풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 5

순수수학 • 방정식의 근의 개수 세기

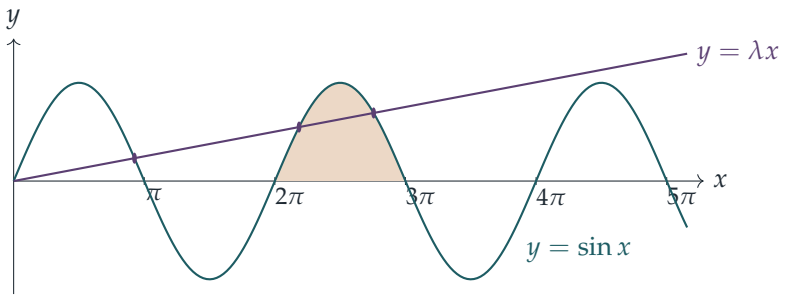
STEP III 견본 문제지, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q5

핵심 아이디어

직선 $y = \lambda x$와 곡선 $y = \sin x$를 함께 그려 보자. 해는 두 그래프가 만나는 점이다. 직선은 $\sin x > 0$인 곳, 즉 양의 "아치(arch)" $((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ 위에서만 곡선과 만날 수 있다. 또 각 아치에서 $\sin x$는 위로 볼록한 오목 함수(concave function)이므로, 직선은 (원점에서 시작하는 첫 번째 아치를 제외하면) 한 아치와 두 번 만나거나 전혀 만나지 않는다. ϵ이 작을 때의 근삿값은 매클로린 급수(Maclaurin series) $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$으로 구한다.



(여기서는 $\lambda = 0.08$이다. 첫 번째 아치에서 한 번, 색칠한 두 번째 아치에서 두 번 만나고, 세 번째 아치가 꼭대기에 이르기 전에 직선이 이미 높이 1보다 위로 올라가므로 $N = 3$이다.)

풀이

소문항 (i)

$\lambda > 1$이면 해가 없다. 곡선 $y = \sin x$의 기울기(gradient)는 $\cos x \leq 1$이고, 곡선은 원점을 지나며, 직선 $y = x$는 원점에서 이 곡선의 접선(tangent)이다. $x > 0$이면 $\sin x < x$이

다(함수 $x - \sin x$는 0에서 값이 0이고, 도함수(derivative) $1 - \cos x \geq 0$은 고립된 점에서만 0이 되므로 이 함수는 강한 증가 함수(strictly increasing function)이다). 그래프로 보면, $x > 0$에서 곡선은 접선 $y = x$보다 엄격히 아래에 있고, $\lambda > 1$이면 그 범위에서 직선 $y = \lambda x$는 $y = x$보다 위에 있다. 따라서

$$\sin x < x < \lambda x \qquad \text{모든} x > 0,$$

이므로 0이 아닌 해는 없다.

$\lambda = 1 - \epsilon^2$인 경우. $x > 0$에서 방정식은

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \epsilon^2.$$

과 동치이다. 먼저 해가 존재하고 그것이 유일함을 보이자. $(0, \pi]$에서 함수 $\frac{\sin x}{x}$는 연속(continuous)이고, $x \to 0^+$일 때 1에 가까워지며, $x = \pi$에서 값이 0이다. 따라서 $(0, \pi)$의 어딘가에서 값 $1 - \epsilon^2$을 갖는다. 또 이 구간에서 이 함수는 강하게 감소하므로(원점과 오목한 아치 위의 점을 잇는 직선은 그 점이 아치를 따라 움직일수록 완만해진다) 그런 점은 단 하나뿐이다. $x \geq \pi$에서는 더 이상 해가 없다. ϵ이 작으므로 $\lambda x \geq (1 - \epsilon^2)\pi > 1 \geq \sin x$이기 때문이다.

이제 해의 위치를 구하자. $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$를 이용하면

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots = 1 - \epsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots = \epsilon^2.$$

생각해 보기 왜 x^4 항을 버려도 될까? 아직 x가 작다는 것을 알지 못하는데 말이다.

