풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 11

역학 • 일계 미분방정식

STEP III 견본 문제지, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.13 절 **제설차 문제**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/snowplough.html

핵심 아이디어

각 제설차(snowplough)의 속력은 눈의 깊이로 주어지고, 그 깊이는 제설차가 어떤 지점에 **언제** 도착하는지에 따라 달라진다. 따라서 시간을 위치의 함수로 보고 속력의 역수(reciprocal)인 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$를 세우는 것이 자연스럽다. 첫 번째 제설차의 경우 눈의 깊이는 처음 깊이에 그동안 내린 눈을 더한 것일 뿐이다. 두 번째 제설차의 경우 핵심 관찰은, 그 앞에 있는 눈은 첫 번째 제설차가 그 지점을 치운 뒤부터만 내려 쌓였다는 것이다.

풀이

각 제설차를 도로를 따라 움직이는 점으로 모형화하고, 거리는 공통 출발점에서부터 잰다. 풀이 전체에서 깊이의 단위는 미터, 시간의 단위는 초, 거리의 단위는 미터이다.

소문항 (i)

시각 t에 첫 번째 제설차가 만나는 눈은 $t = 0$부터 방해받지 않고 내려 쌓였으므로, 그 깊이는

$$z = h + kt.$$

이다. 따라서 속력은

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}, \qquad \text{이므로} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k} = \alpha t + \frac{\alpha h}{k}.$$

이다. (속력이 양수이므로 x는 t에 대한 순증가함수(strictly increasing function)이고, 따라서 역으로 바꾸어 써도 된다.) 이 식은 t에 대해 선형(linear)이며, 다음과 같이 쓰는 것이 가장 깔끔하다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(t+\frac{h}{k}\Big)=\alpha\Big(t+\frac{h}{k}\Big).$$

그러므로 어떤 상수 C에 대하여 $t+h/k=C\mathrm{e}^{\alpha x}$이다. $x=0$일 때 $t=0$이므로 $C=h/k$이고, x미터를 이동하는 데 걸리는 시간은

$$t_1(x)=\big(\mathrm{e}^{\alpha x}-1\big)\frac{h}{k}\text{ 초},$$

이다. 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

방정식 세우기. 시각 $t>T$에 두 번째 제설차가 위치 y에 있다고 하자. 첫 번째 제설차는 소문항 (i)에서 구한 시각 $t_1(y)$에 이 지점을 지나갔고, 그곳의 눈을 모두 치웠다.

? **생각해 보기** 두 번째 제설차 앞에 쌓인 눈의 깊이는 얼마인가?

$h+kt$가 아니다. 첫 번째 제설차가 지나간 뒤에는 맨 도로만 남았기 때문이다. 위치 y에서 눈은 시각 $t_1(y)$부터 0에서 시작하여 비율 k로 쌓였으므로, 그 깊이는

$$z=k\big(t-t_1(y)\big).$$

이다. (이를 위해서는 $t>t_1(y)$, 즉 두 번째 제설차가 아직 첫 번째 제설차 뒤에 있어야 하는데, 이는 둘이 만나기 전까지 성립한다.) 따라서 두 번째 제설차의 속력은

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\alpha k\big(t-t_1(y)\big)}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=t-\big(\mathrm{e}^{\alpha y}-1\big)\frac{h}{k},$$

이고, 이것이 문제에서 주어진 방정식이다. 두 번째 제설차는 시각 T에 원점에서 출발하므로, 초기 조건(initial condition)은 $y=0$일 때 $t=T$이다.

해 확인하기. 제시된 해를 다음과 같이 쓰자.

$$t=t_1(y)+g(y),\qquad g(y)=\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)\mathrm{e}^{\alpha y}.$$

그러면 $t-t_1(y)=g(y)$이므로, $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}y=g(y)$임을 보이면 된다. g에 곱의 미분법(product rule)을 써서 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}&=\frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y}-\frac{\alpha h}{k}\mathrm{e}^{\alpha y}+\alpha\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)\mathrm{e}^{\alpha y}\\&=\alpha\,g(y),\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫째 항은 $t_1'(y)$이고, 나머지 두 항은 $g'(y)$이다. 따라서 미분방정식(differential equation)이 성립한다. 또한 $y = 0$에서 $t = 0 + T \cdot 1 = T$이므로 초기 조건도 성립한다.

왜 이것이 구하려는 **바로 그** 해인가? 이 방정식은 일계(first order) 선형 방정식이다. t와 $\tilde{t}$가 모두 이 방정식을 만족하면, 그 차 u는 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \alpha u$를 만족하므로 $u = u(0)\mathrm{e}^{\alpha y}$이다. 둘 다 $t(0) = T$를 만족하므로 $u(0) = 0$이고 $u \equiv 0$이다. 그러므로 $(y, t) = (0, T)$를 지나는 해는 정확히 하나뿐이며, 우리는 그 해를 찾은 것이다.

