풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수 점화 공식

> **STEP III 견본 문제지, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q6

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u$는 자연스럽게 $\sinh u$와 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+2}u$의 곱으로 나뉘고, 두 번째 인수는 상수배를 제외하면 $\operatorname{sech}^{n+1}u$의 도함수(derivative)이다. 그러므로 부분적분(integration by parts)이 가장 먼저 떠오르는 방법이다. 점화식(reduction formula)을 얻을 때는 항등식 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$을 이용하여 같은 적분을 두 I의 차로 다시 쓸 수 있다.

풀이

적분 항등식

먼저 앞으로 필요한 도함수를 구한다. $\operatorname{sech} u = (\cosh u)^{-1}$이므로 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{sech}^{n+1}u = -(n+1)\cosh^{-n-2}u\,\sinh u = -(n+1)\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u.$$

따라서 다음과 같이 놓고 부분적분한다.

$$f = \sinh u, \qquad g' = \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u, \qquad \text{이므로} \qquad f' = \cosh u, \qquad g = -\frac{\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}.$$

그러면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u\,\mathrm{d}u &= \left[-\frac{\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}\right]_0^\infty + \frac{1}{n+1}\int_0^\infty \cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{n+1}\left[\tanh u\operatorname{sech}^{n}u\right]_0^\infty + \frac{1}{n+1}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n}u\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sinh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \tanh u \operatorname{sech}^n u$와 $\cosh u \operatorname{sech}^{n+1} u = \operatorname{sech}^n u$를 이용하였다.

> ? **생각해 보기** 경계항은 왜 사라지며, $n > 0$이라는 조건은 어디에서 쓰이는가?

$u = 0$에서 $\tanh 0 = 0$이다. $u \to \infty$일 때 $\tanh u \to 1$이고 $\operatorname{sech} u = 2/(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}) \to 0$이므로, $n > 0$이기 때문에 $\operatorname{sech}^n u \to 0$이다. ($n = 0$이면 이 항은 0이 아니라 1로 수렴한다.) 같은 사실, 곧 $\operatorname{sech}^n u < 2^n \mathrm{e}^{-nu}$로부터 $n > 0$일 때 I_n이 수렴(converge)함도 알 수 있다. 따라서 경계항은 0이고

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} I_n,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

점화식

이제 같은 적분을 다른 방법으로 계산한다. $\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$이므로

$$\operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u = \operatorname{sech}^{n+2} u \cosh^2 u - \operatorname{sech}^{n+2} u = \operatorname{sech}^n u - \operatorname{sech}^{n+2} u.$$

($n > 0$이므로) 두 부분 모두 $[0, \infty)$에서의 적분이 수렴하고, 따라서

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \, \sinh^2 u \, \mathrm{d}u = I_n - I_{n+2}.$$

첫 번째 결과와 비교하면

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{n}{n+1} I_n,$$

즉 $(n+1) I_{n+2} = n I_n$이 되어 원하는 결과를 얻는다.

I_6의 값

점화식은 n을 2씩 늘리므로 n이 짝수인 시작값이 필요하다. 가장 쉬운 것은

$$I_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 u \, \mathrm{d}u = \Big[\tanh u\Big]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$$

이다. (I_0에서 시작할 수는 없다. I_0은 발산(diverge)하며, $n = 0$을 점화식에 대입하면 $I_2 = 0$이라는 틀린 결론이 나온다. 바로 이 지점에서 $n > 0$이 중요하다.) 그러면

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{2}{3},$$
$$I_6 = \frac{4}{5} I_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

따라서

$$I_6 = \frac{8}{15}.$$



검산

- 수열 $I_2, I_4, I_6 = 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$는 감소하며, 이는 당연하다. $0 < \operatorname{sech} u \leq 1$이므로 거듭제곱의 지수가 클수록 값이 작다.
- 대신 $I_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech} u \, \mathrm{d}u = \left[2 \arctan(\mathrm{e}^u)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$에서 시작하면 점화식에 의해 $I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$를 얻으며, 이는 직접 수치적분한 결과와 일치한다.
- $[0, 60]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 $I_6 \approx 0.5333333$으로 $\frac{8}{15}$와 일치한다. 적분 항등식과 점화식 모두 $n = 0.5$, $n = 2.5$처럼 정수가 아닌 n에 대해서도 수치적으로 성립함을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \operatorname{sech}^{n+1} u$에서 부호나 인수 $n+1$을 틀리는 실수. $u > 0$에서 $\operatorname{sech} u$는 감소하므로 도함수는 음수여야 한다.
- 무한대에서 경계항이 사라지는 이유를 밝히지 않는 실수. 조건 $n > 0$이 필요한 곳은 바로 이 한 군데이다.
- I_2를 계산하지 않은 채 답을 $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_2$로 쓰는 실수.

STEP 너머

이와 같은 점화식은 월리스 공식(Wallis's formula)과 같은 구조를 가진다. $t = \tanh u$로 치환하면(또는 구데르만 치환(Gudermannian substitution)인 $\sin\theta = \tanh u$로 치환하면) I_n은 $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta \, \mathrm{d}\theta$가 되고, 점화식은 바로 월리스의 점화식이 된다. 대학에서는 이 적분들이 베타 함수(Beta function)의 값 $I_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$로 다시 등장하며, 이를 통해 점화식이 모든 실수 $n > 0$으로 확장된다. 또한 경계항을 신중하게 다룬 과정은 이상적분(improper integral) 이론의 출발점이다. 엄밀한 설명은 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 이런 형식의 문제를 더 많이 풀어 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.