$\epsilon \to 0$이면 $\frac{\sin x}{x} \to 1$이고, $\frac{\sin x}{x}$는 $(0, \pi)$에서 1부터 강하게 감소하므로 근은 0으로 수렴해야 한다. 따라서 ϵ이 작으면 근도 작고, 그러면 x^4은 x^2에 비해 무시할 수 있다. 최저차 근사로 $x^2/6 = \epsilon^2$이므로

$$x \approx \epsilon\sqrt{6}.$$

이다. (다음 항까지 남겨 $x^2 \approx 6\epsilon^2 + \frac{6}{120}(6\epsilon^2)^2$로 두면, 더 정밀한 근사 $x \approx \epsilon\sqrt{6}\left(1 + \frac{3}{20}\epsilon^2\right)$을 얻는다.)

소문항 (ii)

$g(x) = \sin x - \lambda x$라 하면, 해는 $x > 0$인 g의 영점이다. $x > 0$에서 $\lambda x > 0$이므로 모든 해에서 $\sin x > 0$이고, 따라서 모든 해는 다음 아치 중 하나 위에 있다.

$$A_n = \big((2n-2)\pi, (2n-1)\pi\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

첫 번째 아치. 원점에서 직선의 기울기는 $\lambda < 1$로 곡선의 기울기보다 작으므로, 직선은 곡선보다 아래에서 출발한다. $x = \pi$에서는 직선이 위에 있다($\lambda\pi > 0 = \sin\pi$). A_1에서

$\sin x$는 오목하고 직선은 곧으므로, 둘은 이 구간에서 정확히 한 번 만난다. 따라서 A_1에는 해가 정확히 하나 있고, 그것이 x_1이며 $0 < x_1 < \pi$이다.

그다음 아치들. $n \geq 1$일 때 $A_{n+1} = (2n\pi, (2n+1)\pi)$에서 $g''(x) = -\sin x < 0$이므로 g는 오목하고 영점은 많아야 두 개이다. 아치의 양 끝에서 $\sin x = 0 < \lambda x$이므로 그곳에서 $g < 0$이다. g의 최댓값은 $g'(x) = \cos x - \lambda = 0$인 점, 곧 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$에서 나타나며, $\lambda > 0$이면 $\arccos\lambda < \frac{\pi}{2}$이므로 $c_n < (2n + \frac{1}{2})\pi$이다. 따라서 g는 $(2n\pi, c_n)$에서 증가하고 $(c_n, (2n+1)\pi)$에서 감소하므로 다음이 성립한다.

- $g(c_n) < 0$이면 직선은 그 아치와 만나지 않는다.
- $g(c_n) = 0$이면 직선은 아치에 한 점에서 접한다.
- $g(c_n) > 0$이면 해가 정확히 두 개 있으며, 하나는 $(2n\pi, c_n)$에, 다른 하나는 $(c_n, (2n+1)\pi)$에 있다.

또한 직선이 어떤 아치와 만나지 않으면 그 뒤의 모든 아치와도 만나지 않는다. $x \in A_{n+2}$이면 $x - 2\pi \in A_{n+1}$이므로 $\sin x = \sin(x - 2\pi) < \lambda(x - 2\pi) < \lambda x$이기 때문이다.

따라서 직선이 만나는 아치는 $A_1, A_2, \ldots$부터 어떤 마지막 아치까지이고, 각각 해를 $1, 2, 2, \ldots$개씩 제공하며, 그 뒤에 접하는 점이 하나 있을 수도 있다. $N = 2R + 1$은 홀수이므로 접점은 없고, 직선은 정확히 아치 $A_1, \ldots, A_{R+1}$과 만난다. 해를 크기순으로 나열하면 아치 A_{n+1} $(1 \leq n \leq R)$은 x_{2n}과 x_{2n+1}을 포함하고

$$2n\pi < x_{2n} < c_n < (2n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad 2n\pi < x_{2n+1} < (2n+1)\pi.$$

이다. 첫 번째 부등식에서 요구된 부등식의 둘째 줄을 얻는다. x_{2n+1}을 $x_{2(n+1)-1}$로 쓰면, 두 번째 부등식과 $0 < x_1 < \pi$로부터 $m = 1, \ldots, R+1$에 대하여 $(2m-2)\pi < x_{2m-1} < (2m-1)\pi$를 얻는다. 이것이 증명할 결과이다.

