풀이

STEP III 견본 문제지, 문제 1

순수수학 • 수학적 귀납법

> **STEP III 견본 문제지, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q1

핵심 아이디어

(i)에서는 처음 몇 개의 곱을 직접 계산한 뒤 올바른 방식으로 바라보아야 한다. 각 값을 분모(denominator)가 $2n$이 되도록 쓰면 규칙이 한눈에 드러난다. $1-\frac{1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$로 인수분해(factorising)하면 그 까닭이 설명되고, 귀납 단계도 한 줄 계산으로 끝난다. (ii)에서는 n을 고정하고 k에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. 합에 항을 하나 더 더하는 일은 사실 모습만 바꾼 파스칼의 법칙(Pascal's rule)이다.

풀이

소문항 (i)

$P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$이라 하자. 처음 몇 개의 값은 다음과 같다.

$$P_2=\frac{3}{4},\qquad P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3},\qquad P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8},\qquad P_5=\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}=\frac{3}{5}.$$

분모 4, 8을 보면 모든 값을 분모가 $2n$이 되도록 써 볼 생각이 든다. 즉 $P_2=\frac{3}{4}$, $P_3=\frac{4}{6}$, $P_4=\frac{5}{8}$, $P_5=\frac{6}{10}$이다. 따라서 다음과 같이 추측한다.

$$P_n=\frac{n+1}{2n}\qquad \text{단, } n\geq 2.$$

수학적 귀납법에 의한 증명. $S(n)$을 명제 $P_n=\frac{n+1}{2n}$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$이므로 $S(2)$는 참이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n\geq 2$에 대하여 $S(n)$이 참이라고 가정하자. 그러면

$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$이고 $1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$이므로

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n+2}{2(n+1)}, \end{aligned}$$

이 되고, 이것이 바로 $S(n+1)$이다. 수학적 귀납법에 의하여 모든 $n \geq 2$에 대하여 $S(n)$이 성립한다.

(인수분해는 추측의 이유도 설명해 준다. $P_n = \prod_{m=2}^{n} \frac{m-1}{m} \cdot \prod_{m=2}^{n} \frac{m+1}{m} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2}$이며, 두 곱 모두 연쇄적으로 약분되는 망원 곱(telescoping product)이다.)

소문항 (ii)

양의 정수 n을 고정하고, $T(k)$를 다음 명제라 하자.

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{n}{r} = (-1)^k \binom{n-1}{k}.$$

k에 대한 수학적 귀납법으로 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $T(k)$를 증명한다.

기저 단계. $k = 0$이면 양변 모두 $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$이다.

귀납 단계. $0 \leq k \leq n-2$인 어떤 k에 대하여 $T(k)$가 성립한다고 가정하자($k+1$이 여전히 범위 안에 있도록 하기 위함이다). 다음 항을 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \binom{n}{r} &= (-1)^k \binom{n-1}{k} + (-1)^{k+1} \binom{n}{k+1} \\ &= (-1)^{k+1} \left[\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k} \right]. \end{aligned}$$

? **생각해 보기** $\binom{n}{k+1} - \binom{n-1}{k}$는 무엇인가?

파스칼의 법칙에 따르면 $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}$이다. n개의 대상에서 $k+1$개를 고를 때, 특정한 대상 하나가 선택되거나(그러면 나머지 k개는 다른 $n-1$개에서 고른다) 선택되지 않는다(그러면 $k+1$개 모두를 다른 $n-1$개에서 고른다). 따라서 괄호 안은 $\binom{n-1}{k+1}$이고,

$$\sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \binom{n}{r} = (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k+1},$$

이 되며, 이것이 바로 $T(k+1)$이다. 수학적 귀납법에 의하여 $k = 0, 1, \ldots, n-1$에 대하여 $T(k)$가 성립하므로 증명이 끝난다.

$n = 1$이면 가능한 경우는 $k = 0$뿐이고 이는 기저 단계에서 다루었으므로, 이때 따로 처리할 필요가 없다.

검산

- $P_{300} = \frac{301}{600} \approx 0.5017$이며, 컴퓨터로 분수를 써서 인수들을 정확히 곱해 본 결과 2부터 300까지의 모든 n에 대하여 $\frac{n+1}{2n}$과 일치하였다. $n \to \infty$일 때 이 곱은 $\frac{1}{2}$로 수렴한다.
- $n = 4$일 때 부분합(partial sum) $1, 1-4 = -3, -3+6 = 3, 3-4 = -1$은 $\binom{3}{0}, -\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, -\binom{3}{3}$과 일치한다. 컴퓨터로 모든 $n \leq 79$와 모든 $k \leq n-1$에 대하여 (ii)를 정확히 확인하였다.
- $k = n-1$로 두고 마지막 항 $(-1)^n\binom{n}{n}$을 더하면 $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$이 되는데, 이는 잘 알려진 사실 $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$이다.

흔한 실수

- 완전히 약분한 분수($\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$)만 보고 추측하다가 규칙을 놓치는 경우. 약분을 되돌려 공통된 꼴로 맞추는 것이 요령이다.
- (ii)에서 k 대신 n에 대한 귀납법을 쓰는 경우(가능하지만 더 번거롭다), 또는 k에서 $k+1$로 넘어가는 단계는 $k+1 \leq n-1$인 동안만 필요하다는 점을 잊는 경우.

STEP 너머

소문항 (i)은 무한곱(infinite product) $\prod_{m\geq 2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}$의 출발점이다. 이는 오일러(Euler)의 곱 $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$의 특수한 경우이다. 양변을 $m = 1$인 인수 $1 - x^2$으로 나누고 $x \to 1$로 보내면 된다. 무한곱의 의미를 이해하고 언제 수렴(converge)하는지 살피는 일은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 다루는 주제이다. 소문항 (ii)는 파스칼의 법칙이나 생성함수(generating function)로부터 얻어지는 수많은 이항 항등식(binomial identity) 가운데 하나이다. 이는 $(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-x} = (1-x)^{n-1}$에서 x^k의 계수(coefficient)이다. 무한급수와 무한곱의 수렴에 대해 읽어 보려면 Abbott의 *Understanding Analysis*가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.