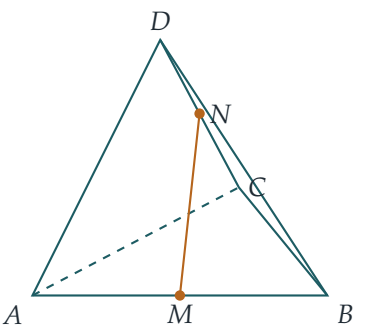
소문항 (i)에서는 네 꼭짓점에 위치벡터(position vector)를 준다. 필요한 길이는 모두 이 벡터들을 간단히 결합한 것의 크기(modulus)이고, 길이의 제곱은 전개할 수 있는 내적(dot product)이다. 그러면 양변이 같은 식으로 정리되고, 계산의 대부분은 대칭성(symmetry)이 정리해 준다. 소문항 (ii)에서는 좌변이 고정된 벡터 $(3,2,6)$과의 내적처럼 보이는데, 이 벡터의 길이는 정수이다. 이것이 바로 코시-슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality)이 쓰이는 상황이다.

풀이

소문항 (i)

사면체(tetrahedron)를 $ABCD$라 하고, 임의의 원점에 대한 위치벡터를 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$라 하자. 여섯 모서리는 맞모서리(opposite edges, 공통 꼭짓점이 없는 두 모서리) 세 쌍으로 나뉜다.

$$AB\text{와}CD, \qquad AC\text{와}BD, \qquad AD\text{와}BC.$$



AB, CD 쌍의 경우 중점(midpoint)은 $M = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$와 $N = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$이므로

$$MN^2 = \tfrac{1}{4}\,|\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.$$

나머지 두 중점연결선도 같은 방법으로 구하므로, 세 중점연결선의 제곱의 합의 네 배는

$$S = |-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2.$$

$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$를 이용하여 각 항을 전개한다. 각 항은 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2$에 교차항 $\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$를 더한 것이 되며, 그 항에서 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 부호가 같으면 교차항의 부호는 양이다.

? **생각해 보기** 세 항에 걸쳐 교차항을 모두 더하면 어떻게 되는가?

꼭짓점 쌍 하나, 예컨대 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$를 잡자. 이 둘은 첫째 항에서는 부호가 같고 나머지 두 항에서는 부호가 반대이므로, 교차항의 합은 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$이다. 모든 쌍에 대해 같은 결과가 성립한다. 세 항은 각각 네 꼭짓점을 두 쌍(한 꼭짓점 쌍과 그 맞은편 쌍)으로 나누고, 모든 꼭짓점 쌍은 세 항 가운데 정확히 한 항에서만 부호가 같기 때문이다. 따라서

$$S = 3(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2) - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}).$$

이제 모서리를 보자. 예를 들어 $AB^2 = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$이다. 여섯 모서리 전체에 대해 더하면, 각 꼭짓점은 세 모서리 위에 있으므로 각 $|\mathbf{a}|^2$는 세 번 나타나고, 각 쌍은 $-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$를 한 번씩 준다.

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 = 3\sum|\mathbf{a}|^2 - 2\sum_{\text{쌍}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = S.$$

따라서 모서리의 제곱의 합은 맞모서리의 중점을 잇는 세 선분의 제곱의 합의 네 배와 같다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

다음과 같이 놓자.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3x+2y+6,$$

이때 $|\mathbf{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$이고 $|\mathbf{b}| = \sqrt{x^2+y^2+1}$이다. 모든 실수는 그 절댓값보다 크지 않으므로

$$3x+2y+6 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| = 7\sqrt{x^2+y^2+1},$$

이고, 이것이 구하는 부등식이다.

등호 조건. 두 단계 모두에서 등호가 성립해야 한다.

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$이고 $|\cos\theta| = 1$이어야 하므로, $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 평행(parallel)할 때, 그리고 그때에만 성립한다. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이므로 이는 어떤 λ에 대해 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$라는 뜻이다. 셋째 성분에서 $1 = 6\lambda$이므로 $\lambda = \frac{1}{6}$이고 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$이다.
- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$이려면 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$이어야 한다. 여기서는 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|^2 = \frac{49}{6} > 0$이므로 이 조건도 성립한다.

직접 확인해 보면, $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$에서 좌변은 $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 6 = \frac{49}{6}$이고 우변은 $7\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1} = 7 \cdot \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$이다. 따라서 등호는 다음과 같을 때, 그리고 그때에만 성립한다.

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{3}.$$

검산

- 모서리의 길이가 1인 정사면체(regular tetrahedron)에서 여섯 모서리의 제곱의 합은 6이다. 이 정사면체를 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 정육면체의 꼭짓점에 하나씩 건너 배치하면, 각 중점연결선은 정육면체의 마주 보는 면의 중심을 이으므로 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고, $4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$이다.
- 무작위로 만든 사면체 10^4개에 대한 수치 실험에서 항등식은 반올림 오차 범위 안에서 일치했다. (ii)의 경우, $7\sqrt{x^2+y^2+1} - (3x+2y+6)$은 무작위로 고른 2×10^5개의 점에서 모두 양수였고, 촘촘한 격자에서의 최솟값은 $(0.5, 0.335)$에서 나타났는데, 이는 값이 0이 되는 점 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$에 가깝다.

흔한 실수

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 단계를 빠뜨리거나, 등호 조건에서 이를 무시하는 실수. 여기서는 $\lambda > 0$이므로 문제가 생기지 않지만, 반드시 확인해야 한다. $\lambda < 0$이면 양변의 부호가 서로 달라진다.
- $(3,2,6)$과 $(x,y,1)$을 쓰면서 $|\mathbf{a}|$를 7이 아닌 다른 값으로 잡는 실수. 이 문제는 $3^2 + 2^2 + 6^2$이 완전제곱수(perfect square)가 되도록 만들어져 있다.

STEP 너머

소문항 (i)은 평행사변형 법칙(parallelogram law) $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$의 3차원 판이라 할 수 있다. 실제로 세 중점연결선은 무게중심(centroid)에서 만나며 서로를 이등분한다. 소문항 (ii)는 코시-슈바르츠 부등식으로, 이 부등식은 함수 공간을 포함한 모든 내적공간(inner-product space)에서 성립하며, 함수 공간에서는 적분의 상계를 준

다. 두 아이디어를 더 넓은 맥락에서 살펴보려면 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.