풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 12

역학 • 막대의 평형

STEP III 견본 문제지, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

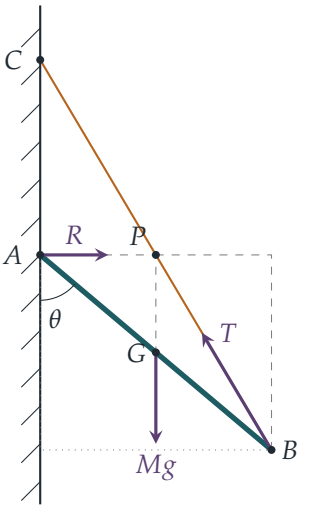
step.maths.org/questions/spec-s3-q12

핵심 아이디어

막대에는 정확히 세 힘이 작용한다. 막대의 무게, 매끄러운 벽의 반작용(reaction), 그리고 줄의 장력(tension)이다. 평행하지 않은 세 힘이 물체를 평형(equilibrium) 상태로 유지하려면 세 힘의 작용선이 한 점에서 만나야 하는데, 여기서는 그 점을 쉽게 찾을 수 있다. 이 점이 기하학적 배치를 완전히 결정하고, 그다음 한 방향으로 힘을 분해(resolving)하기만 하면 장력이 나온다.

풀이

모형. 막대는 균일(uniform)하므로 무게 Mg는 중점 G에 작용한다. 벽은 매끄러우므로(smooth) A에서의 반작용 R는 수평 방향(벽에 수직)이다. 줄은 가볍고 늘어나지 않으므로(inextensible) BC 방향의 장력 T로 B를 당긴다.



막대의 기울기

반작용 R는 A를 지나는 수평선을 따라 작용하고, 무게는 G를 지나는 연직선을 따라 작용한다. 두 직선은 A와 같은 높이에 있으면서 G의 바로 위(또는 아래)에 있는 점 P에서 만난다. 세 힘이 평형을 이루므로 P에 대한 모멘트(moment)의 합은 0이어야 한다. R와 Mg는 P에 대한 모멘트가 없으므로 T도 모멘트가 없어야 하고, 따라서 줄의 작용선은 P를 지나야 한다.

생각해 보기 막대는 A에서 위쪽으로 뻗을까, 아래쪽으로 뻗을까?

수평 거리를 벽으로부터 잰다. 막대와 연직선 사이의 각을 θ라 하면 B는 벽으로부터 $L\sin\theta$만큼 떨어져 있고, G(따라서 P)는 그 절반인 $\frac{1}{2}L\sin\theta$만큼 떨어져 있다. 줄은 B에서 벽 위의 점 C까지 직선으로 이어지므로, 수평 방향으로 절반만큼 간 점은 줄의 절반 지점이다. 즉 P는 BC의 **중점**이다. 따라서 P의 높이는 B와 C의 높이의 평균이다. 그런데 P는 A와 같은 높이에 있고 C는 A보다 위에 있으므로, B는 A보다 정확히 AC만큼 **아래**에 있어야 한다.

따라서 막대는 A에서 아래쪽으로 늘어져 있다. 막대가 아래쪽 연직선과 이루는 각을 θ라 하자. 그러면 B는 A보다 $L\cos\theta$만큼 아래에 있고, 따라서 $AC = L\cos\theta$이다. B를 기준으로 하면 점 C는 수평 방향으로 $L\sin\theta$만큼 떨어져 있고, 높이는 $L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$만큼 위에 있다. 줄의 길이가 αL이므로 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)에 의해

$$\alpha^2 L^2 = L^2\sin^2\theta + 4L^2\cos^2\theta = L^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),$$

이고, 따라서

$$\cos^2\theta = \frac{\alpha^2 - 1}{3}, \qquad \text{즉} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{3}},$$

이며, 막대는 A에서 연직선과 이 각을 이루며 **아래쪽으로** 향한다.

