풀이

# STEP III 견본 문제지, 문제 15

확률과 통계 • 무작위 네트워크의 연결성

> **STEP III 견본 문제지, 15번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q15

## 핵심 아이디어

기하적인 배치는 잊어도 된다. 중요한 것은 여섯 개의 도로 가운데 어느 것이 열려 있는가뿐이다. 모든 마을에서 다른 모든 마을로 갈 수 있을 필요충분조건은 열린 도로들이 네 마을 위에서 **연결된**(*connected*) 망을 이루는 것이다. 따라서 가능한 열린 도로의 집합을 도로의 개수에 따라 분류하고, 각 개수마다 연결된 집합이 몇 개인지 센 다음, 각각에 그 확률을 가중치로 곱한다. 마을이 네 개뿐이므로 세는 과정은 짧고 깔끔하다.

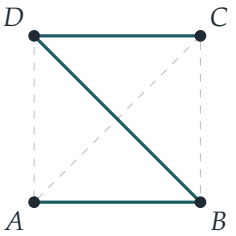
## 풀이

주어진 도로가 열려 있을 확률을 $q = 1 - p$로 쓰자. 눈이 내린 뒤 모든 마을에서 다른 모든 마을로 갈 수 있는 사건을 $K$라 하자.

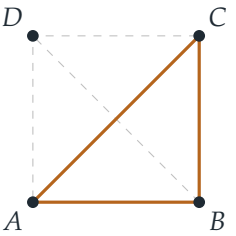
여섯 도로는 서로 독립(independent)이므로, $k$개의 도로가 열려 있고 나머지 $6 - k$개가 막혀 있는 특정한 집합의 확률은 $q^k p^{6-k}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{k=0}^{6} N_k \, q^k p^{6-k},$$

이고, 여기서 $N_k$는 네 마을을 모두 연결하는 $k$개 도로의 집합의 개수이다.



도로 세 개: 연결하는 나무



도로 세 개: 삼각형, $D$는 고립

### 연결된 도로 집합 세기

**열린 도로가 두 개 이하인 경우.** 열린 도로 하나는 두 마을을 잇는다. 따라서 한 마을에서 출발하면 도로 하나마다 새로운 마을을 많아야 하나씩만 더할 수 있다. 나머지 세 마을에 모두 닿으려면 도로가 적어도 세 개 필요하다. 따라서 $N_0 = N_1 = N_2 = 0$이다.

**열린 도로가 세 개인 경우.** 세 도로의 집합은 $\binom{6}{3} = 20$개이다. 이런 집합 하나가 마을들을 연결하지 못한다고 하자. 어떤 마을이 고립되어 있다면 세 도로는 모두 나머지 세 마을 사이에 놓인다. 그런데 그 세 마을을 잇는 도로는 세 개뿐이므로, 그 집합은 정확히 삼각형이다. 고립된 마을이 없다면 마을들은 두 쌍으로 나뉘고, 열릴 수 있는 도로는 많아야 두 개(각 쌍 안에 하나씩)이므로 모순이다. 따라서 연결에 실패하는 경우는 고립되는 마을을 고르는 방법마다 하나씩, 모두 4개의 삼각형뿐이고,

$$N_3 = 20 - 4 = 16.$$

? **생각해 보기** 열린 도로가 네 개이면 왜 망이 절대 끊어지지 않는가?

**열린 도로가 네 개 이상인 경우.** 앞의 두 가지 실패 방식을 그대로 쓴다. 고립된 마을이 있다면 열린 도로가 모두 나머지 세 마을 사이에 있어야 하는데, 거기에는 도로가 세 개뿐이다. 두 쌍으로 나뉘는 경우에는 열린 도로가 많아야 두 개이다. 열린 도로가 네 개 이상이면 어느 쪽도 일어날 수 없으므로, 그러한 집합은 모두 연결되어 있다.

$$N_4 = \binom{6}{4} = 15, \qquad N_5 = \binom{6}{5} = 6, \qquad N_6 = 1.$$

### 확률

센 값들을 모으면

$$\mathrm{P}(K) = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 16q^3p^3, \qquad q = 1 - p.$$

이를 $p$의 거듭제곱으로 전개하면 다음과 같은 동치인 꼴을 얻는다.

$$\mathrm{P}(K) = 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$$

### $p = \frac{1}{2}$인 경우

이제 $p = q = \frac{1}{2}$이므로, 도로가 열리고 막히는 $2^6 = 64$가지 경우는 모두 확률이 $\frac{1}{64}$로 같다. 따라서

$$\mathrm{P}(K) = \frac{1 + 6 + 15 + 16}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

## 검산

- **극단적인 값.** $p = 0$이면 모든 도로가 열려 있고 공식은 1을 준다. $p = 1$이면 모든 도로가 막혀 있고 공식은 $1 - 4 - 3 + 12 - 6 = 0$을 준다.
- **여사건**(*complement*). 망이 끊어지는 것은 어떤 마을이 고립되거나, 마을들이 두 쌍으로 나뉘고 두 쌍 사이에 도로가 없을 때, 그리고 그때뿐이다. 한 마을이 고립될 확률은 $p^3$이다. 네 마을에 대해 포함배제의 원리(inclusion–exclusion)를 쓰면(특정한 두 마을이 고립되려면 막힌 도로가 다섯 개 필요하고, 세 마을이 고립되면 네 마을이 모두 고립된다) $4p^3 - 6p^5 + 3p^6$을 얻는다. 두 쌍으로 나누는 3가지 방법 각각에서 쌍 안의 두 도로가 모두 열려 있는 경우가 $p^4q^2$씩 더해진다. 1에서 이 합을 빼면 위의 공식과 일치한다. $p = \frac{1}{2}$일 때 끊어질 확률은 $\frac{32-12+3+3}{64} = \frac{13}{32}$이다.
- **전수 조사.** 컴퓨터로 도로 집합 64개를 모두 나열하면 개수 $16, 15, 6, 1$이 확인된다. $p = 0.3$으로 한 모의실험(simulation)은 0.893을 주었고, 정확한 값은 0.8925이다.

## 흔한 실수

- 네 개의 삼각형을 잇고, 세 도로의 집합 20개를 모두 연결된 것으로 세는 실수.
- 네 도로의 집합이라도 마을 하나를 고립시킬 수 있다고 가정하는 실수. 마을이 고립되려면 그 마을의 세 도로가 모두 막혀야 한다.
- $q^k p^{6-k}$를 쓸 때 $p$(막힘)와 $1 - p$(열림)를 혼동하는 실수.

## STEP 너머

이것은 **무작위 그래프**(*random graph*)의 아주 작은 예이다. 망의 각 변이 독립적으로 살아남을 때, 그 결과가 연결되어 있는지를 묻는 것이다. $p$에 대한 이 다항식을 그 망의 **신뢰도 다항식**(*reliability polynomial*)이라 하고, 수 16은 케일리(Cayley)의 공식의 한 예이다. 즉, 이름이 붙은 $n$개의 점을 잇는 나무(tree)는 $n^{n-2}$개이다. 큰 망에 대해서는 에르되시(Erdős)와 레니(Rényi)가, 도로가 열릴 확률이 어떤 문턱값을 지나는 순간 연결성이 놀랄 만큼 갑작스

럽게 나타난다는 것을 발견하였다. 독립인 사건들로 만들어지는 무작위 구조에 대해 더 알고 싶다면 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.