풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 7

순수수학 • 계단함수의 적분

STEP II 견본 문제지, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q7

핵심 아이디어

피적분함수(integrand) $[\mathrm{e}^x]$는 계단함수(step function)이다. 즉 e^x가 연속한 두 정수 사이에 머무는 각 구간에서 상수이다. 따라서 그 구간들을 찾고, 각 구간에서 상수를 적분한 다음, 모두 더하면 된다. 이렇게 얻은 합은 다루기 어색해 보이지만, 같은 항끼리 맞추어 놓으면 대부분의 로그가 짝지어 소거된다.

풀이

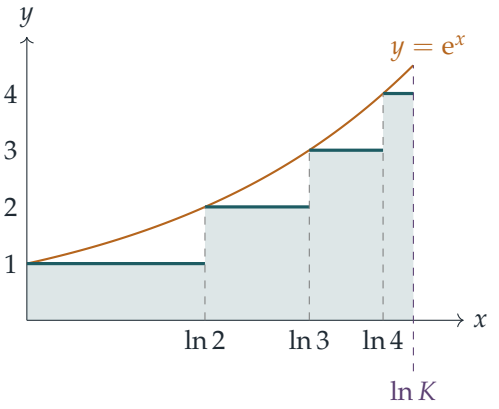
피적분함수가 상수인 곳

$K \geq 1$이라 하자. 그러면 $\ln K \geq 0$이고 $N = [K] \geq 1$이다. (만약 $0 < K < 1$이면 $\ln K$와 0 사이의 x에 대하여 $0 < \mathrm{e}^x \leq 1$이고, 한 점 $x = 0$을 제외하면 $[\mathrm{e}^x] = 0$이므로 $I = 0$이다. 또한 $N = 0$이고 $N \ln K - \ln 0! = 0$이다. 따라서 이 경우에도 결과가 성립한다.)

정수 $k \geq 1$에 대하여 ln이 증가함수이므로

$$k \leq \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \leq x < \ln(k+1),$$

이다. 그러므로 $[\ln k, \ln(k+1))$에서 $[\mathrm{e}^x] = k$이다. 적분 구간 $0 \leq x \leq \ln K$에서는 $1 \leq \mathrm{e}^x \leq K$이므로 $[\mathrm{e}^x]$는 $1, 2, \ldots, N$의 값을 갖고, 마지막 값 N은 $[\ln N, \ln K]$에서 성립한다. 그 구간에서는 $N \leq \mathrm{e}^x \leq K < N+1$이기 때문이다.



색칠한 넓이가 I이다($K = 4.5$로 그렸으므로 $N = 4$이다).

조각 더하기

각 구간에서 상수를 적분하면

$$I = \sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) + N(\ln K - \ln N).$$

(을 얻는다. $N = 1$이면 합은 빈 합이고, $K = N$이면 마지막 항은 0이다. 어느 경우도 따로 다룰 필요가 없다.)

> **생각해 보기** $\sum k(\ln(k+1) - \ln k)$를 어떻게 간단히 할까? 이대로는 망원급수(telescoping sum)처럼 소거되지 않는다.

두 합으로 나누고, 첫 번째 합에서 $j = k + 1$로 놓아 첨자를 옮기면

$$\sum_{k=1}^{N-1} k\ln(k+1) = \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j.$$

이다. 이제 두 합 모두 $\ln j$의 배수들의 합이므로, 각 $\ln j$의 계수를 모을 수 있다. $\ln 1 = 0$을 이용하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) &= \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j - \sum_{j=2}^{N-1} j\ln j \\ &= (N-1)\ln N + \sum_{j=2}^{N-1}((j-1)-j)\ln j \\ &= (N-1)\ln N - \sum_{j=2}^{N-1}\ln j.\end{aligned}$$

이다. 마지막 조각 $N\ln K - N\ln N$을 더하면

$$\begin{aligned} I &= N\ln K - \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j \\ &= N\ln K - \sum_{j=1}^{N} \ln j \\ &= N\ln K - \ln(N!), \end{aligned}$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

더 매끄러운 관점

색칠한 영역을 세로 띠로 자르는 대신 가로 층으로 잘라 보자. $1 \le k \le N$에 대하여, 높이 $k-1$과 k 사이의 층은 정확히 $[\mathrm{e}^x] \ge k$인 곳, 즉 $\mathrm{e}^x \ge k$인 곳, 다시 말해 $\ln k \le x \le \ln K$에서 존재한다. 그 층의 넓이는 $\ln K - \ln k$이므로 곧바로

$$I = \sum_{k=1}^{N} (\ln K - \ln k) = N\ln K - \ln(N!)$$

을 얻는다. 엄밀하게는 $1 \le y < N+1$에 대하여 $[y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}[y \ge k]$임을 이용하고, 이를 항별로 적분하는 것이다. 이는 위의 첨자 옮기기와 같은 재배열을 기하학적으로 한 것이다.

검산

- $K = 1$: 적분 구간의 길이가 0이고, 공식은 $1\cdot 0 - \ln 1 = 0$을 준다.
- $K = \mathrm{e}$: 이때 $N = 2$이고, 직접 계산하면 $I = \ln 2 + 2(1 - \ln 2) = 2 - \ln 2 \approx 1.3069$이며, 이는 $2\ln \mathrm{e} - \ln 2$와 일치한다.
- $K = 10$이면 공식은 $10\ln 10 - \ln(10!) \approx 7.9214$를 주고, $[0, \ln 10]$에서 $[\mathrm{e}^x]$의 중점 구적법(midpoint quadrature) 값과 5×10^{-6} 이내로 일치한다. $[1, 40]$의 임의의 K 값에 대해서도 일치한다.

흔한 실수

- 구간 $[\ln N, \ln(N+1)]$까지 포함하여 합을 N까지 진행하는 것. 적분 구간의 위끝은 $\ln(N+1)$이 아니라 $\ln K$이므로, 마지막 조각은 따로 다루어야 한다.
- 첨자를 다시 매길 때 양 끝 항을 잘못 처리하는 것. $N = 3$일 때의 합을 직접 써서 확인하자.

STEP 너머

$\sum k(a_{k+1} - a_k)$를 $-\sum a_k$와 경계 항의 합으로 바꾸는 것을 **부분합산**(summation by parts, 아벨 합(Abel summation))이라 하며, 이는 부분적분(integration by parts)의 이산적 대응물이다. $K = N$으로 놓고 $\mathrm{e}^x - 1 < [\mathrm{e}^x] \leq \mathrm{e}^x$를 이용하면 $N \ln N - N + 1 \leq \ln(N!) \leq N \ln N - N + 1 + \ln N$을 얻는데, 이는 스털링 근사(Stirling's approximation)를 향한 첫 걸음이다. 같은 아이디어를 리만-스틸체스 적분(Riemann–Stieltjes integral) $\int f \,\mathrm{d}[t]$로 쓰면, 해석적 정수론(analytic number theory) 전반에서 합을 적분으로 바꾸는 도구가 된다. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*(해석적 정수론 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.