N의 어림. λ가 작으면 직선은 많은 아치와 만나므로 $R \geq 1$이다. x_{2R}에서 $\lambda x_{2R} = \sin x_{2R} \leq 1$이고, 위에서 보인 대로 $x_{2R} > 2R\pi$이므로

$$2R\pi\lambda < 1.$$

이다. 한편 직선은 $A_{R+2} = \big((2R+2)\pi, (2R+3)\pi\big)$와 만나지 않는다. 이 아치의 중점 $(2R + \frac{5}{2})\pi$에서 $\sin x = 1$이므로 $\lambda(2R + \frac{5}{2})\pi > 1$이어야 한다(그렇지 않으면 그곳에서 $g \geq 0$이 되어 직선이 아치와 만난다). 두 결과를 합하면

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{5}{4} < R < \frac{1}{2\pi\lambda}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{3}{2} < N < \frac{1}{\pi\lambda} + 1.$$

이다. λ가 아주 작으면 $\frac{1}{\pi\lambda}$는 매우 크고 유계인 오차는 이에 비해 무시할 수 있으므로

$$N \approx \frac{1}{\pi\lambda}.$$

이다. 이는 직관과도 맞는다. 직선은 $x = 1/\lambda$에서 높이 1에 이르고, 그 전까지 $\sin x$의 완전한 주기가 약 $\frac{1}{2\pi\lambda}$개 있으며, 각 주기마다 교점이 두 개씩 생긴다.

검산

- $\epsilon = 0.01$ ($\lambda = 0.9999$)일 때 이분법(bisection)으로 구한 근은 0.0244953이고, $\epsilon\sqrt{6} = 0.0244949$와 비교하면 비는 1.000015로, 정확히 $1 + \frac{3}{20}\epsilon^2$ 보정과 일치한다.
- $\lambda = 0.001$일 때 컴퓨터로 찾은 근은 $N = 317$개로 $\frac{1}{\pi\lambda} \approx 318.3$과 비교되고, $\lambda = 0.01$일 때는 31.8에 대해 31개이다. 여러 λ에 대해 찾은 모든 근이 (ii)의 구간 부등식을 만족하며, N은 위의 범위 안에 있다.
- $\lambda = 1.0001, 1.1, 2, 5$에 대해서는 근이 하나도 발견되지 않았다.

흔한 실수

- 첫 번째 아치에는 x_1 하나만 있다는 점을 잊는 것. 원점도 교점이기 때문에 이 아치는 0이 아닌 해를 두 개가 아니라 하나만 제공한다.
- 아무 근거 없이 x_{2n}을 아치의 앞쪽 절반에 두는 것. 핵심은 g가 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ 이후에야 감소하기 시작하며, 이 점이 $\sin x$의 꼭대기보다 앞에 있다는 것이다.

STEP 너머

근사 $x \approx \epsilon\sqrt{6}$은 점근 전개(asymptotic expansion)의 첫 단계이며, 급수를 잘라내기 전에 근이 작아야 함을 먼저 보이는 논증은 해석학 강의에서 강조하는 바로 그런 엄밀함이다. 오목성, 단조성, 사잇값 정리(intermediate value theorem)로 해의 개수를 세는 것은 대학 1학년 해석학의 표준적인 방법이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. 이와 관련된 고전적인 문제로 $\tan x = x$가 있는데, 그 근은 $(n + \frac{1}{2})\pi$에 가까워지며 열전도와 진동 문제에 등장한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.