풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 13

역학 • 굴러가는 고리

STEP III 견본 문제지, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

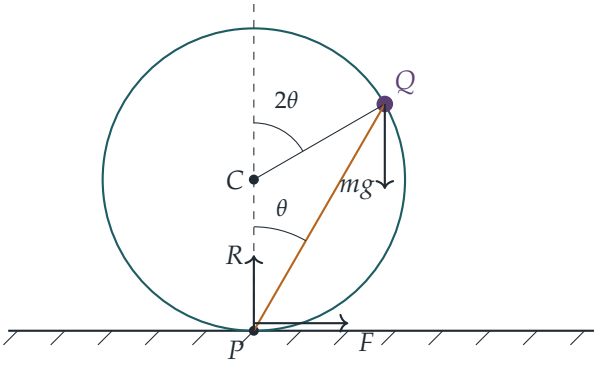
step.maths.org/questions/spec-s3-q13

핵심 아이디어

고리(hoop)가 가벼우므로 계의 운동 에너지(kinetic energy)는 오직 입자의 것뿐이고, 고리가 구르므로 마찰(friction)은 일을 하지 않는다. 따라서 에너지 보존(energy conservation)으로부터 속력이 곧바로 나온다. 구름(rolling)은 기하학적 배치도 완전히 결정한다. 고리가 2θ만큼 회전하면 중심은 $2a\theta$만큼 이동하므로, x와 y를 θ만으로 나타낼 수 있다. 끝으로, 가벼운 고리에는 알짜힘이 작용할 수 없으므로 탁자의 항력은 입자의 가속도가 요구하는 만큼일 뿐이며, 이 항력은 음수가 될 수 없다.

풀이

고리를 미끄러지지 않고 구르는(rolling without slipping) 가벼운 강체 원으로, 입자를 테두리에 고정된 질점(point mass)으로 모형화한다. 탁자와의 접점을 P, 중심을 C, 입자를 Q라 하자. 고리는 x축의 양의 방향으로 구르고, 따라서 θ는 0에서부터 증가한다고 하자.



여기서 R와 F는 P에서 탁자가 고리에 작용하는 수직 항력(normal reaction)과 마찰력이고, 현(chord) PQ는 연직선과 각 θ를 이룬다(중심각 2θ의 절반).

속력

R와 F는 모두 P에 작용하는데, 고리가 구르므로 P는 순간적으로 정지해 있다. 따라서 두 힘 모두 일을 하지 않는다. 고리가 가벼우므로 운동 에너지도, 위치 에너지의 변화도 오직 입자의 것뿐이다. 입자는 높이 $2a$에서 사실상 정지한 상태로 출발하며, 반지름 CQ가 위쪽 연직선과 각 2θ를 이룰 때 그 높이는 $a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta$이다. 에너지 보존에 의해

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\big(2a - 2a\cos^2\theta\big) = 2mga\sin^2\theta,$$

이므로 $v^2 = 4ga\sin^2\theta$이고, $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta \ge 0$이므로

$$v = 2(ga)^{1/2}\sin\theta,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다.

위치와 $\dot\theta$

고리는 각 2θ만큼 회전했고, 미끄러지지 않고 구르므로 중심은 호의 길이 $a\cdot 2\theta$만큼 앞으로 이동했다. C에 대하여 입자는 $a\sin 2\theta$만큼 앞에, $a\cos 2\theta$만큼 위에 있다. 따라서

$$x = 2a\theta + a\sin 2\theta, \qquad y = a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta.$$

시간에 대하여 미분하면

$$\dot x = 2a\dot\theta\,(1 + \cos 2\theta) = 4a\dot\theta\cos^2\theta,$$
$$\dot y = -2a\dot\theta\sin 2\theta = -4a\dot\theta\sin\theta\cos\theta,$$

이고, 따라서

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta.$$

? **생각해 보기** $v = 4a\dot\theta\cos\theta$임을 더 빨리 알아내는 방법이 있을까?

있다. P는 순간 회전 중심(instantaneous centre of rotation)이고, 고리는 각속도 $2\dot\theta$로 회전한다. 현 PQ가 C에서 이루는 중심각은 $\pi - 2\theta$이므로 $PQ = 2a\cos\theta$이고, $v = PQ\cdot 2\dot\theta = 4a\dot\theta\cos\theta$가 되어 앞의 계산과 일치한다.

$\dot\theta > 0, \cos\theta > 0$이므로 에너지로부터 구한 속력과 비교하면

$$4a\dot\theta\cos\theta = 2(ga)^{1/2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta = \tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\tan\theta,$$

이고, 이것이 첫 번째로 요구된 결과이다. (좌변은 θ가 아니라 변화율 $\dot\theta$여야 한다. 우변의 단위가 s^{-1}이기 때문이다.)

