풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 6

순수수학 • 상미분방정식으로부터 덧셈정리 유도

> **STEP II 견본 문제지, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q6

핵심 아이디어

"f는 e^x이다"라고 말하는 것은 허용되지 않으므로, 모든 것을 미분방정식(differential equation) 자체로부터 이끌어 내야 한다. 사용할 수 있는 유일한 도구는 도함수(derivative)가 모든 곳에서 0인 함수는 상수(constant)라는 사실이다. 따라서 요령은 도함수가 서로 상쇄되어 0이 되는 식을 만든 다음, $x = 0$을 대입하여 그 상수를 결정하는 것이다. $a - x$에서의 값과 x에서의 값을 짝짓는 것은 자연스러운데, 두 변수의 합이 언제나 a이고, 이것이 바로 덧셈정리(addition formula)의 꼴이기 때문이다.

풀이

지수함수의 덧셈 법칙

a를 고정하고 $p(x) = \mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x)$라 하자. 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$를 이용하면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{f}(a - x)] = -\mathrm{f}'(a - x) = -\mathrm{f}(a - x)$이다. 따라서 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}'(x) \\ &= -\mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) = 0, \end{aligned}$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다.

모든 x에 대하여 $p'(x) = 0$이므로 함수 p는 상수이다. $\mathrm{f}(0) = 1$이므로 $x = 0$에서의 값은 $\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)$이다. 그러므로

$$\mathrm{f}(a - x)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(a) \qquad \text{모든 } x\text{와 모든 } a\text{에 대하여.}$$

이제 임의의 x와 y를 잡고 $a = x + y$로 택하자. 그러면 $a - x = y$이고, 위의 항등식은

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x + y),$$

가 되어 증명이 끝난다.

코사인의 덧셈정리

같은 전략을 그대로 따라 한다. 따라서 $a-x$와 x에서 계산한 c와 s의 조합 가운데 도함수가 0이 되는 것이 필요하다.

? **생각해 보기** 어떤 조합을 미분해야 할까?

답이 우리를 이끌게 하자. $a = x+y$일 때 우리가 원하는 것은 $\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$, 즉 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)$이다. 그러므로 이것이 시도해 볼 함수이다.

a를 고정하고

$$g(x) = \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{s}(x).$$

라 하자. 연쇄법칙과 주어진 도함수에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c}(a-x)] = -\mathrm{c}'(a-x) = \mathrm{s}(a-x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{s}(a-x)] = -\mathrm{s}'(a-x) = -\mathrm{c}(a-x).$$

이다. 따라서 곱의 미분법에 의해

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)\right] - \left[-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x) + \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

이다. 그러므로 g는 상수이고, 그 값은

$$g(0) = \mathrm{c}(a)\,\mathrm{c}(0) - \mathrm{s}(a)\,\mathrm{s}(0) = \mathrm{c}(a)\cdot 1 - \mathrm{s}(a)\cdot 0 = \mathrm{c}(a).$$

이다. 따라서 모든 x와 a에 대하여 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x) = \mathrm{c}(a)$이다. 임의의 x와 y에 대하여 $a = x+y$로 두면 $a-x = y$이므로

$$\mathrm{c}(x+y) = \mathrm{c}(x)\,\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\,\mathrm{s}(y),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

$h(x) = \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) + \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)$에 같은 방법을 적용하면 $h' = 0$이고 $h(0) = \mathrm{s}(a)$이므로, $\mathrm{s}(x+y) = \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y) + \mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$도 성립한다.

검산

- $y = 0$을 대입하자. $\mathrm{f}(0) = \mathrm{c}(0) = 1$과 $\mathrm{s}(0) = 0$을 이용하면 결과는 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)$와 $\mathrm{c}(x) = \mathrm{c}(x)$가 된다.
- 코사인 결과에 $y = -x$를 대입하면 $1 = \mathrm{c}(0) = \mathrm{c}(x)\mathrm{c}(-x) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(-x)$인데, 이것은 모습을 바꾼 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$이다.

- 미분방정식을 수치적으로 풀고(내장된 지수함수나 삼각함수를 쓰지 않는 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)을 사용하였다) $[-3,3]$에서 무작위로 고른 60개의 순서쌍에서 두 항등식을 확인하였다. 예를 들어 $x=0.7, y=1.1$일 때 코사인 결과의 양변은 소수점 아래 넷째 자리까지 모두 -0.2272이다. 모든 차이는 10^{-11}보다 작았다.

흔한 실수

- $\mathrm{f}(a-x), \mathrm{c}(a-x), \mathrm{s}(a-x)$를 미분할 때 연쇄법칙에서 나오는 음의 부호를 빠뜨리는 것.
- "도함수가 0이다"에서 멈추고, $x=0$에서 상수를 계산한 다음 $a=x+y$로 택하는 단계를 하지 않는 것.
- 문제에서 명시적으로 금지한 $\cos(x+y)$의 공식이나 $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$를 그대로 인용하는 것.

STEP 너머

대학에서는 이것이 지수함수와 삼각함수를 정의하는 정직한 방법이다. 즉 이 함수들을 미분방정식의 해로(또는 거듭제곱급수(power series)로) 정의하고, 익숙한 모든 성질을 그 정의로부터 이끌어 낸다. 여기서 사용한 사실, 곧 도함수가 모든 곳에서 0이면 함수가 상수일 수밖에 없다는 사실은 평균값 정리(Mean Value Theorem)의 결과이며, 이 사실로부터 이러한 해가 유일(unique)하다는 것도 알 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 이론을 꼼꼼하게 쌓아 올린다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.