풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 9

순수수학 • 구, 평면과 반사

> **STEP II 견본 문제지, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q9

핵심 아이디어

두 소문항 모두 하나의 그림에 관한 것이다. 바로 평면(plane)과 그 평면에 내린 수선(perpendicular)이다. (i)에서는 구(sphere)의 중심이 원점이므로, 모든 것은 원점에서 평면에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)로 결정된다. 이 점과 O 사이의 거리가 둘이 만나는지를 정하고, 이어서 피타고라스(Pythagoras) 정리가 원을 알려 준다. (ii)에서는 $\mathbf{x}$를 $\mathbf{c}$ 방향 성분(component)과 $\mathbf{c}$에 수직인 성분으로 나누고, 주어진 식이 각 성분에 무엇을 하는지 살펴본다.

풀이

소문항 (i)

평면 $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$은 점 $\mathbf{a}$를 지나고 법선(normal) 벡터가 $\mathbf{b}$이다. 원점 O에서 평면에 내린 수선의 발을 N이라 하자. ON은 법선 방향이므로 어떤 스칼라(scalar) λ에 대하여 $\mathbf{n}=\lambda\mathbf{b}$이고, N은 평면 위에 있으므로

$$(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

이다. $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$이므로 이렇게 나눌 수 있다. 따라서

$$\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad d=|\mathbf{n}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|},$$

이고, 여기서 d는 O에서 평면까지의 거리이다.

이제 평면 위의 임의의 점 $\mathbf{x}$를 잡자. 벡터 $\mathbf{x}-\mathbf{n}$은 평면 안에 있으므로 $\mathbf{b}$에 수직이고, 따라서

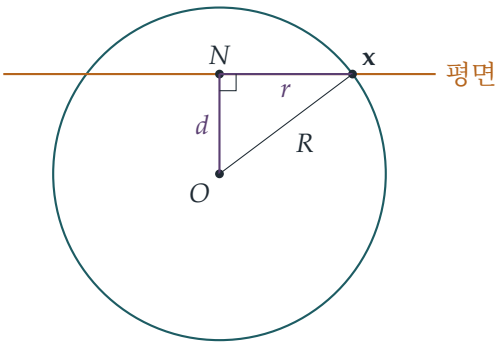
$\mathbf{n}$에도 수직이다. 피타고라스 정리에 의하여

$$|\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{n}|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = d^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2. \qquad (*)$$

그러므로 평면 위의 점은 $|\mathbf{x}| \geq d$를 만족하고, $|\mathbf{x}| \geq d$인 모든 값이 실제로 나타난다(평면 안에서 N으로부터 멀어지면 된다). 따라서 구 $|\mathbf{x}| = R$가 평면과 만날 필요충분조건은 $R \geq d$, 즉

$$\boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq R\,|\mathbf{b}|} \qquad \text{또는 동치로} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq R^2|\mathbf{b}|^2.$$

이다. 등호가 성립하는 경우 평면은 접평면(tangent plane)이고, "원"은 한 점 N으로 줄어든다.



조건이 성립할 때, 두 곡면 위에 동시에 있는 점들은 $|\mathbf{x}| = R$를 만족하고, $(*)$에 의하여

$$|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = R^2 - d^2.$$

이다. 따라서 이 점들은 평면 안에서 평면 위의 점 N으로부터 일정한 거리에 있다. 즉 N을 중심으로 하는 원을 이룬다. 그 중심과 반지름은

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}} = \frac{\sqrt{R^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{b}|}.$$

이다.

소문항 (ii)

단위벡터(unit vector) $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$를 쓰자($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$이므로 문제없다). 그러면 주어진 관계식은

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}.$$

이다.

? **생각해 보기** $(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}$는 기하학적으로 무엇인가?

