풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 3

순수수학 • 복소수의 삼각부등식

STEP III 견본 문제지, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q3

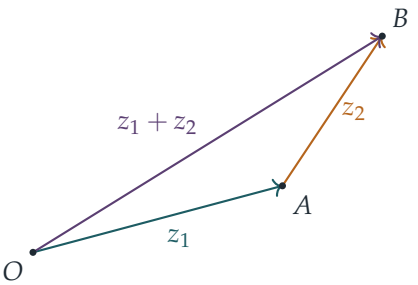
핵심 아이디어

이 부등식은 삼각부등식(triangle inequality)이다. 즉 삼각형의 어느 한 변도 나머지 두 변의 길이의 합보다 길지 않다. 이를 반복해서 적용하면 합 전체의 절댓값(modulus)을 각 항의 절댓값의 합으로 위에서 누를 수 있다. $|z| \leq \frac{1}{3}$일 때 방정식 좌변의 절댓값이 항상 1보다 엄격히 작다면 좌변은 결코 1이 될 수 없으며, 이 상계를 주는 것이 등비급수(geometric series)이다.

풀이

기하학적 의미

복소평면(Argand diagram)에서 z_1을 원점 O에서 점 A로의 변위로, z_2를 A에서 점 B로의 변위로 생각하자. 그러면 $z_1 + z_2$는 O에서 B로 곧바로 가는 변위이다.



삼각형 OAB의 세 변의 길이는 $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$이다. 이 부등식은 O에서 B로 곧바로 가는 길이 A를 거쳐 가는 길보다 결코 길지 않다는 것, 즉 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두

변의 길이의 합 이하라는 것을 말한다. 등호는 삼각형이 납작해져 A가 선분 OB 위에 놓일 때, 곧 z_1과 z_2가 같은 방향을 가리킬 때(하나가 다른 하나의 음이 아닌 실수배이거나, 둘 중 하나가 0일 때) 그리고 그때에만 성립한다.

수학적 귀납법(induction)에 의해 유한 개의 항에 대해서도 같은 사실이 성립한다.

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \leq |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

왜냐하면 $|w_1 + \cdots + w_{k+1}| \leq |w_1 + \cdots + w_k| + |w_{k+1}|$이기 때문이다. 기하학적으로 보면, n개의 직선 걸음으로 이루어진 경로의 길이는 시작점에서 끝점까지의 직선 거리 이상이다.

$|z| \leq \frac{1}{3}$인 해는 없다

$|z| \leq \frac{1}{3}$이고 모든 i에 대해 $|a_i| \leq 2$라고 하자. 확장된 삼각부등식과 $|ab| = |a||b|$를 차례로 이용하면

$$\begin{aligned}\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\leq |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\leq 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 두 번째 단계에서는 각 k에 대해 $|a_i| \leq 2$와 $|z|^k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$를 이용했다(관련된 양이 모두 음이 아니므로 항별로 상계를 줄 수 있다).

괄호 안은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 유한 등비급수이다.

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(1 - 3^{-n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} < 1.$$

> ? **생각해 보기** 위의 각 단계에서는 $\leq$만 사용했는데, 왜 부등식이 엄격하게 성립하는가?

엄격한 부등호는 삼각부등식이 아니라 급수에서 나온다. 합이 n개의 항에서 멈추므로, 무한급수의 합 1에 정확히 $3^{-n} > 0$만큼 못 미친다. 따라서 a_i가 무엇이든, 그리고 $|z| \leq \frac{1}{3}$인 z가 무엇이든

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \leq 1 - 3^{-n} < 1.$$

이다. 그런데 z가 해라면 좌변은 $|1| = 1$이 되어야 한다. 이는 모순이므로, 구하는 대로 이 방정식은 $|z| \leq \frac{1}{3}$인 해를 갖지 않는다.

검산

- 가장 나쁜 경우는 $a_1 = \cdots = a_n = 2$이고 $z = \frac{1}{3}$일 때로, 이때 모든 부등식이 등식이 되어 좌변은 $1 - 3^{-n}$이다. $n = 10$이면 이 값은 $0.99998\ldots$로, 1에 아주 조금 못 미친다.

- 상수 $\frac{1}{3}$은 더 개선할 수 없다. 모든 $a_i = 2$일 때 실함수 $2(x + x^2 + \cdots + x^n) - 1$은 $x = \frac{1}{3}$에서 음수이고, n이 크면 $\frac{1}{3}$을 살짝 넘는 곳에서 양수이므로, $\frac{1}{3}$에 원하는 만큼 가까운 실근이 존재한다.
- $n \leq 30$, $|a_i| \leq 2$인 a_i, $|z| \leq \frac{1}{3}$인 z를 무작위로 200 000번 골라 수치 실험을 해 보았는데, 좌변의 절댓값이 1 이상이 된 경우는 한 번도 없었다.

흔한 실수

- 무한급수로 상계를 주어 ≤ 1을 얻는 것. 이것으로는 등호가 성립할 가능성을 배제할 수 없다. 엄격한 부등식이 필요하며, 그것은 급수가 유한하다는 데서 나온다.
- 이유를 밝히지 않고 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| \leq |a_1 z| + \cdots$라고 쓰는 것. 이것은 n개의 항으로 확장된 삼각부등식이며, 바로 그 때문에 첫 번째 소문항이 있는 것이다.

STEP 너머

이것은 **근이 없는 영역**(*root-free region*)의 가장 간단한 예이다. 즉 다항식의 계수에 대한 상계가 그 근들을 어떤 원판 밖에 머물게 한다. 같은 어림을 반대 방향으로 적용하면 $z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0$의 모든 근의 절댓값이 $1 + \max |c_k|$보다 작다는 코시(Cauchy)의 상계를 얻으며, 복소해석학(complex analysis)에서는 루셰(Rouché)의 정리가 이와 같은 논증을 원 안에 있는 근의 개수를 정확히 세는 방법으로 바꾸어 준다. 아름답도록 기하학적인 설명을 원한다면 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.