풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 14

역학 • 회전이 있는 충돌

> **STEP III 견본 문제지, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q14

핵심 아이디어

회전축(pivot)이 막대에 크기를 알 수 없는 충격량(impulse)을 가하므로 선운동량(linear momentum)은 보존되지 않는다. 그러나 그 충격량은 회전축에 대한 모멘트가 없으므로, 중점에 대한 각운동량(angular momentum)은 보존된다. 여기에 접촉점에서 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)을 적용하면 모든 것이 결정된다. 충돌이 완전 탄성(perfectly elastic)이므로 반발 계수(coefficient of restitution)는 1이다. 두 번째 부분에서는 입자가 그다음에 어떻게 움직이는지 구하고 두 물체를 모두 따라가 본다. 그러면 막대의 반대쪽 절반이 돌아와서 입자가 움직이는 직선에 이르게 된다.

풀이

모형. 입자는 질점이고, 탁자는 매끄러우므로(smooth) 어느 물체에도 마찰이 작용하지 않는다. 막대는 균일하며 중점 O에서 매끄럽게 회전축에 고정되어 있다. 막대의 O에 대한 관성 모멘트(moment of inertia)는

$$I = \tfrac{1}{12}m(4a)^2 = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

이다. 충돌하는 동안 충격량은 입자의 운동 직선을 따라 작용하므로(막대는 매끄럽고 입자는 막대에 수직으로 부딪힌다) 입자는 같은 직선 위에서 계속 움직인다. 충돌 후 입자의 속도를 처음 운동 방향을 양의 방향으로 하여 v라 하자.

각속력

O에 대한 각운동량. 계(입자와 막대)에 작용하는 외부 충격량은 O에 있는 회전축에서 오는 것뿐이고, 이것은 O에 대한 모멘트가 없다. 충돌 전 입자의 O에 대한 각운동량은 mua이고

막대는 정지해 있으므로

$$mua = mva + \tfrac{4}{3}ma^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad u = v + \tfrac{4}{3}a\omega. \tag{1}$$

이다.

반발. 막대에서 충돌한 점은 O로부터 거리 a에 있으므로, 충돌 직후 이 점은 입자의 처음 운동 방향으로 속력 $a\omega$로 움직인다. 반발 계수가 1이므로 멀어지는 속력은 가까워지는 속력과 같다.

$$a\omega - v = u. \tag{2}$$

생각해 보기 회전하는 물체에도 뉴턴의 반발 법칙을 쓸 수 있을까?

쓸 수 있다. 이 법칙은 접촉하는 두 점의 속도의 공통 법선 방향 성분에 적용된다. 원한다면 대신 에너지를 써도 된다. "완전 탄성"이란 운동 에너지(kinetic energy)가 보존된다는 뜻이므로 $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\omega^2$이다. 이것을 $m(u-v)(u+v) = \frac{4}{3}ma^2\omega^2$으로 쓰고 (1)에서 얻은 $u - v = \frac{4}{3}a\omega$를 이용하면($\omega \neq 0$으로 나누어) $u + v = a\omega$를 얻는데, 이것이 바로 (2)이다.

(1)과 (2)를 더하면 v가 소거된다.

$$2u = \tfrac{7}{3}a\omega \qquad \Longrightarrow \qquad a\omega = \frac{6u}{7},$$

이것이 증명하려던 결과이다. 그러면 (2)에서

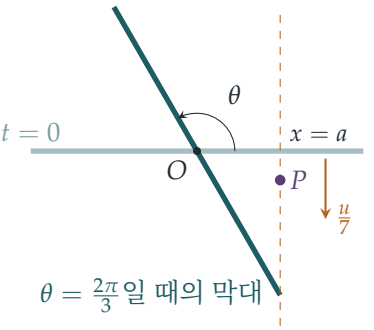
$$v = a\omega - u = -\frac{u}{7},$$

이므로 입자는 처음 직선을 따라 속력 $u/7$로 되튀어 돌아간다.

두 번째 충돌

탁자 위에 원점이 O인 좌표축을 잡되, x축은 막대의 처음 위치를 따르게 하고, 입자는 처음에 직선 $x = a$를 따라 양의 y 방향으로 움직여 시각 $t = 0$에 점 $(a, 0)$에서 막대에 부딪힌다고 하자. 그러면 $t > 0$에서

- 입자는 $\left(a,\ -\frac{u}{7}t\right)$에 있고, 음의 y 방향으로 일정하게 움직인다.
- 충돌한 점은 양의 y 방향으로 움직였으므로 막대는 시계 반대 방향으로 돌고, 시각 t에 x축과 각 $\theta = \omega t$를 이룬다. 두 물체가 다시 충돌할 때까지 어느 쪽에도 다른 힘이 작용하지 않으므로 두 운동은 모두 등속 운동이다.



