풀이

STEP II 견본 문제지, 문제 5

순수수학 • 급수와 적분을 이용한 한계

STEP II 견본 문제지, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/spec-s2-q5

핵심 아이디어

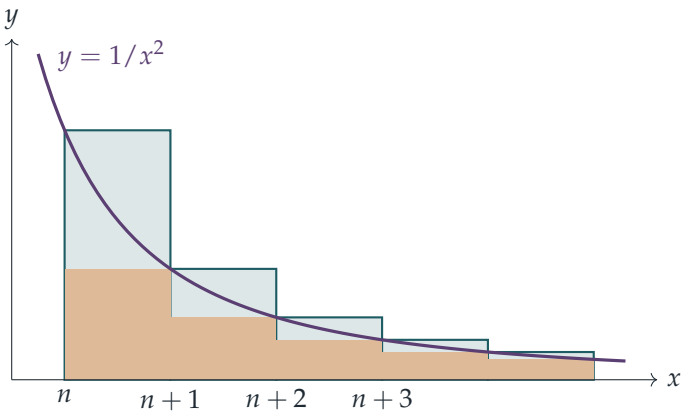
감소함수(decreasing function)의 함숫값들의 합은 폭이 1인 직사각형들을 한 줄로 늘어놓은 것으로, 적분(integral)은 곡선 아래의 넓이로 나타낼 수 있다. 직사각형을 각 표본점의 오른쪽에 놓으면 곡선 위로 삐져나오고, 왼쪽에 놓으면 곡선 아래에 쏙 들어간다. 이것으로 샌드위치가 만들어지고, 그 뒤는 모두 계산 정리일 뿐이다. 급수(series)의 꼬리(tail)가 두 간단한 분수 사이에 갇히므로, 꼬리에 대한 추측값을 더하면 추정이 엄청나게 좋아진다.

풀이

샌드위치

$f(x) = 1/x^2$이라 하자. 이 함수는 $x > 0$에서 양수이고 순감소한다. 또한 다음이 필요하다.

$$\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^M = \frac{1}{n}.$$



위쪽 직사각형(청록색 테두리). $[r, r+1]$ 위에 높이가 $f(r) = 1/r^2$인 직사각형을 놓는다. f가 감소하므로 $r < x \le r+1$에서 $f(x) < f(r)$이고, 따라서 이 직사각형의 넓이 $1/r^2$은 $\int_r^{r+1} f(x)\,\mathrm{d}x$보다 순전히 크다. 이것을 $r = n, n+1, \ldots$에 대하여 더하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

아래쪽 직사각형(호박색). $[r-1, r]$ 위에 높이가 $f(r) = 1/r^2$인 직사각형을 놓는다. 이번에는 $r-1 \le x < r$에서 $f(x) > f(r)$이므로 이 직사각형은 곡선 아래에 놓이고, 그 넓이 $1/r^2$은 $\int_{r-1}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$보다 순전히 작다. 구간들이 $[n, \infty)$를 채우는 $r = n+1, n+2, \ldots$에 대하여 더하면

$$\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

(세 양은 모두 유한하다. 적분은 $1/n$이고 두 합은 이 값으로 유계이다.) 이것이 요구된 두 부등식이며, 정리해 두면 다음과 같다.

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

꼬리 가두기

$S_n = \sum_{r=1}^{n} 1/r^2$이라 쓰자. 그러면 $A - S_n$은 정확히 꼬리 $T = \sum_{r=n+1}^{\infty} 1/r^2$이다.

$(*)$의 오른쪽 부등식에서 곧바로 $T < 1/n$을 얻는다.

> **생각해 보기** $(*)$의 왼쪽 부등식은 합이 $r = n$에서 시작하지만, 꼬리는 $r = n+1$에서 시작한다. T의 하계(lower bound)는 어떻게 얻을까?

부등식 $(*)$는 모든 양의 정수에 대하여 성립하므로, 그 왼쪽 절반에 n 대신 $n+1$을 대입한

다.

$$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

두 결과를 합치면

$$\frac{1}{n} > A - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n+1},$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

가장 작은 n

모든 항이 양수이므로 $S_n < A$이고, 오차는 $A - S_n$이다.

