풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 7

순수수학 • 계수 내림법

> **STEP III 견본 문제지, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q7

핵심 아이디어

2계 선형 방정식에 x^2y'', xy', y가 들어 있을 때는 x의 거듭제곱을 대입해 보는 것이 자연스럽다. 그러면 각 항이 x^α의 상수배가 되어, 방정식은 α에 대한 조건으로 바뀐다. 해 하나 y_1을 알면 $y = y_1 v$로 놓는 것이 **계수 내림법**(*reduction of order*)이다. 이때 v 자체가 들어 있는 항은 소거되고, v'에 대한 1계 방정식만 남는다.

풀이

거듭제곱 꼴의 해

$y = x^\alpha$를 대입해 보자($x > 0$으로 두어 임의의 실수 α에 대해 x^α가 정의되도록 한다). 그러면 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$이므로

$$xy' - y = (\alpha - 1)x^\alpha, \qquad x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha.$$

이를 대입하면

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = [\alpha(\alpha-1) + (x-2)(\alpha-1)]x^\alpha = (\alpha-1)(\alpha + x - 2)\,x^\alpha.$$

이 식이 **모든** x에 대해 0이 되려면 괄호 부분이 항등적으로 0이어야 한다. 인수 $\alpha + x - 2$는 x에 따라 달라지므로 항등적으로 0일 수 없다. 따라서 $\alpha = 1$이다.

그러므로 $y = x$가 해이며, 이는 직접 확인할 수도 있다. $y'' = 0$이고 $xy' - y = x - x = 0$이기 때문이다. 그러면 임의의 상수배 $y = Ax$도 해가 되는데, 해가 "x^α에 비례한다"는 말은 이런 뜻이다.

일반해

힌트에 따라 $y = xv$로 놓자. 여기서 v는 x의 함수이다. 그러면

$$y' = v + xv', \qquad y'' = 2v' + xv'',$$

이고, 방정식에 나타나는 결합은 깔끔하게 정리된다.

$$xy' - y = xv + x^2v' - xv = x^2v'.$$

이를 방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(2v' + xv'') + (x-2)x^2v' \\ &= x^2(xv'' + 2v' + xv' - 2v') \\ &= x^3\,(v'' + v'). \end{aligned}$$

? **생각해 보기** (미분하지 않은) v 자체가 들어 있는 항은 왜 모두 사라졌을까?

$y = x$가 해이기 때문이다. v가 상수라면 $y = xv$는 x의 상수배이므로 좌변이 0이 된다. 따라서 v'과 v''이 들어 있는 항만 남을 수 있다. 계수 내림법이 통하는 이유가 바로 이것이며, 계산을 검토하는 데에도 유용하다.

0을 포함하지 않는 구간에서는 x^3으로 나눌 수 있으므로

$$v'' + v' = 0.$$

이는 $w = v'$에 대한 1계 방정식 $w' = -w$이므로, 상수 B에 대해 $w = Be^{-x}$이다. 한 번 더 적분하면(부호는 상수에 흡수시킨다)

$$v = A + Be^{-x}.$$

따라서 일반해(general solution)는

$$\boxed{y = Ax + Bxe^{-x}}$$

이고, A와 B는 임의의 상수이다. 2계 선형 방정식의 일반해라면 마땅히 그래야 하듯 임의의 상수가 두 개 들어 있으며, 두 부분 x와 xe^{-x}는 서로의 상수배가 아니다.

새로 얻은 부분을 직접 확인해 보자. $y = xe^{-x}$이면 $y' = (1-x)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$이므로

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = (x-2)e^{-x}[x^2 + x(1-x) - x] = 0.$$

$x = 0$에 관한 참고. y''의 계수는 $x = 0$에서 0이 되는데, 이 때문에 0이 아닌 곳에서만 x^3으로 나누었다. 원칙적으로는 $x > 0$과 $x < 0$에서 서로 다른 상수를 택할 수 있다. 그러나 이런 함수는 모두 $y(0) = 0$, $y'(0^{\pm}) = A_{\pm} + B_{\pm}$, $y''(0^{\pm}) = -2B_{\pm}$를 만족하므로, y가 0에서 두 번 미분가능하려면 $B_+ = B_-$이어야 하고, 그러면 $A_+ = A_-$이다. 따라서 $y = Ax + Bxe^{-x}$는 실수 전체에서도 일반해이다.

검산

- 위에서처럼 $y = x$와 $y = xe^{-x}$를 각각 방정식에 다시 대입하면 모두 0이 된다.
- 수치적 확인: $y(1) = y_0$, $y'(1) = y_1$로 두고 $x = 1$에서부터 방정식을 단계적으로 풀면, 공식은 $A = y_1$, $B = (y_0 - y_1)e$를 예측한다. $y_0 = 2$, $y_1 = 1$이면 $y(4) = 4 + 4e^{-3} \approx 4.199$이고, 4차 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 적분으로 계산하면 여러 무작위 초깃값에 대해 10^{-8}보다 작은 오차로 일치한다.

흔한 실수

- 인수 $(\alpha + x - 2)$로부터 $\alpha = 2 - x$라고 결론 내리는 것. α는 상수여야 하므로 이 근은 허용되지 않는다.
- $y = xv$일 때 y''을 잘못 계산하는 것($v' + xv''$이 아니라 $2v' + xv''$이다). v가 들어 있는 항이 소거되지 않는다면 미분 과정이 잘못된 것이다.
- $v' = Be^{-x}$에서 멈추거나, v를 구하려고 적분할 때 두 번째 상수를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

계수 내림법은 임의의 2계 선형 방정식 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$에 적용된다. 해 하나 y_1이 주어지면 $y = y_1 v$로 치환할 때 언제나 v'에 대한 1계 선형 방정식이 얻어지고, 두 번째 해는 y_1과 p를 포함하는 적분으로 나타낼 수 있다. 이는 론스키안(Wronskian) 및 아벨(Abel)의 공식과 밀접하게 연결되어 있으며, $x = 0$과 같은 점에서 x^α를 대입해 보는 것은 급수해를 구하는 프로베니우스 방법(Frobenius method)의 첫 단계이다. 이 내용은 모두 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.