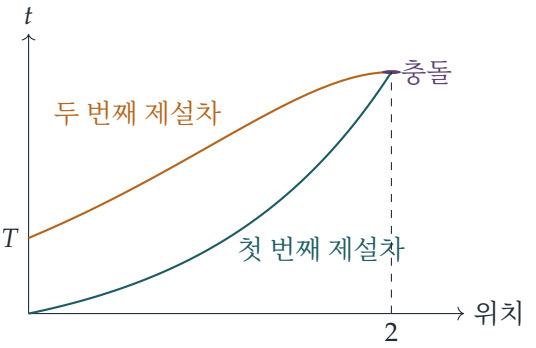
(직접 유도하고 싶다면, 적분인자(integrating factor) $\mathrm{e}^{-\alpha y}$를 곱하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(t\mathrm{e}^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha y}\right)$를 얻고, 이를 0부터 y까지 적분하면 같은 식이 나온다.)

충돌. 두 제설차가 지점 y에 같은 시각에 도달하면, 즉 $t = t_1(y)$이면 그 지점에서 충돌하며, 이는 $g(y) = 0$을 뜻한다. $\mathrm{e}^{\alpha y} > 0$이므로, 이것은 정확히

$$T - \frac{\alpha h y}{k} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{kT}{\alpha h}.$$

일 때 일어난다. $0 \le y < kT/(\alpha h)$이면 $g(y) > 0$이므로(속력이 양수여야 하므로 $\alpha, h, k > 0$으로 둔다), 두 번째 제설차는 그러한 각 지점에 첫 번째 제설차보다 엄격히 늦게 도달하고, 따라서 둘은 그 전에 만나지 않는다. 그러므로 두 제설차는 $kT/(\alpha h)$미터를 이동했을 때 충돌한다. ■

아래 그림은 $h = k = \alpha = 1$, $T = 2$일 때 (y, t) 평면에서 두 제설차의 경로를 보여 준다. 두 곡선 사이의 시간 차 $g(y)$는 $y = 2$에서 0으로 줄어든다.



검산

- 단위: $k/(\alpha z)$가 속력이므로 α의 단위는 m^{-1}이다. 따라서 αx는 무차원량이고, h/k는 시간이며, $kT/(\alpha h)$는 길이이다.
- $T = 0$이면 두 제설차가 함께 출발하고, 식은 거리 0에서 충돌한다고 알려 준다. 앞선 출

발 시간 T가 클수록 충돌 지점은 도로 더 먼 곳으로 밀려나는데, 마땅히 그래야 한다.

- 수치적으로, h, k, α, T의 여러 무작위 값에 대해 각 제설차의 운동을 시간에 따라 단계적으로 계산해 보면(두 번째 제설차는 $t = T$일 때 $y = 0$에서 시작하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1/\big(\alpha(t - t_1(y))\big)$), 결과가 공식과 10^{-8}보다 작은 오차로 일치한다. 그림에서처럼 $h = k = \alpha = 1$, $T = 2$이면 두 제설차 모두 시각 $\mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.39\,\mathrm{s}$에 $y = 2$에 도달한다.

흔한 실수

- 두 번째 제설차에도 깊이 $h + kt$를 쓰는 것. 두 번째 제설차는 시각 $t_1(y)$에 이미 치워진 도로를 치우고 있으므로, 깊이는 $k(t - t_1(y))$이다.
- 해를 확인할 때 $y = 0$에서 $t = T$라는 초기 조건을 잊는 것. 미분방정식만 만족하는 해로는 충분하지 않다.
- $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y$ 대신 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$를 쓰는 것. 시간을 종속변수(dependent variable)로 두면 방정식이 선형이 되어 쉬워진다.

STEP 너머

이 문제는 고전적인 "제설차 문제" 계열에 속하며, 방정식을 선형으로 만들기 위해 종속변수와 독립변수(independent variable)의 역할을 바꾸는 요령은 대학 1학년 미분방정식에서 끊임없이 쓰인다. 위의 유일성(uniqueness) 논증은 초기값 문제(initial value problem)에 대한 존재성과 유일성 정리(existence and uniqueness theorem)의 아주 간단한 경우이다. 또한 두 번째 제설차 앞의 눈이 얇아져 없어질수록 그 속력이 한없이 커진다는 점에 주목하자. 이는 현실이 그렇다기보다는 모형의 한계를 보여 주는 신호이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 선형 방정식, 적분인자, 유일성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.