연직 방향 가속도

$\dot{\theta}$를 $\dot{y}$에 대입하면

$$\dot{y} = -4a\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2(ga)^{1/2}\sin^2\theta.$$

다시 미분하고 $\dot{\theta}$를 한 번 더 이용하면

$$\ddot{y} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta} = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2g\sin^2\theta,$$

가 되어 요구된 결과를 얻는다. 같은 방법으로 $\dot{x} = 4a\cos^2\theta\,\dot{\theta} = (ga)^{1/2}\sin 2\theta$이고,

$$\ddot{x} = 2(ga)^{1/2}\cos 2\theta\,\dot{\theta} = g\cos 2\theta\tan\theta.$$

구름을 멈추게 하는 것

고리가 가벼우므로 고리와 입자로 이루어진 계에 작용하는 전체 힘은 m에 입자의 가속도를 곱한 것과 같다. 외력은 아래쪽으로 mg, 위쪽으로 R, 수평 방향으로 F이다. 연직 방향으로 분해하면

$$R - mg = m\ddot{y} \quad\Longrightarrow\quad R = mg\left(1 - 2\sin^2\theta\right) = mg\cos 2\theta,$$

이고, 수평 방향으로는 $F = m\ddot{x} = mg\cos 2\theta\tan\theta$이므로 $R > 0$인 동안 $F/R = \tan\theta$이다.

생각해 보기 θ가 $\pi/4$를 넘어서면 무엇이 잘못되는가?

탁자는 밀 수는 있지만 당길 수는 없으므로 $R \geq 0$이다. 그런데 $R = mg\cos 2\theta$는 입자가 중심과 같은 높이에 오는 $\theta = \pi/4$에서 0이 되고, 그 이후에도 계속 구르려면 $R < 0$이어야 한다. 같은 말이지만, 계속 구르려면 $\ddot{y} = -2g\sin^2\theta < -g$여야 한다. 즉 입자가 자유 낙하(free fall)보다 더 빠르게 아래로 가속되어야 하는데, 중력만으로는 이것이 불가능하다. 따라서 $\theta = \pi/4$에서 접촉력이 사라지고 고리는 탁자에서 떨어진다. 그 뒤 입자는 앞쪽으로 $(ga)^{1/2}$, 아래쪽으로 $(ga)^{1/2}$의 속도 성분을 가지고 출발하는 포물체(projectile)로 운동하며, 가벼운 고리는 입자에 그대로 딸려 가면서 가장 낮은 점이 탁자에서 들어 올려진다.

마찰이 그보다 먼저 개입할 수도 있다. 구르려면 $|F| \leq \mu R$, 즉 $\tan\theta \leq \mu$여야 하는데, $\theta \to \pi/4$일 때 $\tan\theta$는 1까지 증가한다. 따라서 마찰 계수(coefficient of friction)가 $\mu < 1$을 만족하면, 고리는 $\theta = \pi/4$에 이르기 전 $\tan\theta = \mu$가 되는 순간 미끄러지기 시작한다. $\mu \geq 1$일 때에만 고리는 $\theta = \pi/4$까지 계속 구른 다음 뛰어오른다.

검산

- $\theta = 0$에서 $\dot{\theta} = 0$이다. 즉 꼭대기 위치는 평형(equilibrium) 상태이며, 그래서 고리를 살짝 밀어 주어야 한다.

- $\theta = \pi/4$에서 $v = (2ga)^{1/2}$이다. 이는 높이 a만큼 떨어졌을 때의 속력이며, 실제로 입자는 $2a$에서 a로 내려왔다.
- 컴퓨터로 $\phi = 2\theta$에 대한 운동 방정식(equation of motion)을 (라그랑지안(Lagrangian) $ma^2(1+\cos\phi)\dot{\phi}^2 - mga(1+\cos\phi)$로부터) 독립적으로 적분하고, 유한 차분(finite difference)으로 구한 속도와 가속도를 위의 공식들과 비교하였다. 속력, $\dot{\theta}$, $\ddot{y}$, $R = mg\cos 2\theta$, $F/R = \tan\theta$가 모두 10^{-6} 이내로 일치하였다. 예를 들어 $\theta = \pi/4$에서는 $R = 0$, $F/R = 1$을 준다.

흔한 실수

- 중심이 $2a\theta$가 아니라 $a\theta$만큼 이동한다고 보는 것. 고리는 θ가 아니라 2θ만큼 회전했다.
- 에너지 방정식에 마찰을 포함하는 것. 접점은 정지해 있으므로 고리가 구르는 동안 마찰은 일을 하지 않는다.
- 입자가 "떨어져 나간다"고만 말하는 것. 입자는 고정되어 있다. 탁자에서 떨어지는 것은 고리이며, 그 이유는 항력이 음수가 되어야 하기 때문이다.

STEP 너머

구르는 물체의 접점은 그 물체의 순간 회전 중심이며, 미끄러지지 않는 구름은 일을 하지 않으면서 자유도(degree of freedom)를 하나 없애는 구속 조건(constraint)이다. 이러한 구속 조건은 라그랑주(Lagrange) 역학에서 체계적으로 다루어진다. 거기서는 에너지를 θ와 같은 하나의 좌표로 쓰기만 하면 운동 방정식이 자동으로 따라 나오며, 위의 검산이 바로 이렇게 한 것이다. 구속력이 언제 사라지는가 하는 문제(구면에서 떨어지는 구슬, 둔덕에서 떠오르는 자동차)는 대학 1학년 역학의 전형적인 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 구름 운동과 구속력을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.