풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 2

순수수학 • 이항 부등식과 극한

> **STEP III 견본 문제지, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q2

핵심 아이디어

$x > 0$인 $y = 1 + x$로 쓰면 y의 거듭제곱은 이항전개(binomial expansion)가 되고, 이 전개의 모든 항은 음이 아니다. 따라서 한 항만 남기고 나머지를 모두 버려도 여전히 하계(lower bound)를 얻는다. x에 대한 항을 남기면 n처럼 커지는 하계를 얻고, 이것은 어떤 고정된 K보다도 커진다. 그런데 n으로 나눈 뒤에도 K를 넘으려면 n^2처럼 커지는 하계가 필요하므로, 대신 x^2에 대한 항을 남긴다.

풀이

부등식(inequality)

$x \geq 0$이고 n이 양의 정수라 하자. 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + x^n.$$

$x \geq 0$이므로 처음 두 항 이후의 모든 항은 음이 아니고, 따라서

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

마지막 부등식이 등호 없이 성립하는 것은 1 때문이며, 바로 이 덕분에 $x = 0$일 때에도(이 때 부등식은 $1 > 0$이 된다) 결과가 성립한다.

y^n이 결국 K를 넘음을 이끌어내기

$y > 1$이라 하고 $x = y - 1$로 두면 $x > 0$이다. 앞 부분에 의해 모든 양의 정수 n에 대해

$$y^n = (1+x)^n > n(y-1).$$

$K \leq 0$이면 할 일이 없다. 모든 n에 대해 $y^n > 0 \geq K$이므로 $N = 1$이면 된다. $K > 0$이면 다음을 만족하는 정수 N을 고른다.

$$N > \frac{K}{y-1},$$

$y - 1 > 0$이므로 우변은 고정된 수이고, 따라서 이런 N을 고를 수 있다. 그러면 모든 정수 $n \geq N$에 대해

$$y^n > n(y-1) \geq N(y-1) > K,$$

이며, 가운데 단계에서 $y - 1 > 0$을 사용했다. 이것이 바로 필요한 결과이다. 하계 $n(y-1)$이 n에 따라 증가하므로, 같은 N이 $n = N$일 때뿐 아니라 **모든** $n \geq N$에 대해 통한다는 점에 주의하라.

y^n/n이 결국 K를 넘음을 보이기

하계 $y^n > n(y-1)$로부터는 $y^n/n > y - 1$밖에 얻지 못하는데, 이는 고정된 수이므로 큰 K에 대해서는 쓸모가 없다. n보다 빠르게 커지는 y^n의 하계가 필요하다.

생각해 보기 이번에는 이항전개의 어느 항을 남겨야 할까?

x^2 항을 남긴다. $x = y - 1 > 0$이면 전개의 모든 항이 양수이므로, 모든 양의 정수 n에 대해

$$y^n = (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

($n = 1$일 때는 x^2 항이 없지만, 마지막 부등식의 우변이 0이므로 여전히 성립한다.) $n > 0$으로 나누면

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2}.$$

이제 우변은 n이 커짐에 따라 한없이 커지며, 이것이 바로 필요한 것이다. $K \leq 0$이면 $y^n/n > 0$이므로 $N = 1$이면 된다. $K > 0$이면 다음을 만족하는 정수 N을 고른다.

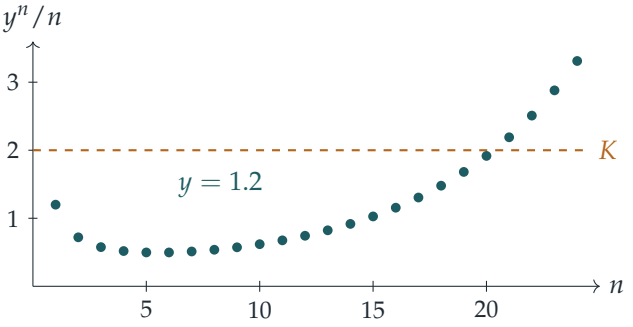
$$N > 1 + \frac{2K}{(y-1)^2}.$$

그러면 모든 정수 $n \geq N$에 대해 $n - 1 \geq N - 1 > 2K/(y-1)^2$이고, 따라서

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2} > \frac{2K}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)^2}{2} = K,$$

이것이 구하는 결과이다.

이번에도 하계가 n에 따라 증가하므로 논증은 모든 $n \geq N$에 대해 통한다. 여기서는 이 점이 중요하다. y^n/n 자체는 항상 증가하는 것이 **아니다**. $y = 1.2$에 대한 그림에서 보듯이, y가 1에 가까우면 처음에는 감소한다(예를 들어 $y < 2$이면 항상 $y^2/2 < y$이다). 따라서 $y^n/n > K$인 n 하나를 찾고 그 뒤의 항들이 더 크다고 주장하는 것만으로는 안 된다.



검산

$y = 1.01$, $K = 1000$으로 시험해 보자. 위의 방법으로 $y^n > K$에 대해서는 $N = 100\,001$, $y^n/n > K$에 대해서는 $N = 20\,000\,002$를 얻는다. 직접 계산해 보면 $1.01^n/n > 1000$은 이미 모든 $n \geq 1424$에 대해 성립한다. 우리가 구한 N은 가능한 최솟값과는 거리가 멀지만, 문제는 **어떤** N이든 하나만 요구한다. 또한 무작위로 고른 수천 개의 x와 n에 대해 유리수 x로 두 부등식을 정확히 검사했고, 무작위로 고른 수천 개의 $y > 1$과 K에 대해 선택한 N(그리고 그보다 큰 많은 n)을 검사했다.

흔한 실수

- 하나의 N에 대해 $y^N > K$임만 보이고, 왜 **모든** $n \geq N$에 대해 $y^n > K$인지 설명하지 않는 것.
- 마지막 부분에 $y^n > n(y-1)$을 사용하는 것. n으로 나누면 상수가 남는데, 이것으로는 임의의 K를 넘을 수 없다.
- K가 음수이거나 0일 수 있음을 잊는 것. 이 경우 $K/(y-1)$ 자체는 적절한 하계가 아니다(물론 이때는 어떤 N이든 된다).

STEP 너머

이것은 대부분의 학생이 처음 만나는 엄밀한 "ε–N" 방식의 논증이다. 이 논증은 $y > 1$일 때 $y^n \to \infty$이고 $y^n/n \to \infty$임을 증명한다. x^{k+1} 항을 남기는 같은 기법으로, 임의의 고정된 k에 대해 $y^n/n^k \to \infty$임을 보일 수 있다. 즉 지수함수(exponential)는 모든 다항식(polynomial)보다 빠르게 커진다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 바로 이런 종류의 추론으로부터 수열(sequence)과 극한(limit)의 이론을 쌓아 올린다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.