막대의 반길이는 $2a$이므로, 막대가 직선 $x = a$에 닿으려면 막대 위에서 그 직선 위에 놓인 점, 즉 O로부터 거리 $a/|\cos\theta|$인 점이 O로부터 $2a$ 이내에 있어야 한다. 곧 $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$일 때에만 닿는다. 닿는 경우 막대는 높이 $y = a\tan\theta$에서 그 직선과 만난다.

- $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$이면 막대는 x축 위쪽인 $y = a\tan\theta > 0$에서 직선과 만나는데, 입자는 x축 아래에 있으므로 접촉하지 않는다.
- $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$이면 막대는 직선에 아예 닿지 않는다.
- $\frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi$이면 막대의 **반대쪽** 절반이 입자와 같은 쪽인 $y = a\tan\theta < 0$에서 직선과 만난다.

이제 위치를 비교하자. $t = \theta/\omega = \frac{7a\theta}{6u}$이므로 각이 θ일 때 입자의 y좌표는 $-\frac{u}{7}t = -\frac{a\theta}{6}$이다. 다음 함수를 생각하자.

$$f(\theta) = (\text{막대의}\, y,\, \text{직선}\, x = a) - (\text{입자의}\, y) = a\tan\theta + \frac{a\theta}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3} \leq \theta < \pi.$$

- $\theta = \frac{2\pi}{3}$일 때(막대의 끝이 직선에 이른다): $\frac{\pi}{9} < 1 < \sqrt{3}$이므로 $f = a\left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right) < 0$이다. 입자는 $y = -\frac{\pi}{9}a \approx -0.35a$에 있어서 x축과 $y = -\sqrt{3}a$에 있는 막대 끝 사이에 놓인다. 즉 막대의 끝은 입자를 **지나쳐서** 돌아와 있다.
- $\theta \to \pi^-$일 때: $\tan\theta \to 0$이므로 $f \to \frac{\pi}{6}a > 0$이다. 막대는 다시 x축 쪽으로 쓸고 올라가는 반면 입자는 약 $-0.52a$에 있다.

f는 $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$에서 연속이므로 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 그 사이의 어떤 θ에서 $f(\theta) = 0$이다. 그 순간 막대는 입자의 위치에 있으므로 둘은 다시 충돌한다. (위의 처음 두 항목에 의해 그보다 이른 접촉은 일어날 수 없다.) 이로써 증명이 끝난다.

수치적으로 보면, 충돌은 $\tan\theta = -\theta/6$인 $\theta \approx 2.716$(약 $155.6°$)에서, 시각 $t \approx 3.17\,a/u$에 일어나며, 이때 입자는 $y \approx -0.45a$, 즉 막대를 따라 O로부터 약 $1.10a$인 곳에 있다.

검산

- 에너지: $a\omega = \frac{6}{7}u$, $v = -\frac{1}{7}u$이면 나중 운동 에너지는 $\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{49} + \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{49}\right)u^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{49}{49}u^2$으로, 처음 에너지와 정확히 같다.
- 관성 모멘트가 I인 물체의 거리 d인 곳을 친다고 하고 같은 논증을 되풀이하면 $d\omega = 2u/(1 + I/md^2)$를 얻는다. $I \to 0$이면 충돌한 점은 $2u$로 떨어져 나가는데, 이는 매우 가벼운 물체와 탄성 충돌할 때와 같다. $I \to \infty$이면 막대는 거의 돌지 않고 입자는 속력 u로 되튀어 나온다. 여기서는 $I/ma^2 = \frac{4}{3}$이므로 $\frac{6}{7}u$가 나온다.
- 정확한 분수로 $a\omega = \frac{6}{7}u$, $v = -\frac{1}{7}u$가 각운동량과 에너지를 모두 보존함을 확인한 다음, 두 운동을 시간에 따라 한 단계씩 진행시켜 보았다. 충돌 후 첫 접촉은 $\theta \approx 2.7165$에서 일어났으며, 이는 $\tan\theta + \theta/6 = 0$을 이분법(bisection)으로 푼 값과 일치한다.

흔한 실수

- 선운동량을 보존시키는 것. 회전축이 충격량을 주므로 보존되는 것은 회전축에 대한 각운동량뿐이다.
- $I = \frac{1}{3}m\ell^2$(한쪽 끝에 대한 값)을 쓰거나, 막대의 길이가 $2a$가 아니라 $4a$임을 잊는 것.
- 두 번째 충돌을 처음에 맞은 절반에서 찾는 것. 그 절반은 입자의 직선에서 멀어져 가고, 돌아와서 직선과 만나는 것은 반대쪽 절반이다.

STEP 너머

고정점에 대한 각운동량을 에너지 조건이나 반발 조건과 짝지어 쓰는 것은 강체(rigid body)의 충격 운동을 다루는 표준적인 방법이며, **타격 중심**(centre of percussion)이라는 개념으로 이어진다. 타격 중심이란 회전축에 고정된 물체를 쳤을 때 회전축에 충격량이 생기지 않는 점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체의 충돌과 각운동량을 꼼꼼하게 다루며, 바로 이런 종류의 문제가 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.