α의 가능한 값

C는 A보다 엄밀하게 위에 있어야 하므로 $\cos\theta > 0$이다. ($\cos\theta = 0$이면 C가 A와 일치하고 막대는 수평이 된다. 이때 A, B, C는 한 직선 위에 있다.) 또한 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않아야(collinear가 아니어야) 하므로 막대는 연직이 아니다. 즉 $\sin\theta \neq 0$, 다시 말해 $\cos^2\theta < 1$이다. 따라서 $\alpha > 0$을 이용하면

$$0 < \frac{\alpha^2 - 1}{3} < 1 \iff 1 < \alpha^2 < 4 \iff 1 < \alpha < 2,$$

이다. 역으로 이 범위의 임의의 α에 대해 위의 각이 존재하고, 이 작도는 세 힘이 한 점에서 만나는(concurrent) 배치를 주므로 모멘트가 평형을 이루며, 아래에서 힘을 분해하면 양수인 T와 R가 얻어진다. 가능한 값의 집합은 $1 < \alpha < 2$이다.

장력

연직 방향으로 분해한다. 줄이 연직선과 이루는 각의 코사인은 (연직 높이 차)/(길이) $= 2L\cos\theta/(\alpha L)$이고 R는 수평이므로

$$T \cdot \frac{2\cos\theta}{\alpha} = Mg \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{Mg\alpha}{2\cos\theta} = \frac{Mg\alpha}{2}\left(\frac{3}{\alpha^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

이다. 여기서 $\cos\theta = \sqrt{(\alpha^2-1)/3}$($\cos\theta > 0$이므로 양의 제곱근)을 대입했다. 이것이 구하는 결과이다.

덧붙여 수평 방향으로 분해하면 $R = T \cdot \dfrac{L\sin\theta}{\alpha L} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta > 0$이므로, 벽은 막대를 바깥쪽으로 밀고 있다. 벽이라면 당연히 그래야 한다.

검산

- $\alpha \to 2^-$이면 $\cos\theta \to 1$이다. 막대는 A 아래로 연직으로 늘어지고 줄은 막대를 따라 겹쳐 되돌아오며, 줄이 무게 전체를 지탱하므로 $T \to Mg$이다. $\alpha \to 1^+$이면 $\theta \to 90°$이고 $T \to \infty$이다. 거의 수평인 막대를 받치려면 매우 큰 장력이 필요하다.
- $\alpha = 1.5$이면 $\cos\theta \approx 0.6455$($\theta \approx 49.8°$)이고 $T \approx 1.162\,Mg$이다. $(1,2)$에서 임의로 뽑은 수천 개의 α에 대해, A에 대한 모멘트가 정확히 한 각에서만 0이 되고 그 각과 장력이 공식과 일치함을 수치적으로 확인했다. 또한 $(1,2)$ 밖의 α에 대해서는 평형이 존재하지 않음도 확인했다.

흔한 실수

- 사다리 문제에서처럼 막대가 A에서 **위쪽으로** 기울어지게 그리는 것. 세 힘이 한 점에서 만난다는 논증에 의해 B는 A보다 아래에 있어야 하며, 그림을 잘못 그리면 방정식들이

모순 없는 해를 갖지 않는다.

- 매끄러운 벽의 반작용이 수평이라는 사실을 잊고, 불필요한 마찰력이나 연직 성분을 도입하는 것.
- $\alpha = 1$ 또는 $\alpha = 2$를 포함하는 것. 이 값들은 세 점이 한 직선 위에 놓이는 (퇴화된) 배치를 주며, 문제에서 이를 제외하고 있다.

STEP 너머

세 힘의 원리는 정역학(statics)의 일반적인 사실의 특수한 경우이다. 힘의 계가 평형 상태일 필요충분조건은 합력(resultant force)과 어느 한 점에 대한 합모멘트가 모두 0이 되는 것이다. 우리가 P를 고른 것처럼 점을 영리하게 고르는 것이 가장 빠른 길인 경우가 많다. 같은 아이디어가 공학 역학에서 트러스(truss), 케이블, 골조 구조를 분석하는 바탕이 된다. 힘과 토크를 철저하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.