풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 4

순수수학 • 포물선의 접선

> **STEP III 견본 문제지, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q4

핵심 아이디어

직선이 포물선(parabola)에 접하는 것은 직선의 식을 포물선의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식이 중근(repeated root)을 가질 때이고, 그때뿐이다. 따라서 첫 번째 부분은 한 줄짜리 판별식(discriminant) 계산이며, 그 결과로 t로 매개화된 접선(tangent)들의 족을 얻는다. 두 번째 부분에서는 주어진 점에서 그은 접선들을 어떤 이차방정식을 만족하는 t의 값들로 생각한다. 그러면 L과 M에 관한 모든 것을 두 근의 합과 곱으로 나타낼 수 있고, 이것들은 계수에서 바로 얻어진다.

풀이

접선

주어진 직선에서 $x = ty - at^2$이다. 이를 $y^2 = 4ax$에 대입하면

$$y^2 = 4aty - 4a^2t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4aty + 4a^2t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y - 2at)^2 = 0.$$

이 y에 대한 이차방정식은 중근 $y = 2at$를 가지므로, 직선은 포물선과 정확히 한 점에서 만나고, 그것도 중복도(multiplicity) 2로 만난다. 즉 직선은 포물선에 접한다. (이 직선은 수평이 아니므로, 포물선과 역시 한 번만 만나는 축에 평행한 직선이 아니다. $t = 0$일 때 이 직선은 $x = 0$, 즉 꼭짓점(vertex)에서의 접선이다.) 이에 대응하는 x는 $x = t(2at) - at^2 = at^2$이므로, 접점(point of contact)은

$$(at^2,\ 2at).$$

이다. 검산으로, $y^2 = 4ax$를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 이 점에서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$이고, 이는 $ty = x + at^2$의 기울기(gradient)와 같다.

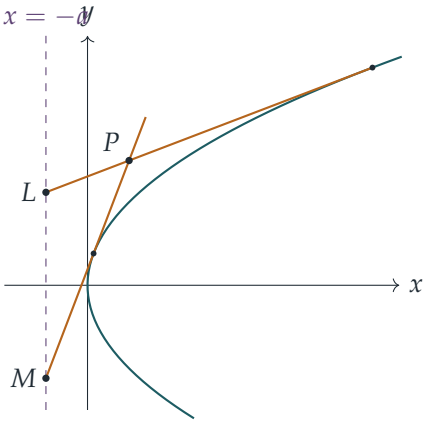
자취

포물선 위의 모든 점은 정확히 하나의 t에 대하여 $(at^2, 2at)$로 나타나므로, 모든 접선은 직선 $ty = x + at^2$ 중 하나이다. 주어진 점을 $P = (h, k)$라 하자. 매개변수가 t인 접선이 P를 지날 필요충분조건은

$$at^2 - kt + h = 0.$$

이다. 접선이 두 개이려면 서로 다른 두 실근 t_1, t_2가 필요하고, 이는 $k^2 > 4ah$ (P가 포물선의 바깥쪽에 있음)와 같다. 이때

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}, \qquad t_1 t_2 = \frac{h}{a}.$$



매개변수가 t인 접선은 준선(directrix) $x = -a$와 $ty = -a + at^2$인 곳에서 만난다. $t \neq 0$이면

$$y = a\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

이다. ($t = 0$이면 접선은 $x = 0$으로 준선과 평행하므로 교점이 없다. 이는 $h = t_1 t_2\, a = 0$일 때만 일어나므로, L과 M이 존재하려면 $h \neq 0$이어야 하고, 이때 $t_1, t_2 \neq 0$이다.) 따라서 L과 M은 $(-a,\ a(t_1 - \frac{1}{t_1}))$과 $(-a,\ a(t_2 - \frac{1}{t_2}))$이고, 두 점이 같은 수직선 위에 있으므로

$$\begin{aligned} LM &= \left|a(t_1 - t_2) - a\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\right| = \left|a(t_1 - t_2) + a\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| \\ &= |a|\,|t_1 - t_2|\left|\frac{t_1 t_2 + 1}{t_1 t_2}\right|. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** 이차방정식을 풀지 않고 $t_1 - t_2$를 어떻게 구할 수 있을까?

그 제곱은 두 근에 대한 대칭식(symmetric expression)이다.

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a} = \frac{k^2 - 4ah}{a^2}.$$

또한

$$\frac{t_1t_2+1}{t_1t_2} = \frac{h/a+1}{h/a} = \frac{h+a}{h}.$$

LM의 식을 제곱하고 대입하면

$$LM^2 = a^2 \cdot \frac{k^2-4ah}{a^2} \cdot \frac{(h+a)^2}{h^2} = \frac{(h+a)^2(k^2-4ah)}{h^2}.$$

$LM = \ell$이면 양변에 h^2을 곱하여

$$(h+a)^2(k^2-4ah) = \ell^2h^2,$$

을 얻는다. 따라서 $P=(h,k)$는 요구한 대로 $(x+a)^2(y^2-4ax) = \ell^2x^2$ 위에 있다.

검산

- 그림에서처럼 $a=1$, $P=(1,3)$으로 두자. 매개변수는 $t^2-3t+1=0$을 만족하므로 $t=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$이고, $t-\frac{1}{t}=\pm\sqrt{5}$이다($t_1t_2=1$이므로 $1/t_1=t_2$이기 때문이다). 따라서 $LM=2\sqrt{5}$, $LM^2=20$이고, 공식으로도 $(1+1)^2(9-4)/1^2=20$이다.
- 준선 위의 점, 즉 $h=-a$인 경우: 공식에 따르면 $LM=0$이다. 실제로 이러한 점에서 그은 접선들은 준선과 그 점 자체에서 만나므로 $L=M$이다.
- 14,000개가 넘는 무작위 a, h, k에 대하여 접선을 독립적인 방법($hm^2-km+a=0$을 만족하는 직선 $y=k+m(x-h)$)으로 구해 보았더니, 계산한 LM^2이 매번 $(h+a)^2(k^2-4ah)/h^2$과 일치했다. 예를 들어 $a=1$, $P=(2,5)$이면 두 방법 모두 $LM^2=38.25$를 준다.

흔한 실수

- 접선의 매개변수 방정식을 거꾸로 사용하는 것: P를 고정하고 t를 미지수로 보면 h와 k에 대한 방정식이 아니라 이차방정식 $at^2-kt+h=0$을 얻는다.
- $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}=\frac{t_1-t_2}{t_1t_2}$라고 쓰는 것: 실제로는 $\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$이며, 바로 이 부호 때문에 두 항이 상쇄되지 않고 더해진다.

STEP 너머

한 점에서 이차곡선(conic)에 그은 접선들과 그 접점들을 잇는 직선(그 점의 **극선**(*polar*))은 사영기하학(projective geometry)의 출발점이다. 사영기하학에서는 극(pole), 극선, 준선이 하나의 그림 안에 들어맞는데, 준선은 초점(focus)의 극선이다. 여기서처럼 근을 대칭함수를 통해 다루는 것은 방정식론(theory of equations)과 갈루아(Galois) 이론으로 나아가

는 첫걸음이기도 하다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 이런 형식의 좌표기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.