- $n \le 9999$이면 $n+1 \le 10^4$이므로 $A - S_n > \dfrac{1}{n+1} \ge 10^{-4}$이다. 즉 오차가 너무 크다.
- $n = 10^4$이면 $A - S_n < \dfrac{1}{n} = 10^{-4}$이다. 즉 오차가 충분히 작다.

따라서 가장 작은 값은 $n = 10\,000$이다. 여기서 두 부등식이 모두 순부등식이라는 점이 중요하다는 데 주목하자. $n = 9999$에서 하계는 정확히 10^{-4}이고, $n = 10^4$에서 상계(upper bound)는 정확히 10^{-4}이다.

개선된 추정값

가두는 부등식의 각 변에서 $\frac{1}{n+1}$을 빼면

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > A - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2}\right) > 0.$$

따라서 $\frac{1}{n+1} + S_n$은 여전히 A보다 작지만, 그 차이는

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

보다 작다. $n = 10^4$일 때 이 값은 $\dfrac{1}{10^4 \times 10\,001} < \dfrac{1}{10^4 \times 10^4} = 10^{-8}$이므로, 개선된 추정값은 10^{-8}보다 작은 오차로 A를 근사하며, 이것이 요구된 결과이다.

추가된 항 $1/(n+1)$은 꼬리에 대한 추측값이며, 꼬리가 폭이 $1/(n(n+1))$밖에 되지 않는 구간에 갇혀 있으므로 이 추측은 크게 틀릴 수 없다.

검산

- 작은 경우: $n = 1$이면 $S_1 = 1$이고 $A = \pi^2/6 \approx 1.6449$이므로 $A - S_1 \approx 0.645$이며, 이 값은 실제로 $\frac{1}{2}$과 1 사이에 있다.

- $A = \pi^2/6$을 이용하여 수치적으로 합을 구하면 $A - S_{9999} \approx 1.00005 \times 10^{-4}$(아슬아슬하게 너무 큼)이고 $A - S_{10000} \approx 0.99995 \times 10^{-4}$(아슬아슬하게 충분히 작음)이므로 $n = 10\,000$이 확인된다.
- $n = 10^4$일 때 개선된 추정값의 오차는 약 5.0×10^{-9}로, 상계 $1/(n(n+1)) \approx 1.0 \times 10^{-8}$보다 작다. 그림에서 짐작할 수 있듯이(곡선이 각 직사각형의 삐져나온 부분을 대략 절반으로 자른다) 오차는 상계의 대략 절반이다.

흔한 실수

- 왼쪽 부등식을 $n+1$이 아니라 n에서 사용하는 것. 이렇게 하면 꼬리 $A - S_n$이 아니라 $\sum_{r=n}^{\infty}$의 하계를 얻게 된다.
- 순부등식을 등호가 있는 부등식처럼 다루거나 두 계 중 하나만 사용하여 $n = 9999$ 또는 $n = 10\,001$이라고 답하는 것. $n \leq 9999$를 배제하려면 하계가, $n = 10^4$을 받아들이려면 상계가 필요하다.
- 직사각형을 각 표본점의 엉뚱한 쪽에 그려서 부등식의 방향이 뒤바뀌는 것.

STEP 너머

이것은 수렴(convergence)에 대한 적분판정법(integral test)이며, 여기에 정량적인 덤까지 따라온다. 급수가 수렴함을 증명하는 바로 그 직사각형들이 꼬리의 크기도 추정해 주는 것이다. 이 아이디어를 다듬어 합을 적분과 비교하고 양 끝에서의 도함수로 보정하면 오일러-매클로린 공식(Euler–Maclaurin formula)에 이른다. 이 공식은 여기서 $A - S_n \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$을 예측하며, 오일러(Euler)는 $\sum 1/r^2$이 $\pi^2/6$과 같음을 증명하기 전에 이 방법으로 그 값을 소수점 아래 여러 자리까지 계산했다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 급수와 그 수렴판정법을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.