이것은 $\mathbf{x}$의 $\mathbf{c}$ 방향 성분, 곧 O를 지나고 방향이 $\mathbf{c}$인 직선 위로의 $\mathbf{x}$의 정사영(projection)이다. 그러므로

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \qquad \mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel},$$

로 나누면, $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c}) = 0$이다. 관계식은

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

이 된다. O를 지나고 $\mathbf{c}$에 수직인 평면 Π(평면 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$) 안의 성분은 그대로이고, Π에 수직인 성분은 방향이 뒤집힌다. 이것이 바로 거울이 하는 일이다. **$\mathbf{x}'$은 평면 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$에 대한 $\mathbf{x}$의 반사(reflection)이다**. 이 평면은 원점을 지나고 법선 벡터가 $\mathbf{c}$인 평면이다.

반사의 정의에 비추어 이를 확인하자.

- $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = -2\mathbf{x}_{\parallel}$은 $\mathbf{c}$의 상수배이므로, $\mathbf{x}$에서 $\mathbf{x}'$까지의 선분은 Π에 수직이다.
- 중점 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \mathbf{x}_{\perp}$은 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = 0$을 만족하므로 Π 위에 있다.

몇 가지 결과를 보면 그림이 더 구체적으로 다가온다. Π 위의 점($\mathbf{x}\cdot\mathbf{c} = 0$인 점)은 움직이지 않는다. $\mathbf{c}$ 자신은 $-\mathbf{c}$로 간다. $|\mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{x}_{\perp}|^2 + |\mathbf{x}_{\parallel}|^2$이므로 $|\mathbf{x}'| = |\mathbf{x}|$이다. 그리고 두 번 반사하면 제자리로 돌아와야 하듯, 이 사상을 두 번 적용하면 $\mathbf{x}$가 다시 나온다. $\mathbf{c}$를 0이 아닌 임의의 상수배 $k\mathbf{c}$로 바꾸어도 관계식은 변하지 않는데, 이는 자연스럽다. 중요한 것은 평면뿐이고, 법선 벡터의 길이나 방향은 상관없기 때문이다.

검산

(i)에서 $\mathbf{a} = \mathbf{b} = (0,0,1)$, $R = 2$로 두자. 평면은 $z = 1$이고, 이 평면은 구 $x^2+y^2+z^2 = 4$와 원 $x^2+y^2 = 3$, $z = 1$에서 만난다. 공식은 중심 $(0,0,1)$, 반지름 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$을 주므로 맞다. (ii)에서 $\mathbf{c} = (0,0,1)$로 두면, 식은 (x,y,z)를 $(x,y,-z)$로 보내고 이는 $z = 0$에 대한 반사이다. 또한 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, R와 $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}$를 무작위로 20,000번 골라 두 소문항을 수치적으로 검사하였다. 예측한 원 위에 만든 점들은 오차 10^{-9} 이내에서 구와 평면 위에 동시에 있었고, (ii)의 사상은 Π 안의 벡터를 고정하고, 길이와 내적(dot product)을 보존하며, 자기 자신이 역사상(inverse)이었다.

흔한 실수

- 절댓값(modulus)을 빠뜨리는 것. 조건은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le R|\mathbf{b}|$가 아니라 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le R|\mathbf{b}|$이다. O의 반대편에 있는 평면은 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} < 0$이다.
- 원의 중심을 $\mathbf{a}$라고 답하는 것. 점 $\mathbf{a}$는 평면 위의 한 점일 뿐이고, 중심은 O에서 내린 수선의 발이다.

▶ (ii)에서 "$\mathbf{c}$에 대한 반사" 또는 "$\mathbf{c}$ 방향 직선에 대한 반사"라고 말하는 것. 그 직선에 대한 반사는 $\mathbf{x} \mapsto 2\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{x}$이고, 이는 $-\mathbf{x}'$이다.

STEP 너머

(ii)의 사상은 **하우스홀더 반사**(*Householder reflection*) $\mathbf{x} \mapsto (I - 2\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$이며, 직교(orthogonal)이면서 대칭(symmetric)이고 행렬식(determinant)이 -1인 선형사상(linear map)이다. 공간의 모든 회전(rotation)은 이러한 반사 두 개의 곱이며, 수치해석학자들은 이를 이용하여 행렬을 안정적으로 분해한다(QR 분해(QR decomposition)). Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 정확히 이런 관점에서 사영, 반사, 직교행렬을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.